ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αυτόματος Έλεγχος

Ενότητα 4η: Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης

Παναγιώτης Σεφερλής

Εργαστήριο Δυναμικής Μηχανών

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης

Στόχοι του κεφαλαίου

- Κατάστρωση προτύπων (μοντέλων) μεταβλητών κατάστασης.
- Ανάλυση και επίλυση μοντέλων μεταβλητών κατάστασης.
- Αντιστοιχία μοντέλων μεταβλητών κατάστασης με μοντέλα συναρτήσεων μεταφοράς.
- Ευστάθεια στο πεδίο μεταβλητών κατάστασης.

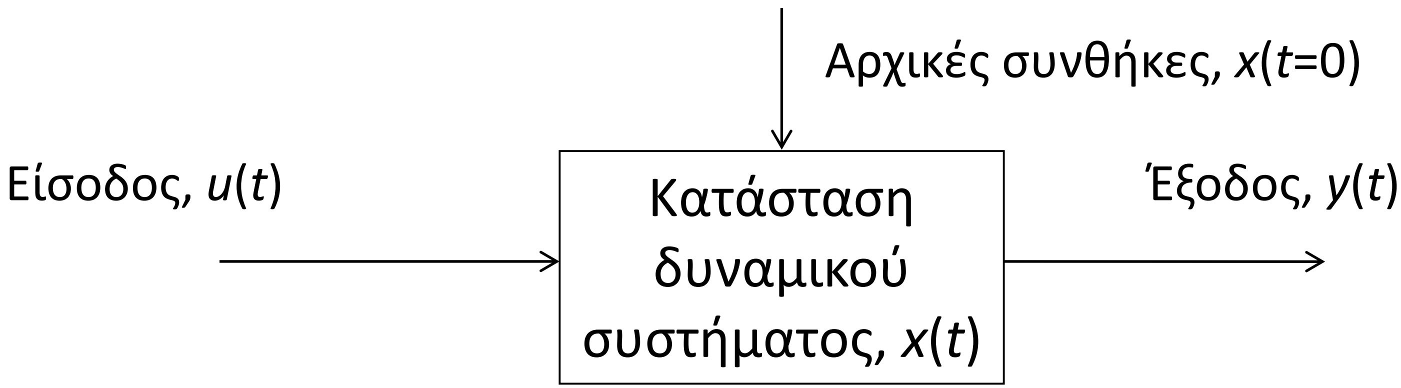
Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης

Περίληψη του κεφαλαίου

- Ορισμός μεταβλητών κατάστασης.
- Κατάστρωση μοντέλων μεταβλητών κατάστασης.
- Επίλυση μοντέλων μεταβλητών κατάστασης.
- Αντιστοιχία μοντέλων μεταβλητών κατάστασης με μοντέλα συναρτήσεων μεταφοράς.
- Ευστάθεια μοντέλων μεταβλητών κατάστασης.

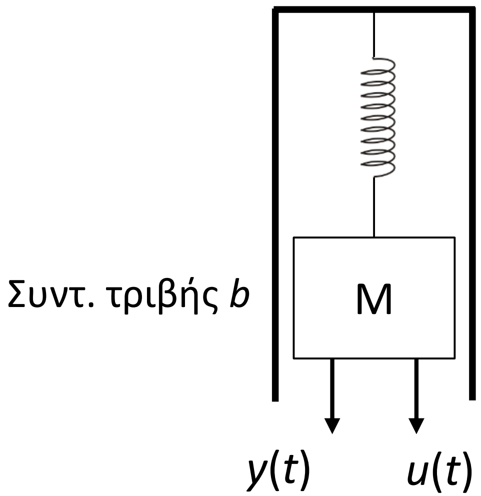
Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης

Δυναμικό σύστημα



Οι μεταβλητές κατάστασης περιγράφουν πλήρως τη μελλοντική δυναμική απόκριση ενός συστήματος, όταν είναι γνωστές η παρούσα κατάσταση του συστήματος, οι μεταβλητές εισόδου και οι εξισώσεις που διέπουν τη δυναμική συμπεριφορά του.

Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης



Μεταβλητές κατάστασης:
Θέση και ταχύτητα μάζας

$$x_1(t) = y(t) \qquad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Εξίσωση κίνησης

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t)$$

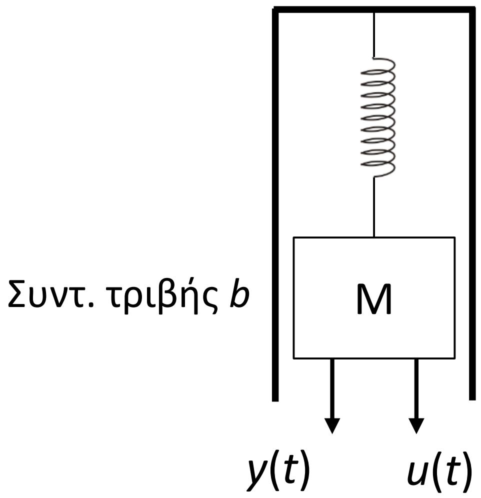
$$M\frac{dx_2(t)}{dt} + bx_2(t) + kx_1(t) = u(t)$$

Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{b}{M}x_2(t) - \frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης



Μεταβλητές κατάστασης:
Θέση και ταχύτητα μάζας

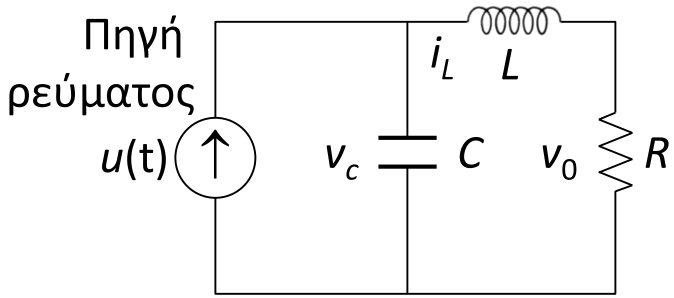
$$x_1(t) = y(t) \qquad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης
σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -b/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης



Μεταβλητές κατάστασης:
x_1 τάση στα άκρα του πυκνωτή v_c και
x_2 ρεύμα που διαρρέει το πηνίο i_L

$$i_c = C\frac{dv_c(t)}{dt} = u(t) - i_L$$

$$L\frac{di_L(t)}{dt} = -Ri_L + v_c$$

$$v_o = Ri_L$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}u(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t)$$

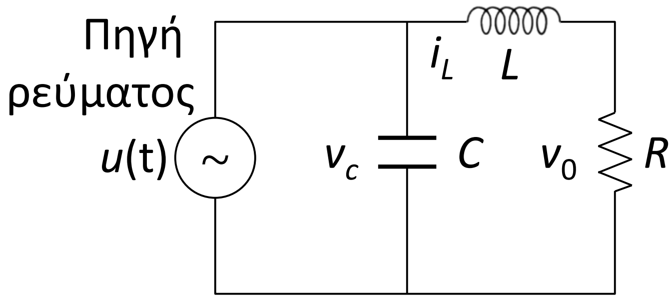
Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών κατάστασης οδηγεί σε ισοδύναμο δυναμικό σύστημα

Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης



$$i_c = C\frac{dv_c(t)}{dt} = u(t) - i_L \qquad L\frac{di_L(t)}{dt} = -Ri_L + v_c$$

$$v_o = Ri_L$$

Εναλλακτικά ως μεταβλητές κατάστασης επιλέγονται:
Η τάση στα άκρα του πυκνωτή και η τάση στα άκρα του πηνίου

$$x_1^* = v_C = x_1$$

$$x_2^* = v_L = v_c - Ri_L = x_1 - Rx_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(CR) & 1/(CR) \\ \left(-R/L - 1/L + R^2/L\right)/R & \left(1/C - R^2/L\right)/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/C \\ 1/C \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

Πρότυπα μεταβλητών κατάστασης

Γενικευμένο σύστημα

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1m}u_m$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \ldots + b_{2m}u_m$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{nm}u_m$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Επίλυση μοντέλων μεταβλητών κατάστασης

Γραμμική διαφορική 1ης τάξης

$$\dot{x} = ax + bu \Leftrightarrow sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s)$$

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^1 e^{+a(1-\tau)}bu(\tau)d\tau \Leftrightarrow X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s)$$

Αντίστοιχα για μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

$$\mathbf{x}(t) = exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^1 exp\left[\mathbf{A}(t-\tau)\right]\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

Όπου ορίζετε ο όρος $e^{\mathbf{A}t}$ ως

$$e^{\mathbf{A}t} = exp(\mathbf{A}t) = 1 + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + ... + \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!} + ...$$

Επίλυση μοντέλων μεταβλητών κατάστασης

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace.

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{x}(0) + L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right\}$$

Πίνακας μετάδοσης (transition) $\mathbf{\Phi}(t)$.

$$\mathbf{\Phi}(t) = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} = exp(\mathbf{A}t)$$

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Μετατροπή μοντέλου συνάρτησης μεταφοράς σε μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u(t) \qquad (1)$$

Ορίζουμε ως μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = y$$
$$x_2 = y^{(1)} = \dot{x}_1$$
$$x_3 = y^{(2)} = \dot{x}_2$$
$$\vdots$$
$$x_n = y^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1}$$

Με αντικατάσταση στην (1):

$$\dot{x}_n = y^{(n)} = u(t) - a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \ldots - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1$$

Μετατροπή μοντέλου συνάρτησης μεταφοράς σε μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Μετατροπή μοντέλου συνάρτησης μεταφοράς σε μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_3 u^{(3)} + b_2 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

Ορίζουμε ως μεταβλητές κατάστασης:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + u$$

Η έξοδος έχει ως εξής:

$$y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_4$$

Μετατροπή μοντέλου συνάρτησης μεταφοράς σε μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_3 u^{(3)} + b_2 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Μετατροπή μοντέλου συνάρτησης μεταφοράς σε μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

Γενική περίπτωση

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y$$
$$= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + b_2 u^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1} u^{(1)} + b_n u$$

Ορίζουμε ως μεταβλητές κατάστασης

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$
$$\dot{x}_n = u - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - a_3 x_{n-2} - \ldots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1$$

Μετατροπή μοντέλου συνάρτησης μεταφοράς σε μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny$$
$$=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+b_2u^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}u^{(1)}+b_nu$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_n-b_0a_n & b_{n-1}-b_0a_{n-1} & \cdots & b_2-b_0a_2 & b_1-b_0a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+b_0u$$

Ισοδύναμα μοντέλα μεταβλητών κατάστασης

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$: Διαγώνιο μητρώο

Όταν οι ιδιοτιμές του **A** είναι διακριτές, οι στήλες του μητρώου **P** αποτελούνται από τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου **A**.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \pi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

Μετατροπή μοντέλου μεταβλητών κατάστασης σε μοντέλο συνάρτησης μεταφοράς

Με μετασχηματισμό Laplace του μοντέλου μεταβλητών κατάστασης προκύπτει:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

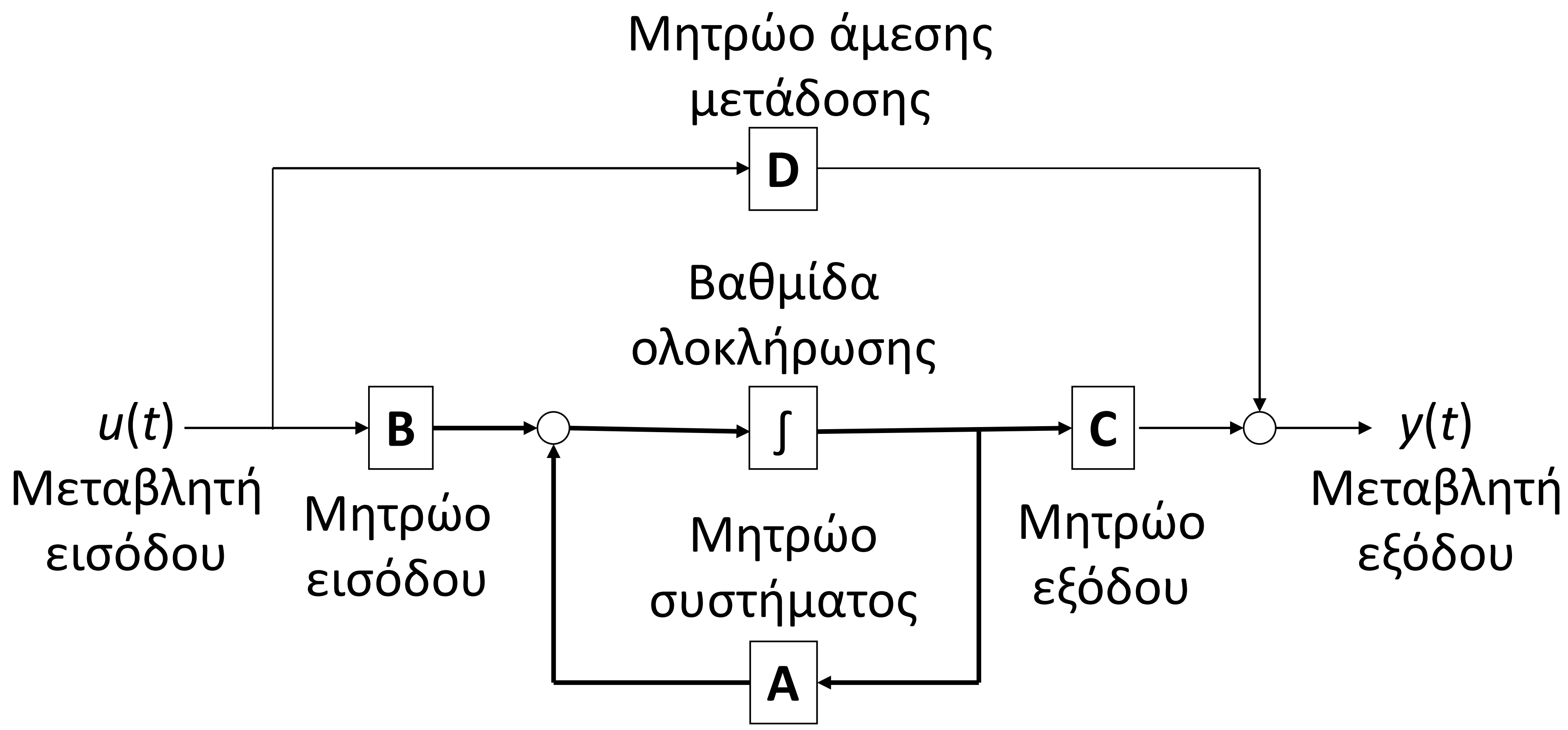
$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

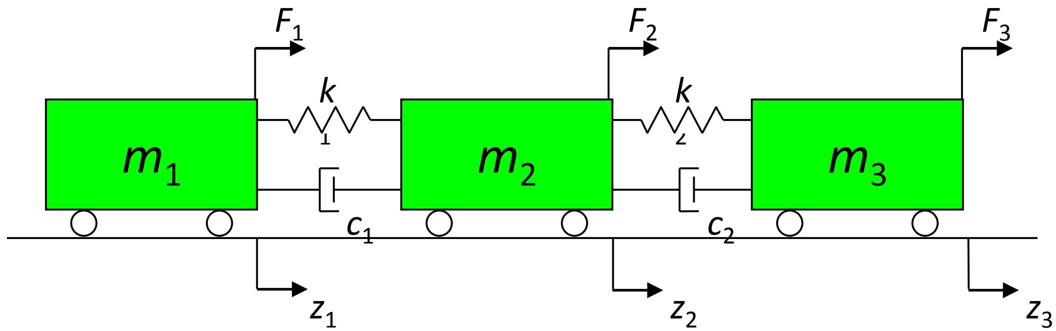
$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{\left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Διάγραμμα βαθμίδων μοντέλου μεταβλητών κατάστασης



Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος

$$m_1\ddot{z}_1+c_1\dot{z}_1-c_1\dot{z}_2+k_1z_1-k_1z_2=F_1$$

$$m_2\ddot{z}_2-c_1\dot{z}_1+(c_1+c_2)\dot{z}_2-c_2\dot{z}_3-k_1z_1+(k_1+k_2)z_2-k_2z_3=F_2$$

$$m_3\ddot{z}_3-c_2\dot{z}_2+c_2\dot{z}_3-k_2z_2+k_2z_3=F_3$$

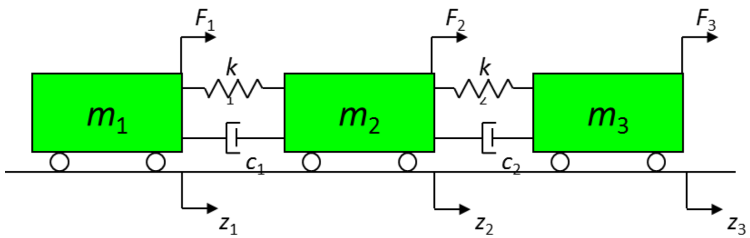
Μεταφέρονται στη μορφή

$$\ddot{z}_1=\left(F_1-c_1\dot{z}_1+c_1\dot{z}_2-k_1z_1+k_1z_2\right)/m_1$$

$$\ddot{z}_2=\left[F_2+c_1\dot{z}_1-(c_1+c_2)\dot{z}_2+c_2\dot{z}_3+k_1z_1-(k_1+k_2)z_2+k_2z_3\right]/m_2$$

$$\ddot{z}_3=\left(F_3+c_2\dot{z}_2-c_2\dot{z}_3+k_2z_2-k_2z_3\right)/m_3$$

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας



Ορίζονται ως μεταβλητές κατάστασης

$x_1=z_1$ θέση 1ης μάζας

$x_2=\dot{z}_1$ ταχύτητα 1ης μάζας

$x_3=z_2$ θέση 2ης μάζας

$x_4=\dot{z}_2$ ταχύτητα 2ης μάζας

$x_5=z_3$ θέση 3ης μάζας

$x_6=\dot{z}_3$ ταχύτητα 3ης μάζας

Οι εξισώσεις κίνησης μετατρέπονται σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \left(F_1 - c_1 x_2 + c_1 x_4 - k_1 x_1 + k_1 x_3\right) / m_1$$

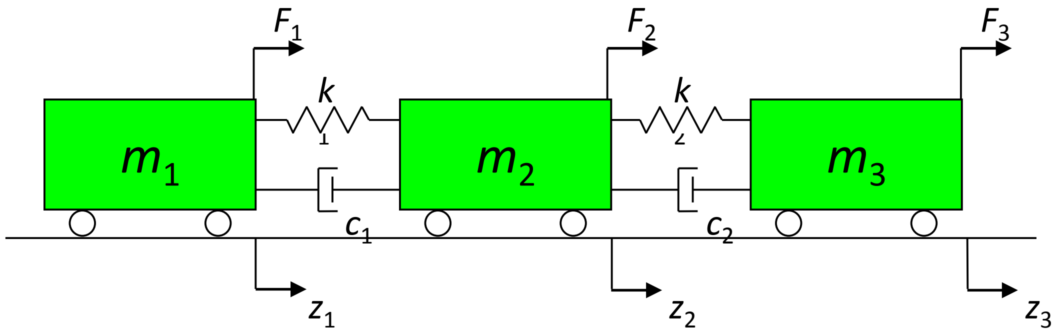
$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \left[F_2 + c_1 x_2 - \left(c_1 + c_2\right) x_4 + c_2 x_6 + k_1 x_1 - \left(k_1 + k_2\right) x_3 + k_2 x_5\right] / m_2$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = \left(F_3 + c_2 x_4 - c_2 x_6 + k_2 x_3 - k_2 x_5\right) / m_3$$

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας

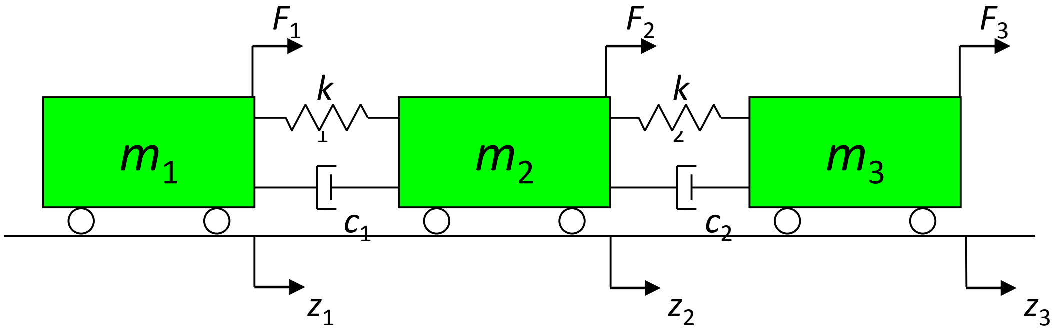


Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\dfrac{k_1}{m_1} & -\dfrac{c_1}{m_1} & \dfrac{k_1}{m_1} & \dfrac{c_1}{m_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\dfrac{k_1}{m_2} & \dfrac{c_1}{m_2} & -\dfrac{k_1+k_2}{m_2} & -\dfrac{c_1+c_2}{m_2} & \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{c_2}{m_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \dfrac{k_2}{m_3} & \dfrac{c_2}{m_3} & -\dfrac{k_2}{m_3} & -\dfrac{c_2}{m_3}
\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{F_1}{m_1} \\ 0 \\ \dfrac{F_2}{m_2} \\ 0 \\ \dfrac{F_3}{m_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Bu}}
$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{Bu}$$

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας



Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης – Μεταβλητές εξόδου

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Συνήθως οι μεταβλητές εξόδου ταυτίζονται με τις μετρούμενες μεταβλητές ή ορίζονται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών.

Μηχανικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας

Μοντέλα μεταβλητών κατάστασης στο MATLAB:

```
m1=1;m2=1;m3=1;
a=[0 1 0 0 0 0;
-k1/m1 -c1/m1 k1/m1 c1/m1 0 0;
0 0 0 1 0 0;
k1/m2 c1/m2 -(k1+k2)/m2 -(c1+c2)/m2 k2/m2 c2/m2;
0 0 0 0 0 1;
0 0 k2/m3 c2/m3 -k2/m3 -c2/m3];
b=[0 0 0;1/m1 0 0;0 0 0;0 1/m2 0;0 0 0;0 0 1/m3];
c=eye(6); d=zeros(6,3);
sysa=ss(a,b,c,d);
```

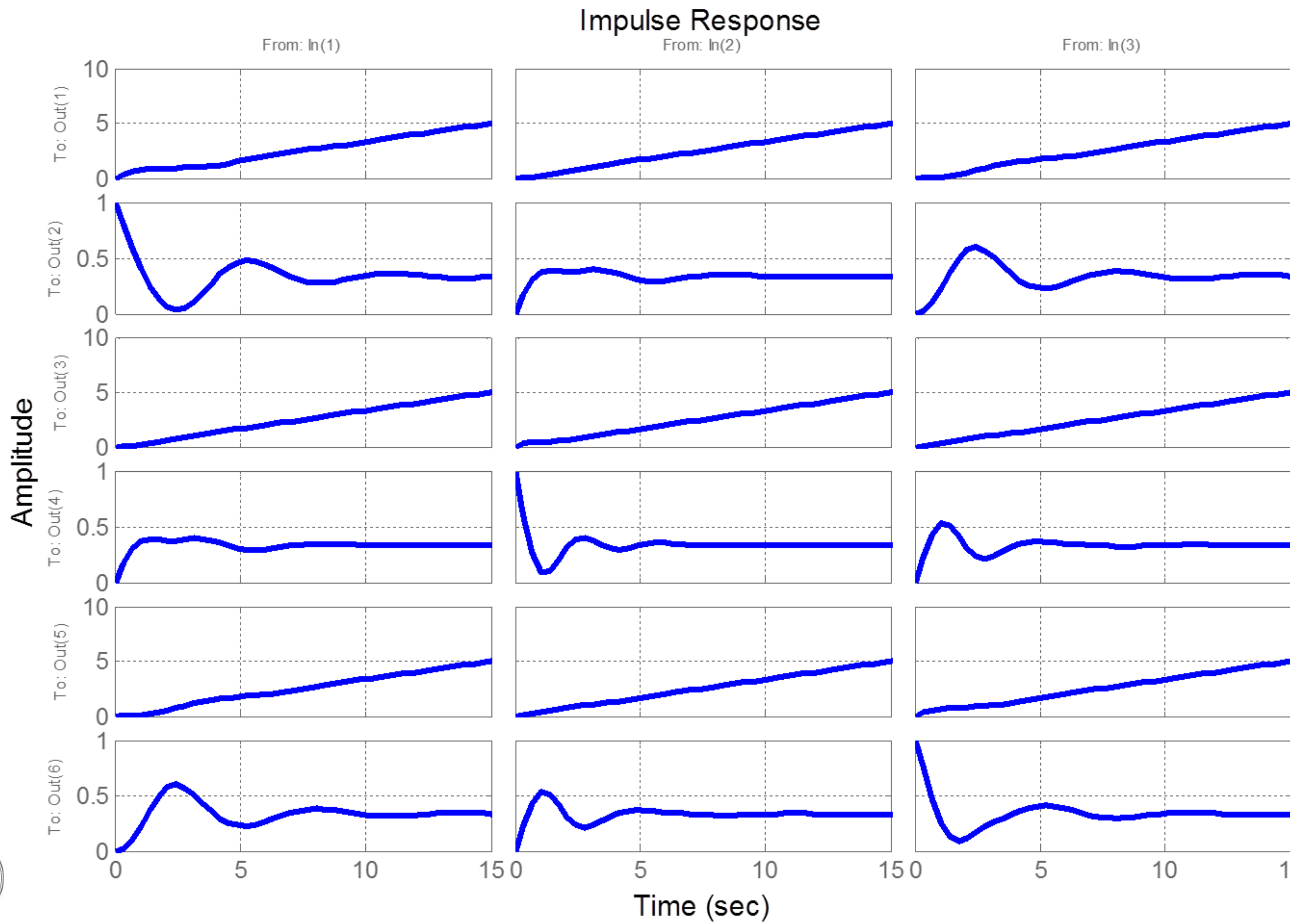
`step(sysa);` Βηματική μεταβολή των 3 εισόδων

`impulse(sysa);` Κρουστική μεταβολή των 3 εισόδων

`eig(a);` Ιδιοτιμές μητρώου **A**

```
-0.7141 + 2.0323i, -0.7141 - 2.0323i
0.0000, 0.0000
-0.2859 + 1.1006i, -0.2859 - 1.1006i
```

Μοντέλα μεταβλητών κατάστασης στο MATLAB



Μοντέλα μεταβλητών κατάστασης στο MATLAB

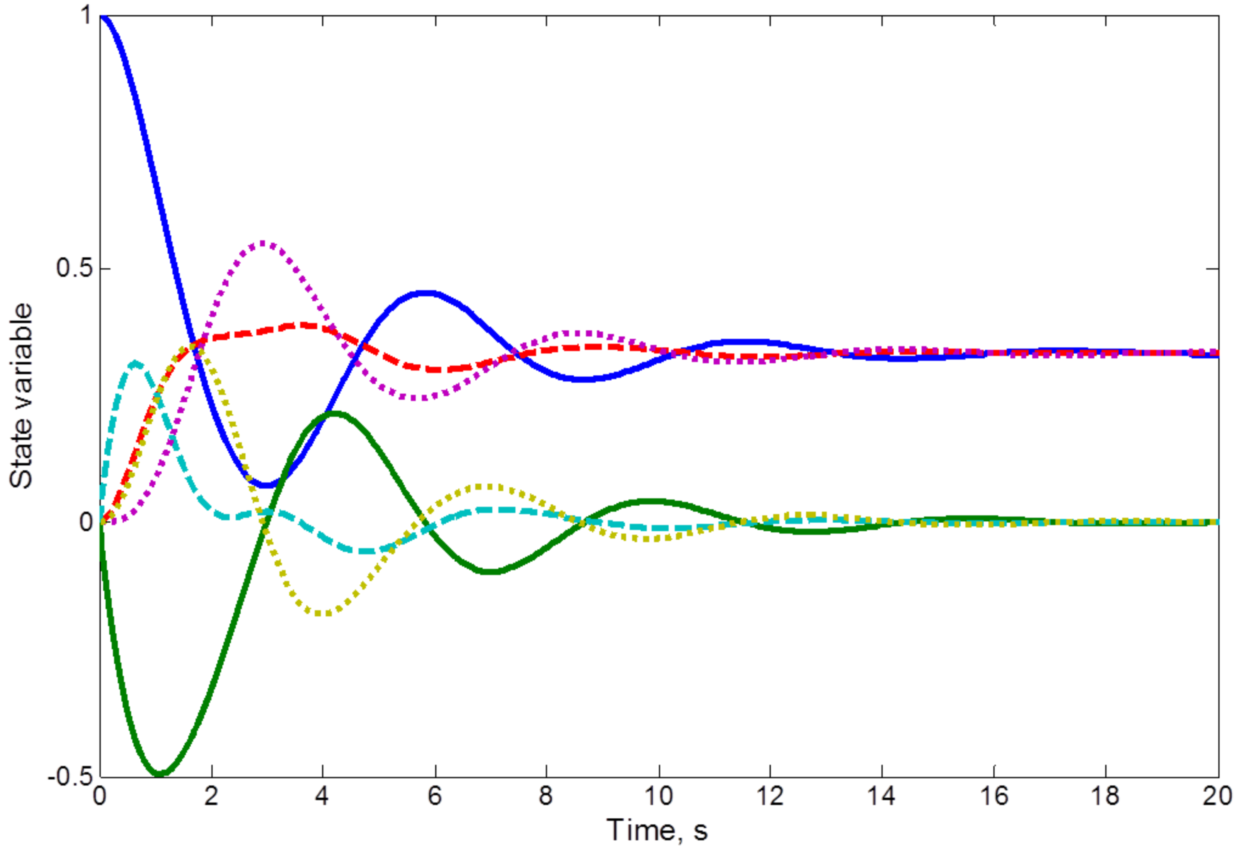
Μεταβολή αρχικών συνθηκών

Ορισμός χρονικού ορίζοντα: `t=[0:0.05:30];`

Ορισμός διανύσματος εισόδου: `u=zeros(3,601);`

Ορισμός διανύσματος αρχικών συνθηκών: `x0=[1 0 0 0 0 0];`

`[y,t,x]=lsim(sysa,u,t,x0); plot(t,y)`



Μοντέλα μεταβλητών κατάστασης στο MATLAB

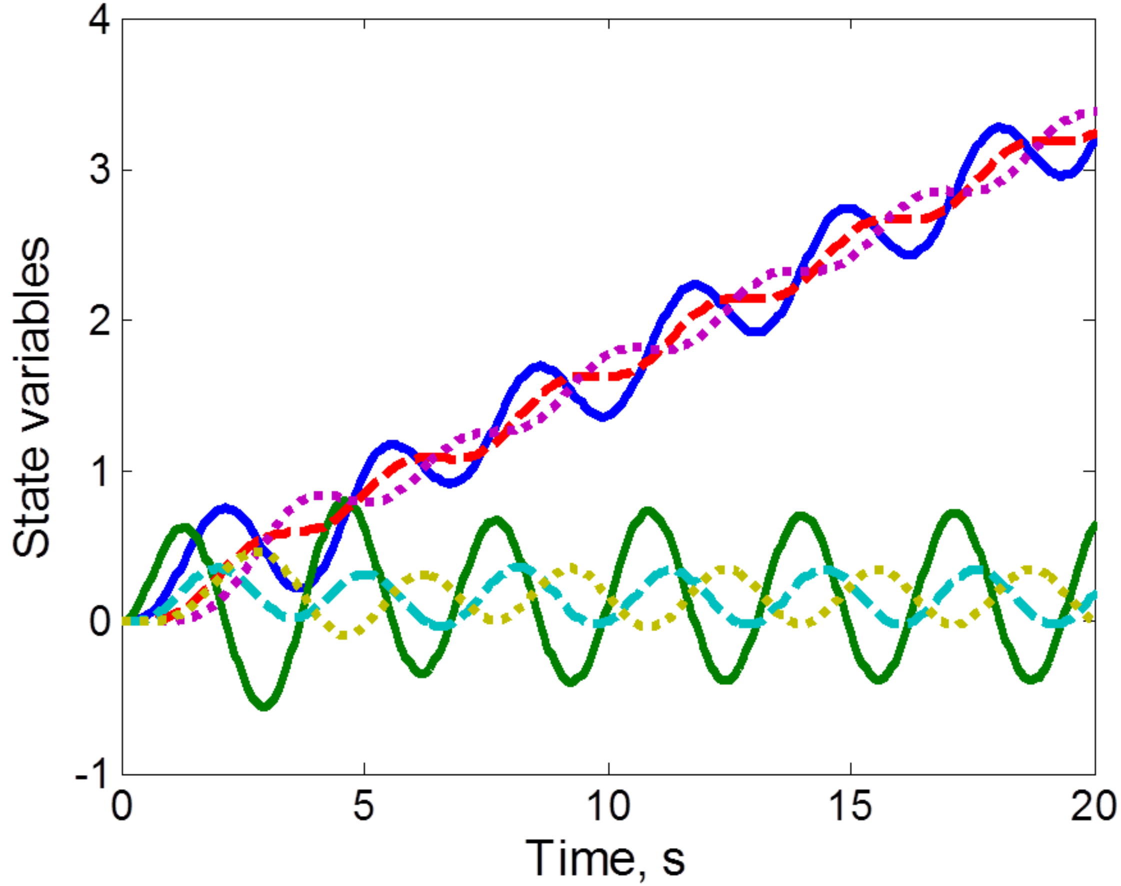
Ημιτονοειδής μεταβολής εισόδου

Ορισμός χρονικού ορίζοντα: `t=[0:0.05:30];`

Ορισμός διανύσματος εισόδου: `u=zeros(3,601); u(1,:)=sin(2*t)`

Ορισμός διανύσματος αρχικών συνθηκών: `x0=[0 0 0 0 0 0];`

`[y,t,x]=lsim(sysa,u,t,x0); plot(t,y)`



Μοντέλα μεταβλητών κατάστασης στο MATLAB

Μετατροπή σε μοντέλα συνάρτησης μεταφοράς

Συναρτήσεις μεταφοράς ανάμεσα στην 1^{η} είσοδο και τις έξι εξόδους:

```
[num,den]=ss2tf(a,b,c,d,1);
num =
0    0        1.0000  1.5000  5.2500  1.5000  2.0000
0    1.0000   1.5000  5.2500  1.5000  2.0000  0.0000
0    0        0.0000  0.5000  1.2500  1.5000  2.0000
0    0        0.5000  1.2500  1.5000  2.0000  0.0000
0    0        0.0000  0.0000  0.2500  1.5000  2.0000
0    0        0.0000  0.2500  1.5000  2.0000  0.0000
den =
1.0000  2.0000  6.7500  4.5000  6.0000  0.0000  0.0000
```

$$s^6+2.0s^5+6.75s^4+4.5s^3+5.0s^2$$

```
roots(den)
-0.7141 + 2.0323i,  -0.7141 - 2.0323i
-0.2859 + 1.1006i,  -0.2859 - 1.1006i
0.0000,   0.0000
```

Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Ορίζει ορθά ένα πλήρες σύνολο μεταβλητών κατάστασης για ένα δυναμικό σύστημα.
- Αναπτύσσει δυναμικά μοντέλα στο χώρο των μεταβλητών κατάστασης.
- Επιλύει μοντέλα μεταβλητών κατάστασης στο πεδίο του χρόνου.

Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Μετασχηματίζει ένα μοντέλο μεταβλητών κατάστασης στο ισοδύναμο μοντέλο συνάρτησης μεταφοράς και αντίστροφα.
- Μετασχηματίζει ένα μοντέλο μεταβλητών κατάστασης σε ισοδύναμο μοντέλο με διαγώνιο πίνακα μετάδοσης.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δρ Αθανάσιος Ι. Παπαδόπουλος
Δρ Αγγελική Μονέδα
Θεσσαλονίκη, Μαΐος 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης