ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αυτόματος Έλεγχος

Ενότητα 5η: Απόκριση Συχνότητας Δυναμικών Συστημάτων

Παναγιώτης Σεφερλής

Εργαστήριο Δυναμικής Μηχανών

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Στόχοι του κεφαλαίου

- Κατανόηση απόκρισης συχνότητας δυναμικού συστήματος.
- Ανάλυση συστημάτων με την απόκριση συχνότητας.
- Ευστάθεια στο πεδίο της συχνότητας.

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Περίληψη του κεφαλαίου

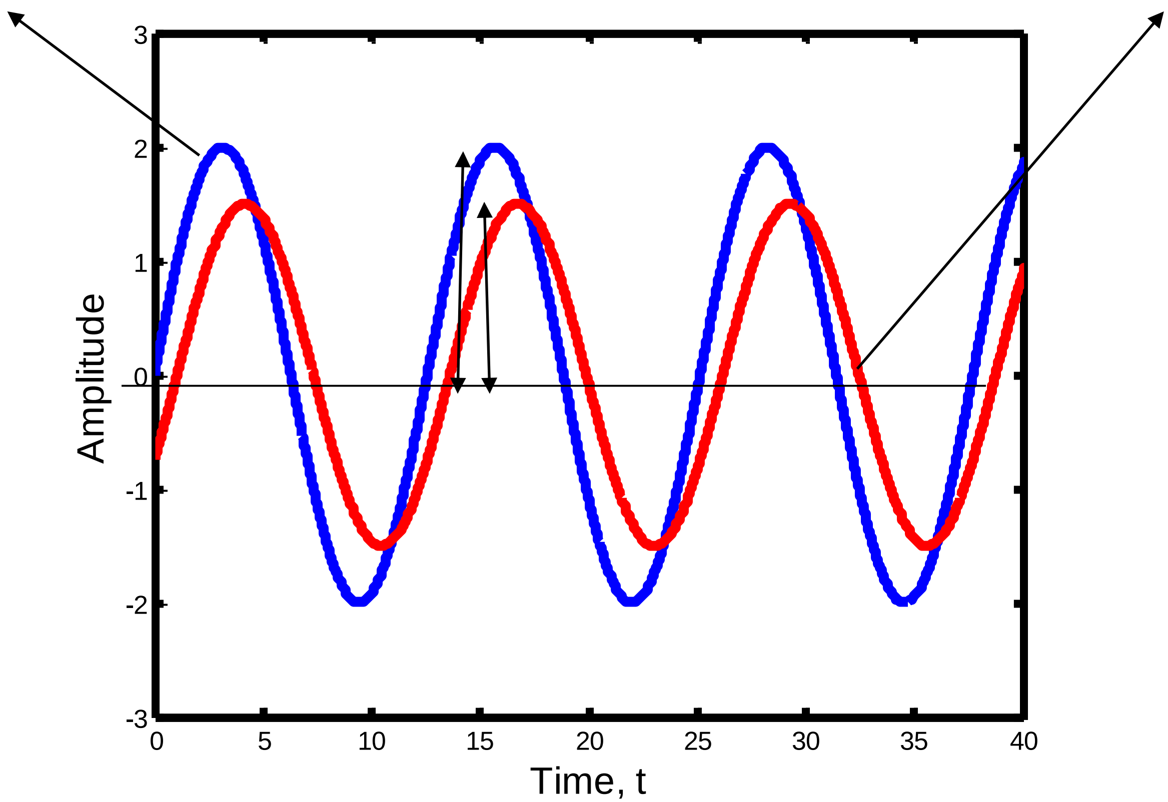
- Υπολογισμός απόκρισης συχνότητας.
- Ανάλυση συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας.
- Διάγραμμα Bode.
- Κριτήριο ευστάθειας Bode στο πεδίο της συχνότητας.
- Διάγραμμα Nyquist.
- Κριτήριο ευστάθειας Nyquist.

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Με την απόκριση συχνότητας ενός συστήματος εννοούμε την απόκριση του συστήματος σε μόνιμη κατάσταση σε μια ημιτονοειδή είσοδο.

Σήμα εισόδου $x(t)=A\sin(\omega t)$

Σήμα εξόδου $y(t)$

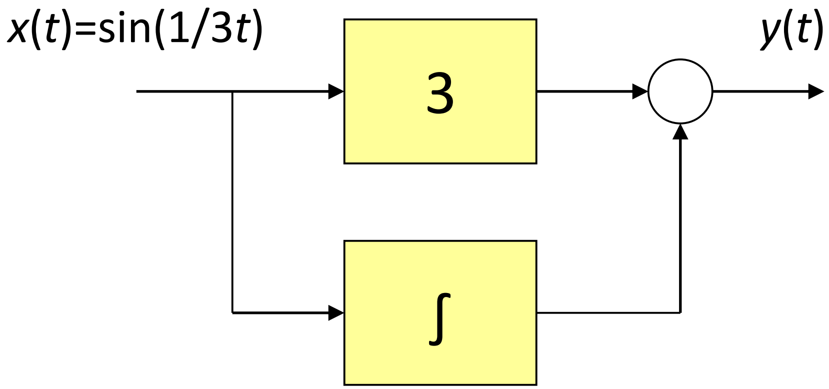


Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Θεωρείται το ακόλουθο δυναμικό σύστημα που υπόκειται σε ημιτονοειδή διέγερση.

Σήμα εισόδου
$x(t)=A\sin(\omega t)$

Σήμα εξόδου



$$
\begin{aligned}
y(t) &= 3\sin(1/3t) + \int \sin(1/3t)\,dt \\
&= 3\sin(1/3t) - 3\cos(1/3t) \\
&= \left(3^2+3^2\right)^{1/2}\sin(1/3t+\varphi) \\
&= 4.24\sin(1/3t-0.785)
\end{aligned}
$$

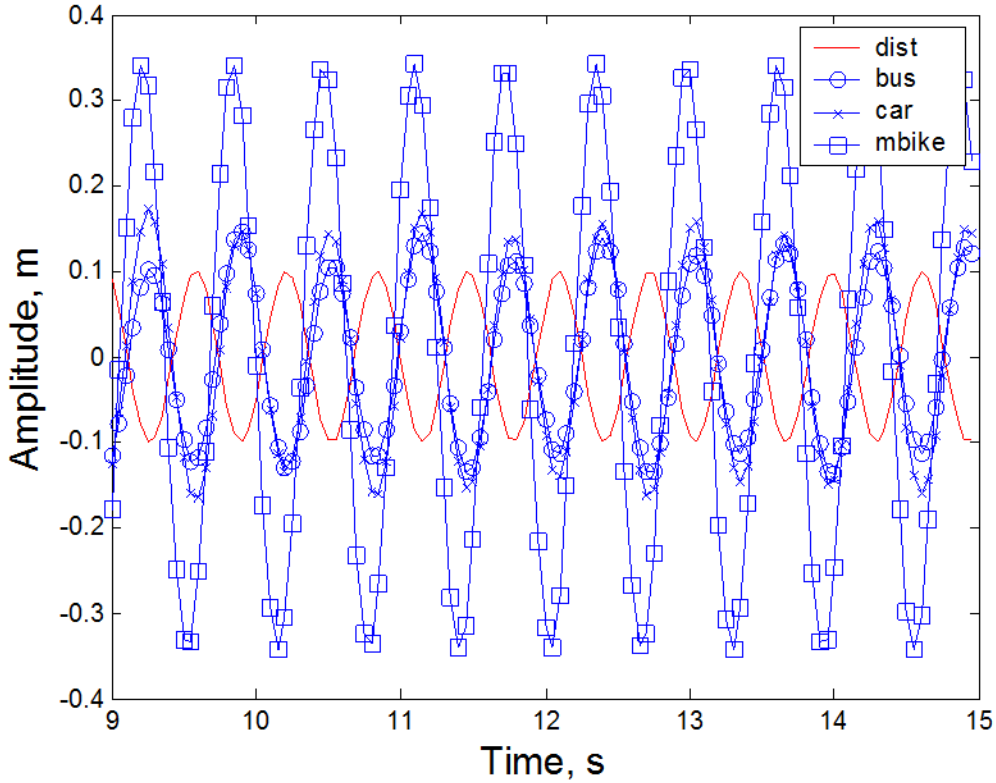
$$\varphi = \tan^{-1}(-3/3)$$

Η απόκριση του συστήματος είναι ημιτονοειδής με την ίδια συχνότητα όπως το σήμα εισόδου αλλά με διαφορετικό πλάτος ταλάντωσης και με διαφορά φάσης.

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

- Ποιο όχημα πιστεύεται ότι επηρεάζεται περισσότερο από μια ημιτονοειδή διαταραχή στο οδόστρωμα υψηλής συχνότητας; Ένα λεωφορείο, ένα αυτοκίνητο ή μια μοτοσικλέτα;
- Ποιο όχημα πιστεύετε ότι επηρεάζεται περισσότερο από μια ημιτονοειδή διαταραχή στο οδόστρωμα χαμηλής συχνότητας; Ένα λεωφορείο, ένα αυτοκίνητο ή μια μοτοσικλέτα;

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων



Διαταραχή: w=0.1sin(10t), Συχνότητα: 10 rad/s=1.59 s^{-1}

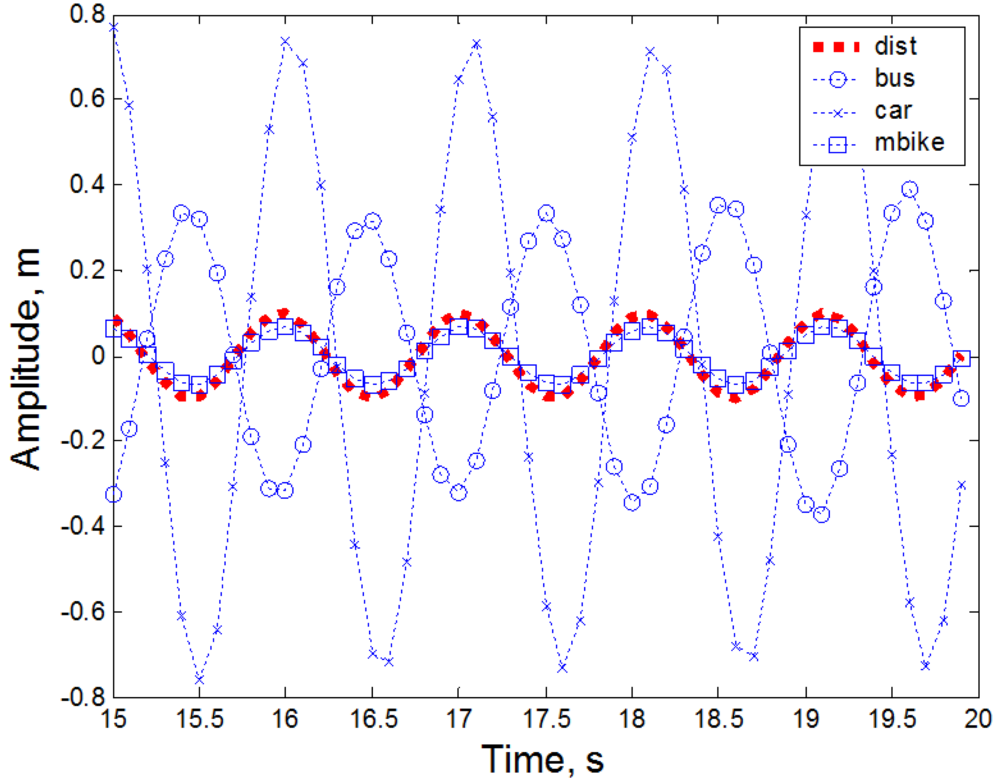
Πλάτος ταλάντωσης μετατόπισης

Λεωφορείο: 0.1 m

Αυτοκίνητο: 0.17 m

Μοτοσικλέτα: 0.35 m

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων



Διαταραχή: w=0.1sin(6t), Συχνότητα: 6 rad/s=0.955 s^{-1}

Πλάτος ταλάντωσης μετατόπισης

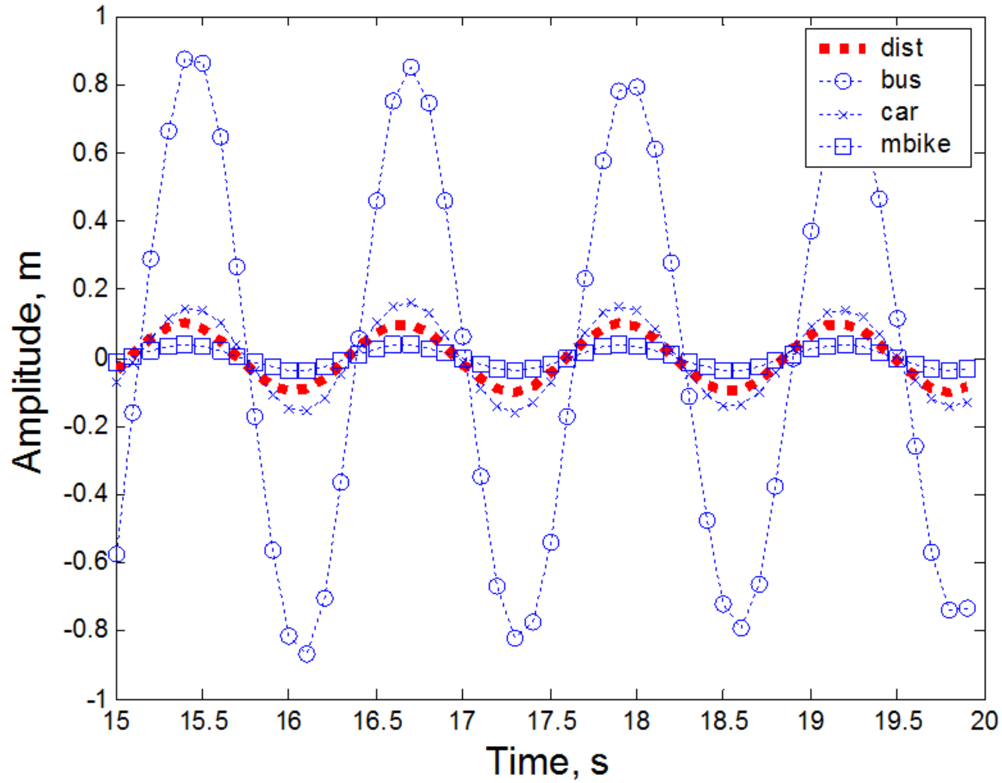
Λεωφορείο: 0.38 m

Αυτοκίνητο: 0.78 m

Μοτοσικλέτα: 0.09 m

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων



Διαταραχή: w=0.1sin(5t), Συχνότητα: 5 rad/s=0.796 s^{-1}

Πλάτος ταλάντωσης μετατόπισης

Λεωφορείο: 0.92 m

Αυτοκίνητο: 0.15 m

Μοτοσικλέτα: 0.05 m

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

$$\xrightarrow{X(s)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$

Ημιτονοειδής μεταβολή

$$G(s)=\frac{q(s)}{p(s)}=\frac{q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$x(t)=A\sin(\omega t)$$

$$X(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{q(s)}{p(s)}\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$y(t)=ae^{-j\omega t}+\bar{a}e^{j\omega t}+\underbrace{b_1e^{-p_1t}+b_2e^{-p_2t}+\ldots+b_ne^{-p_nt}}$$

Οι εκθετικοί όροι εξασθενούν με το χρόνο.

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

$$a = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(j\omega)}{2j}$$

$$\overline{a} = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}$$

Η $G(j\omega)$ γράφεται ως: $$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi}$$

Με φ το όρισμα: $$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{Im[G(j\omega)]}{Re[G(j\omega)]}\right)$$

$$a = -\frac{A|G(j\omega)|e^{j\varphi}}{2j} \qquad \overline{a} = \frac{A|G(j\omega)|e^{j\varphi}}{2j}$$

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

$$y(t \to \infty) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

$$y(t \to \infty) = A\left|G(j\omega)\right|\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} - e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}$$

$$y(t \to \infty) = A\left|G(j\omega)\right|sin(\omega t + \varphi)$$

Η απόκριση σε μόνιμη κατάσταση, κάθε ευσταθούς συστήματος που υπόκειται σε περιοδική ημιτονοειδή διέγερση με συχνότητα ω και πλάτος A, είναι ημιτονοειδής με συχνότητα ω, πλάτος $A|G(j\omega)|$ και διαφορά φάσης φ (όρισμα της $G(j\omega)$).

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Λόγος πλάτους εξόδου/εισόδου: $\left|G(j\omega)\right| = \left|\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|$

Μετακίνηση φάσης του ημιτονοειδούς σήματος εξόδου ως προς το ημιτονοειδές σχήμα εισόδου.

$$\angle G(j\omega) = \angle\left(\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right)$$

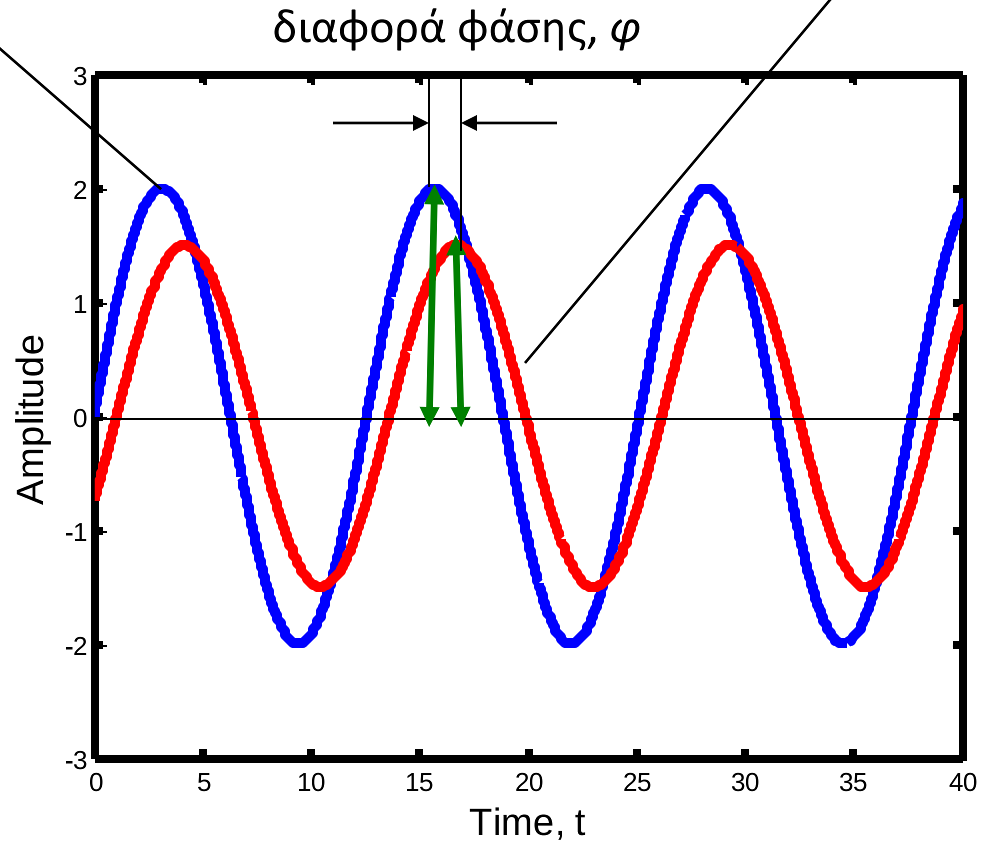
Επομένως η απόκριση συχνότητας δίνεται από:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

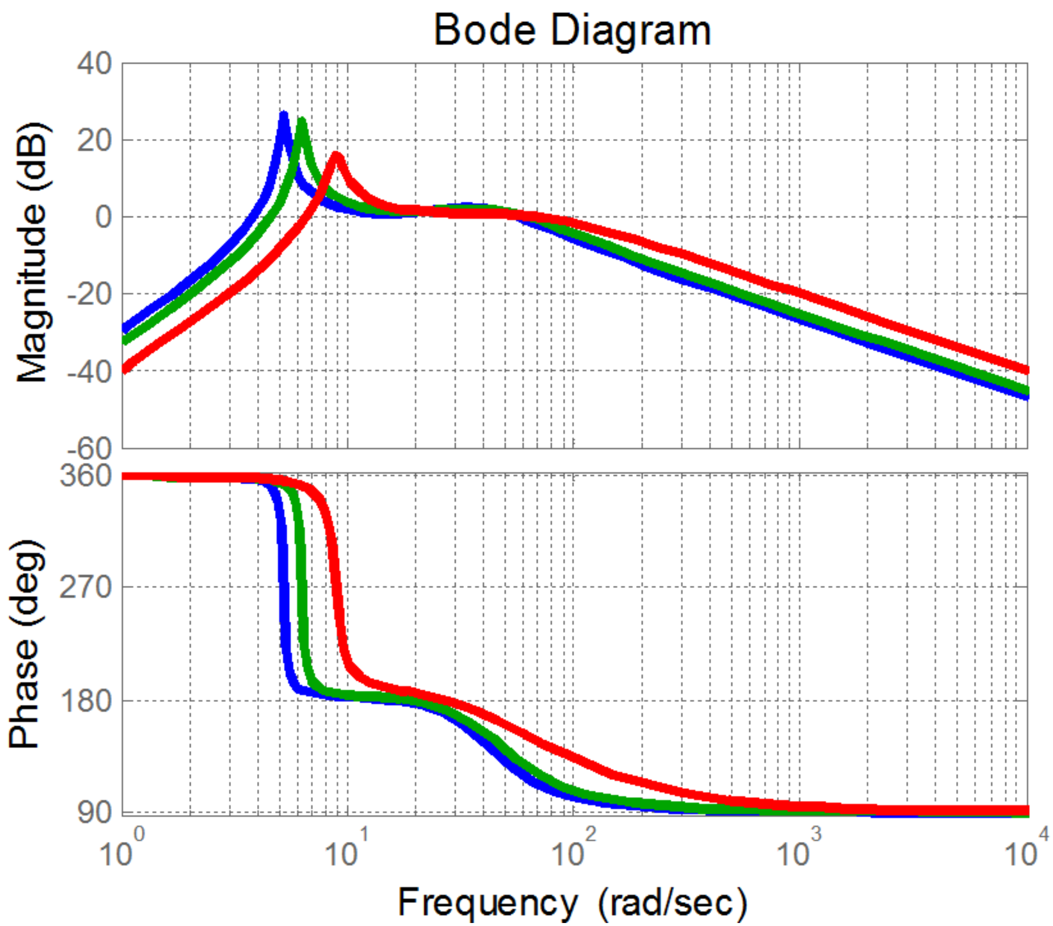
Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Σήμα εισόδου
$x(t)=A\sin(\omega t)$

Σήμα εξόδου
$y(t)=A|G(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi)$



Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων



Λεωφορείο: συχνότητα συντονισμού ~5 rad/s

Αυτοκίνητο: συχνότητα συντονισμού ~6 rad/s

Μοτοσυκλέτα: συχνότητα συντονισμού ~9 rad/s

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Σύστημα 1ης τάξης

Να υπολογισθεί η απόκριση σε μόνιμη κατάσταση σε ημιτονοειδή είσοδο $x(t)=A\sin(\omega t)$.

$$G(s)=\frac{K}{\tau s+1}$$

Βήμα 1ο: Αντικατάσταση $s=j\omega$.

$$G(j\omega)=\frac{K}{\tau j\omega+1}$$

Βήμα 2ο: Φέρουμε την $G(j\omega)$ στη μορφή $Re+j\,Im$.

$$G(j\omega)=\frac{K}{\tau j\omega+1}\frac{(-\tau j\omega+1)}{(-\tau j\omega+1)}=\frac{K(1-\tau\omega j)}{1+(\tau\omega)^2}=\frac{K}{1+(\tau\omega)^2}+j\frac{-K\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}$$

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Βήμα 3ο: Υπολογίζουμε το μέτρο και το όρισμα της G(jω).

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \qquad \varphi = \angle G(j\omega) = -tan^{-1}(\tau\omega)$$

Συνεπώς η απόκριση του συστήματος σε μόνιμη κατάσταση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y(t\to\infty) = \frac{AK}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} sin\left(\omega t - tan^{-1}(\tau\omega)\right)$$

Διαγράμματα Bode

Η γραφική απεικόνιση της απόκρισης συχνότητας γίνεται με τη βοήθεια του **διαγράμματος Bode**.

Το διάγραμμα Bode δείχνει τη μεταβολή του λόγου πλάτους, *AR* (amplitude ratio), και της διαφοράς φάσης, *φ*, με τη συχνότητα του σήματος εισόδου, *ω*.

Σύστημα 1ης τάξης.

$$AR = \frac{AK}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \Big/ A = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

$$\varphi = -tan^{-1}(\tau\omega)$$

Διαγράμματα Bode

$$AR = \frac{AK}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \Big/ A = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

$$\varphi = -tan^{-1}(\tau\omega)$$

Ασυμπτωτική συμπεριφορά συστήματος 1ης τάξης:

ω<<1/τ ($\omega \rightarrow 0$)	$AR \rightarrow K$	$\varphi \rightarrow 0^o$
ω>>1/τ ($\omega \rightarrow +\infty$)	$AR \rightarrow 0$	$\varphi \rightarrow -90^o$
ω=1/τ	$AR = K/\sqrt{2}$	φ=-45^o

Κλίση ασύμπτωτου χαμηλής συχνότητας για ω<<1/$\tau \rightarrow$ 0.

$$log(AR) = log(K) - log\left(\sqrt{1+\tau^2\omega^2}\right) \cong log(K) - log(1)$$

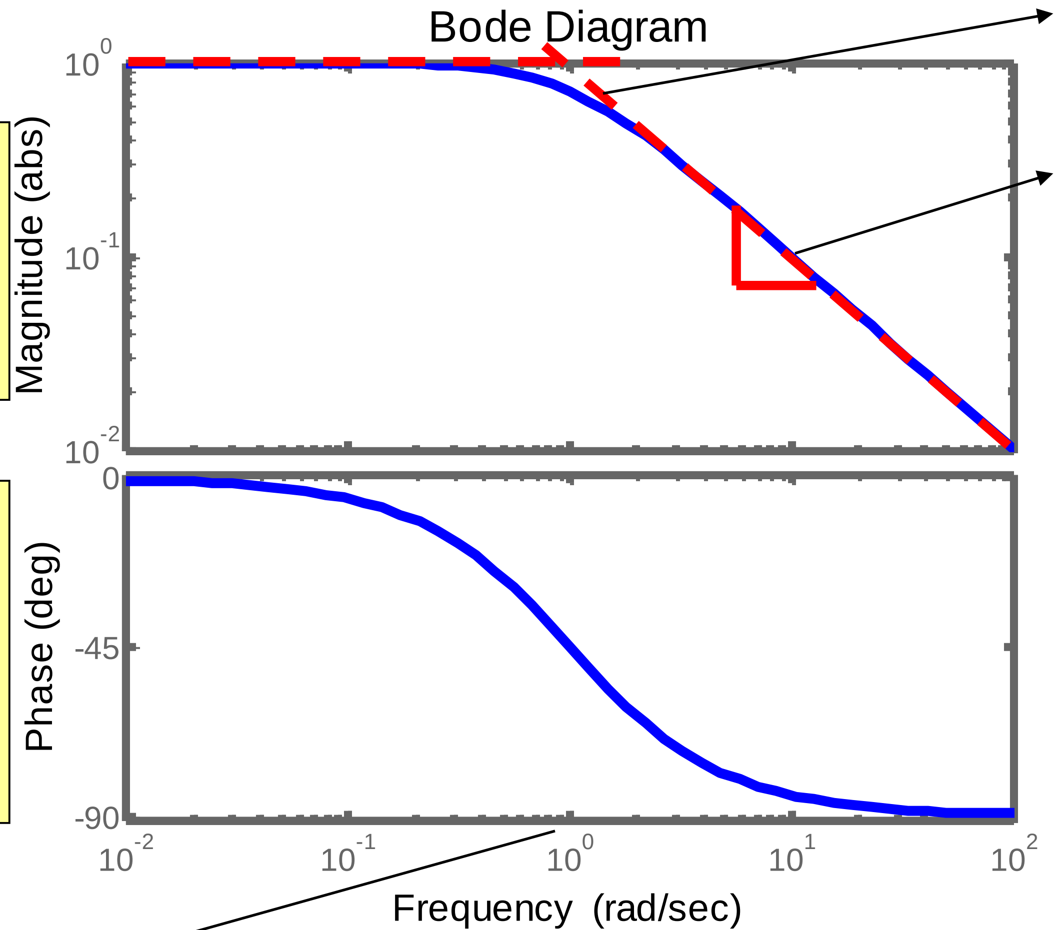
Κλίση ασύμπτωτου υψηλής συχνότητας για ω>>1/$\tau \rightarrow +\infty$.

$$log(AR) = log(K) - log\left(\sqrt{1+\tau^2\omega^2}\right) \cong log(K) - log(\omega)$$

Διαγράμματα Bode

Διάγραμμα Bode λόγου πλάτους. Γράφημα log(*AR*) ως προς log(ω).

Διάγραμμα Bode φάσης. Γράφημα γωνίας φάσης, φ, ως προς log(ω) .



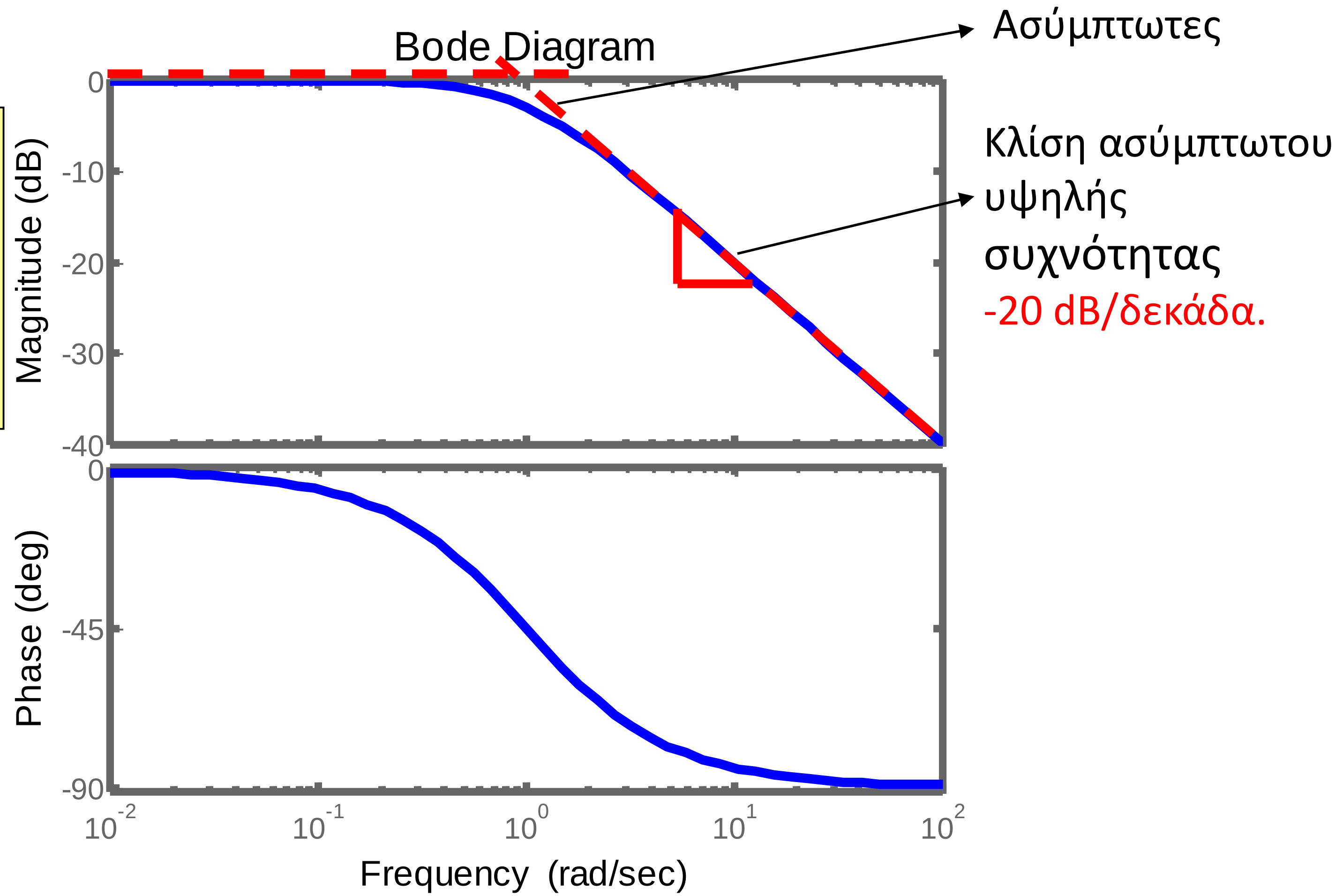
Ασύμπτωτες

Κλίση ασύμπτωτου υψηλής συχνότητας, **-1.**

$\omega=1/\tau$, κρίσιμη συχνότητα συστήματος.

Διαγράμματα Bode

Διάγραμμα Bode λόγου πλάτους. Γράφημα 20log(*AR*) ως προς log(*ω*).



Εναλλακτικά το διάγραμμα λόγου πλάτους εκφράζεται σε 20*log*(*AR*) [*dB*].

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Σύστημα 2ης τάξης

Να κατασκευασθεί το διάγραμμα Bode της $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ με ζ<1.

Βήμα 1ο: Αντικατάσταση $s=j\omega$.

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$$

Βήμα 2ο, 3ο: Υπολογισμός μέτρου και ορίσματος $G(j\omega)$.

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

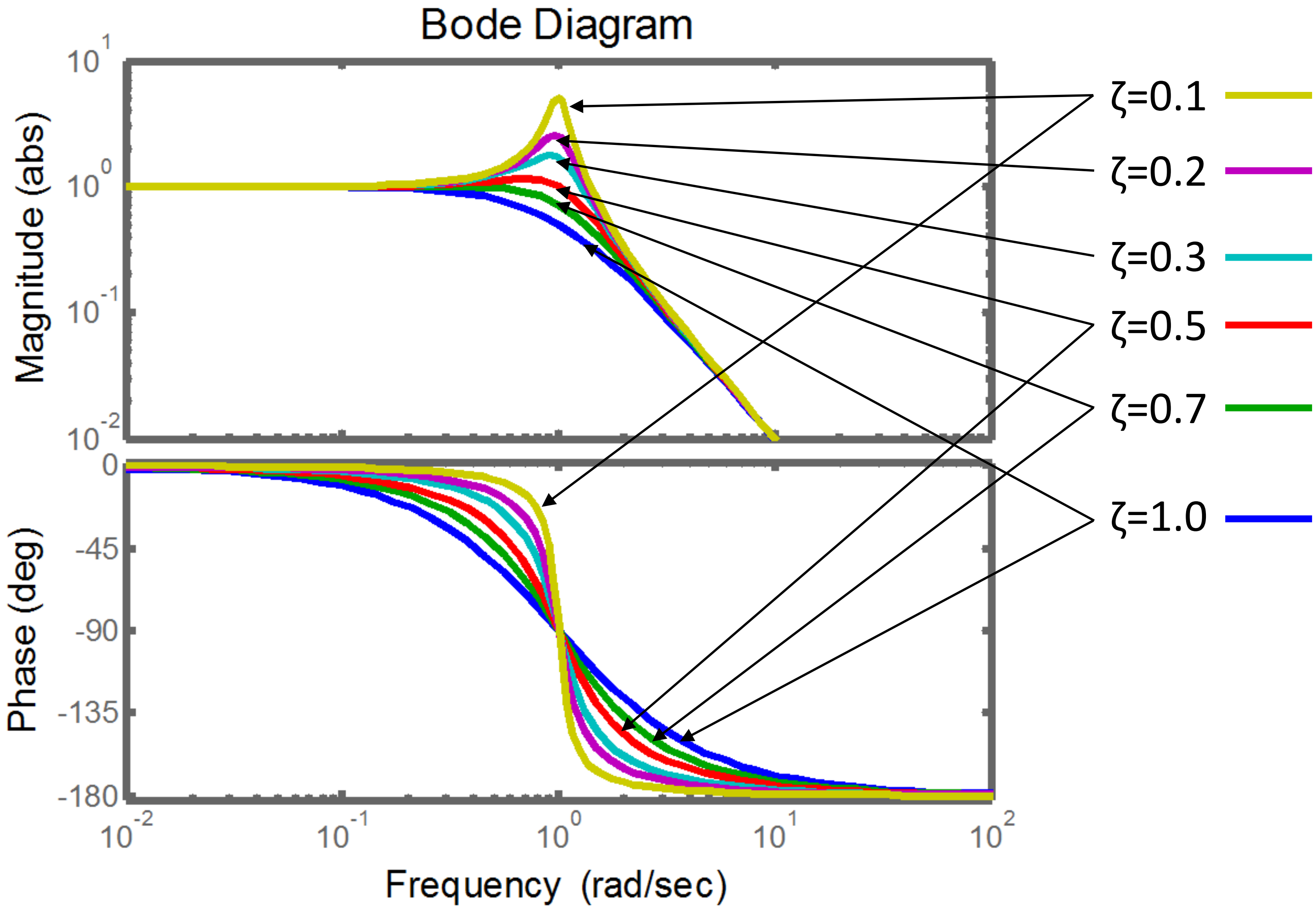
Μέτρο της $G(j\omega)$, για $0<\zeta<1$.

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{\omega_n}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Όρισμα της $G(j\omega)$, για $0<\zeta<1$.

$$\angle G(j\omega) = -tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων



Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Συχνότητα συντονισμού

$$\boxed{\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}}$$

Μέγιστο μέτρου G(jω), για 0<ζ<0.707

$$\boxed{\left|G(\omega_r)\right| = \left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)^{-1}}$$

Απόκριση συχνότητας στο Matlab

```
kp=1.0; taup=5.0;

wstart=0.001; wend=100; wtimes=800;
w=logspace(log10(wstart),log10(wend),wtimes);
s=j*w;
G=kp./(taup*s+1);
AR=abs(G);
phi=180*angle(G)/pi;
figure(1)
subplot(2,1,1), loglog(w,AR)
xlabel('frequency, rad/time')
ylabel('amplitude ratio')
subplot(2,1,2), semilogx(w,unwrap(phi))
xlabel('frequency, rad/time')
ylabel('phase angle, deg')
```

Ερμηνεία απόκρισης συχνότητας

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

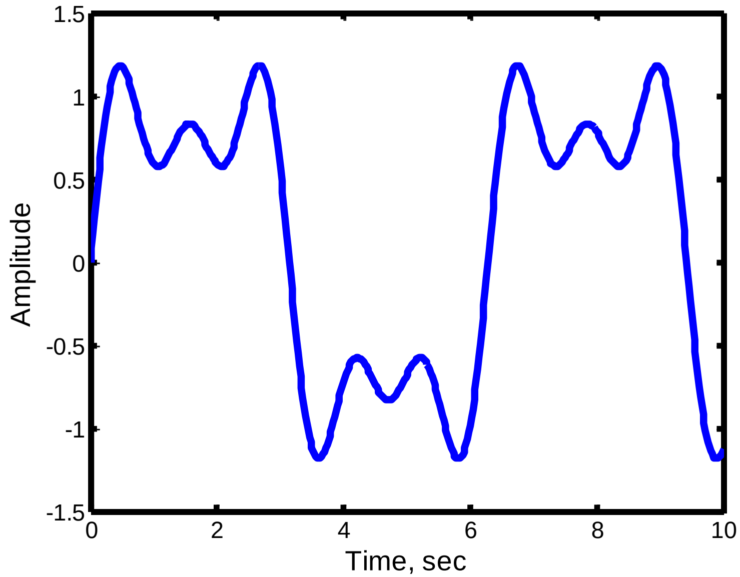
$$G_2(s) = \frac{1}{5s+1}$$

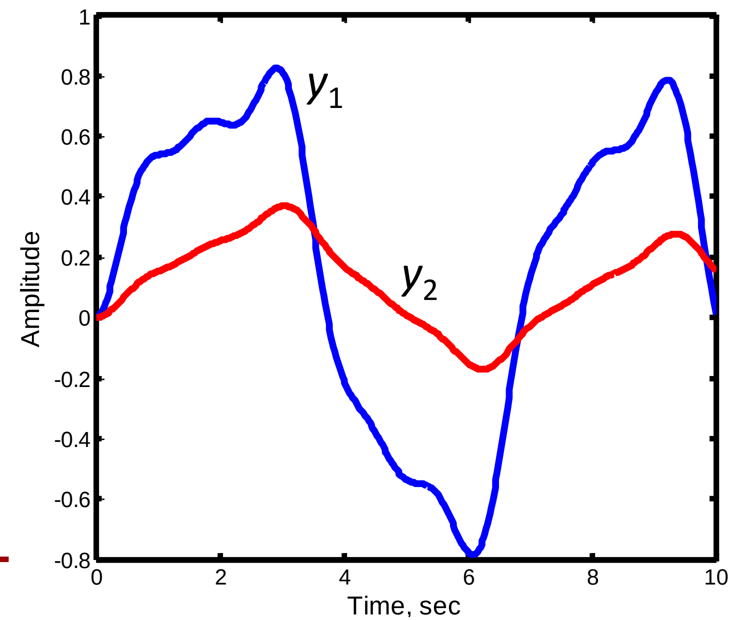
Δυο συστήματα υποβάλλονται σε ένα σήμα εισόδου (σειρά από βηματικές μεταβολές με κάποια περιοδικότητα).

Η συνάρτηση G_2 είναι πιο αργή από την G_1.

Κάθε σήμα μπορεί να εκφρασθεί σαν άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων διαφορετικής συχνότητας (μετασχηματισμός Fourier).

$$u = \sum a(\omega) sin(\omega t)$$

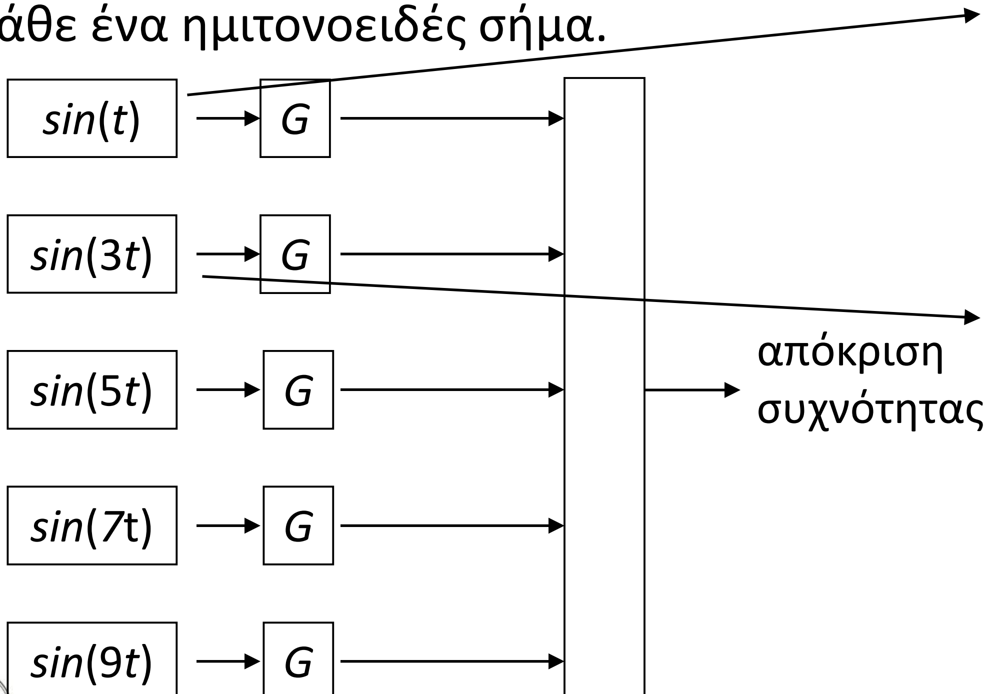


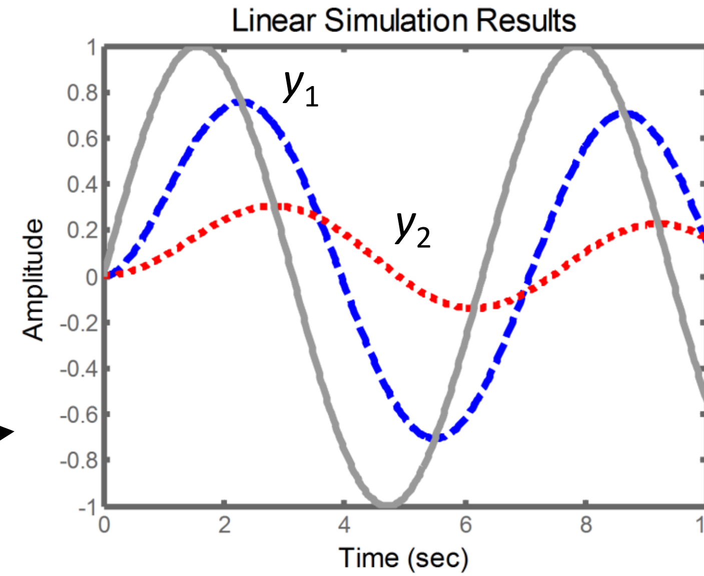


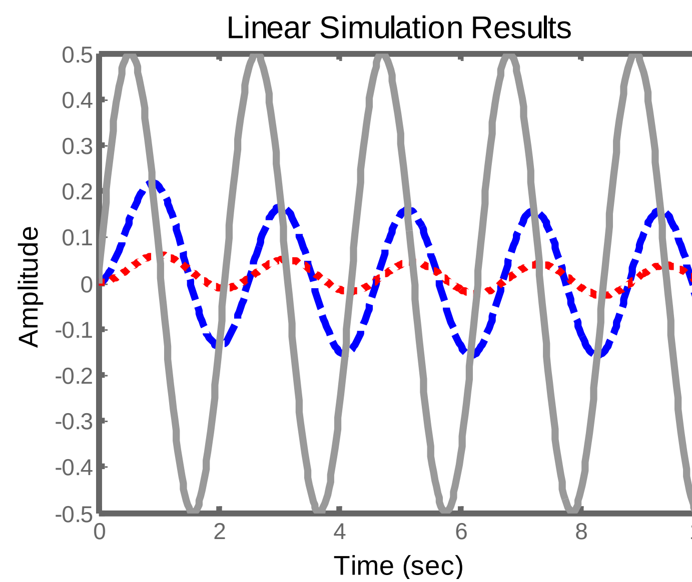
Ερμηνεία απόκρισης συχνότητας

Το ισοδύναμο του σήματος εισόδου ορίζεται με τη μορφή
$u(t)=\sin(t)+1/3\sin(3t)+1/5\sin(5t)+\ldots$

Η απόκριση συχνότητας υπολογίζεται από την υπέρθεση των αποκρίσεων για κάθε ένα ημιτονοειδές σήμα.







Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

$$G(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Με μηδενικά z_1, z_2, …, z_m και πόλους p_1, p_2, … , p_n.

Γενικευμένη περίπτωση

$$\left|G(j\omega)\right| = K\frac{\left|j\omega-z_1\right|\left|j\omega-z_2\right|\cdots\left|j\omega-z_m\right|}{\left|j\omega-p_1\right|\left|j\omega-p_2\right|\cdots\left|j\omega-p_n\right|}$$

$$\begin{aligned}\arg\left[G(j\omega)\right] = {} & \arg(j\omega-z_1)+\arg(j\omega-z_2)+\cdots\arg(j\omega-z_2) \\ & -\arg(j\omega-p_1)-\arg(j\omega-p_2)-\cdots-\arg(j\omega-p_n)\end{aligned}$$

Κανόνες κατασκευής διαγράμματος Bode

- Παραγοντοποίηση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή.
- Υπολογισμός κρίσιμων συχνοτήτων (ριζών) για κάθε επιμέρους όρο.
- Υπολογισμός κλίσης ασυμπτώτου για ω→∞.

  (-1) (βαθμός παρονομαστή-βαθμός αριθμητή)
- Υπολογισμός γωνίας φάσης για ω→∞.

  (-90) (βαθμός παρονομαστή+μηδενικά ΔΗΕ-μηδενικά ΑΗΕ)
- Χρήση κριτηρίου μέτρου και φάσης για υπολογισμό ενδιάμεσων σημείων.

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Σταθερά κέρδους.

$$G(s) = K$$

$$G(j\omega) = K$$

$$\left|G(j\omega)\right| = K$$
$$\angle G(j\omega) = 0$$

Ποια η φυσική σημασία του αποτελέσματος;

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

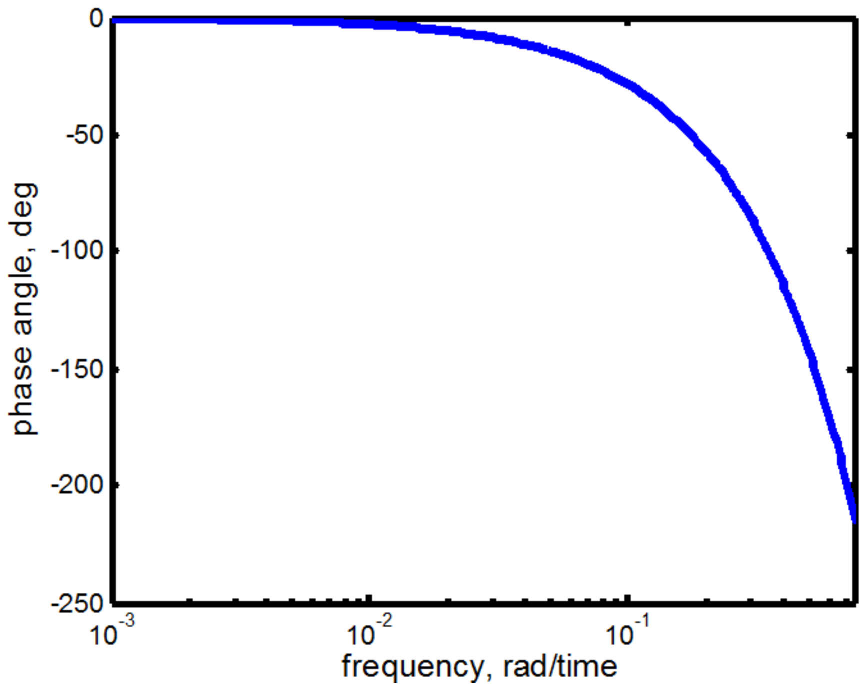
Παράδειγμα: Καθυστέρηση χρόνου.

$$G(s) = e^{-\vartheta s}$$

$$G(j\omega) = e^{-\vartheta j\omega}$$

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\vartheta\omega$$



Τι προκαλεί η καθυστέρηση χρόνου στο σύστημα;

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Δικτύωμα καθυστέρησης φάσης.

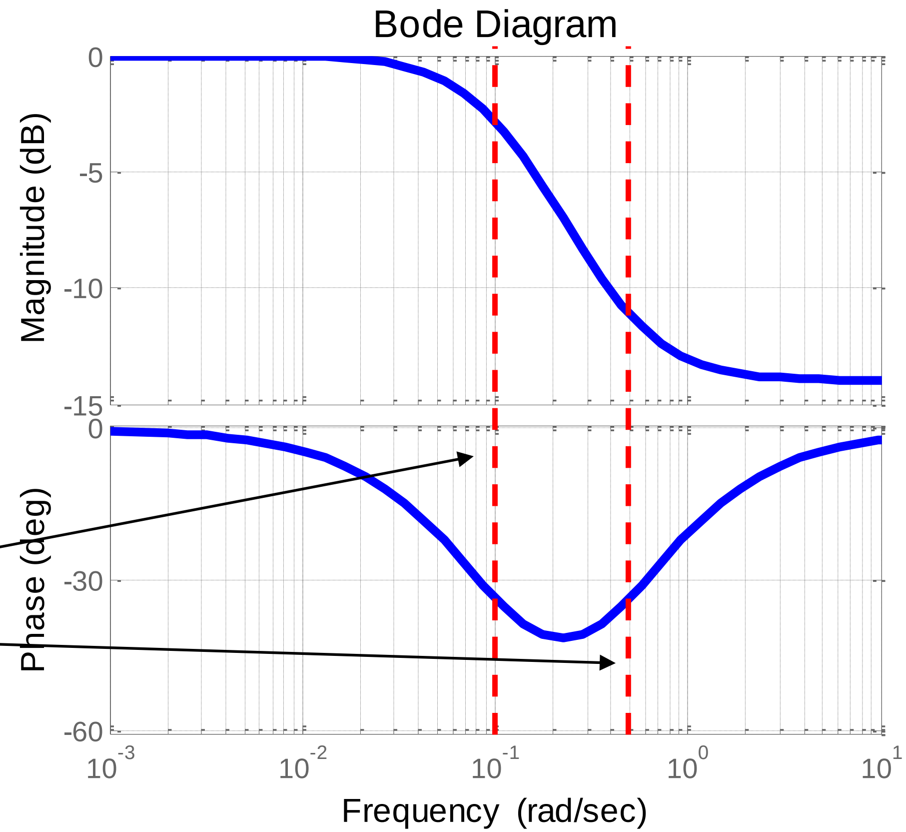
$$G(s)=\frac{(\tau_1 s+1)}{(\tau_2 s+1)},\quad \tau_2>\tau_1$$

$$|G(j\omega)|=\frac{\sqrt{(\tau_1\omega)^2+1}}{\sqrt{(\tau_2\omega)^2+1}}$$

$$\angle|G(j\omega)|=tan^{-1}(\tau_1\omega)-tan^{-1}(\tau_2\omega)$$

τ_2=10 *s*, $\omega_2=1/\tau_2=0.1$ rad/s

τ_1=2 *s*, $\omega_1=1/\tau_1=0.5$ rad/s



Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Δικτύωμα προήγησης φάσης.

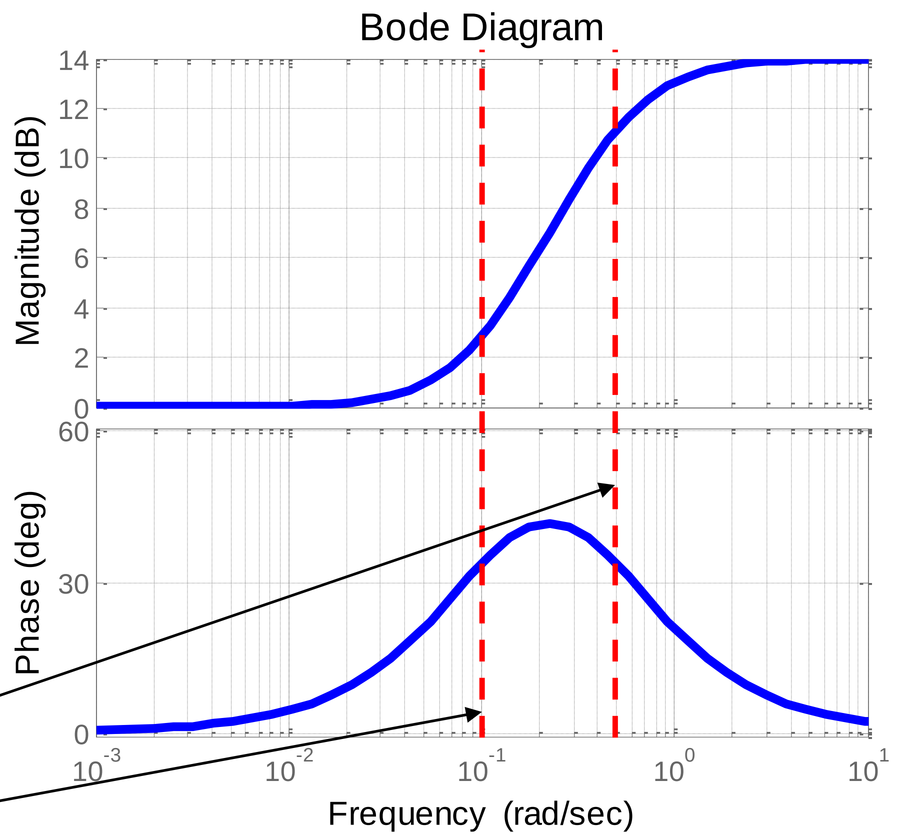
$$G(s)=\frac{(\tau_1 s+1)}{(\tau_2 s+1)}, \quad \tau_2<\tau_1$$

$$|G(j\omega)|=\frac{|\tau_1\omega j+1|}{|\tau_2\omega j+1|}$$

$$\angle|G(j\omega)|=\angle(\tau_1\omega j+1)-\angle(\tau_2\omega j+1)$$

$$|G(j\omega)|=\frac{\sqrt{(\tau_1\omega)^2+1}}{\sqrt{(\tau_2\omega)^2+1}}$$

$$\angle|G(j\omega)|=tan^{-1}(\tau_1\omega)-tan^{-1}(\tau_2\omega)$$



$\tau_2=2\ s$, $\omega_2=1/\tau_2=0.5$ rad/s

$\tau_1=10\ s$, $\omega_1=1/\tau_1=0.1$ rad/s

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

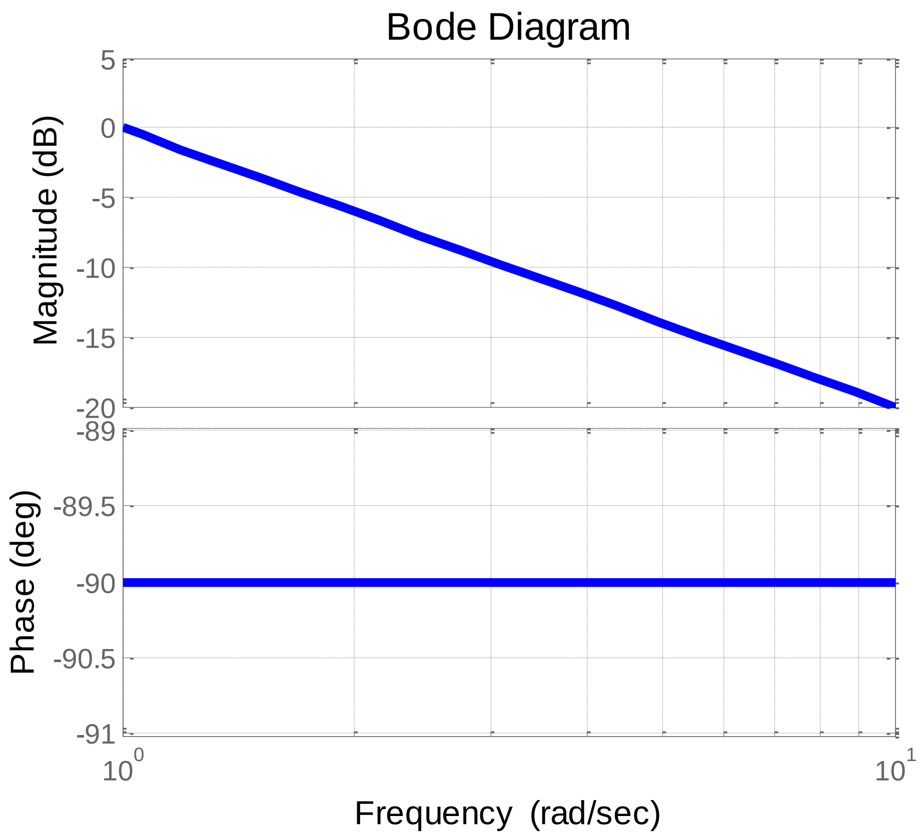
Παράδειγμα: Ολοκληρωτής.

$$G(s)=\frac{1}{s}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\frac{-j\omega}{-j\omega}=-\frac{j}{\omega}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=1/\omega$$

$$\angle G(j\omega)=tan^{-1}(-1/\omega/0)=-90^{o}$$



Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Μηδενικό στο δεξί ημι-επίπεδο.

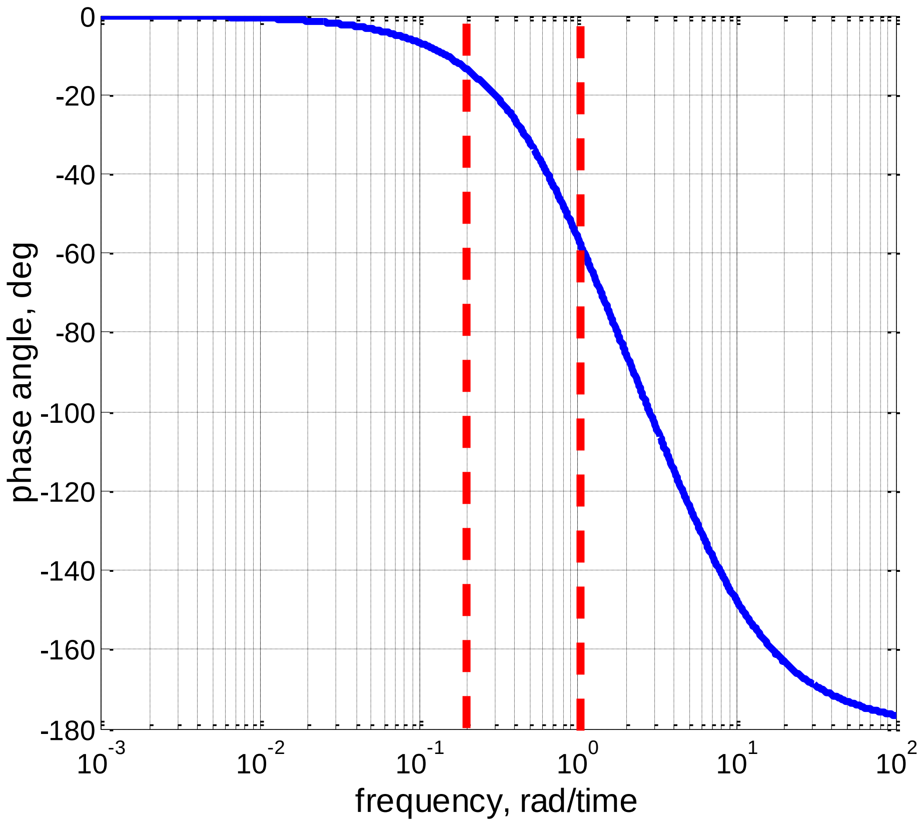
$$G(s)=\frac{(s-1)}{(s+5)}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{\left|\omega j-1\right|}{\left|\omega j+5\right|}$$

$$\angle\left|G(j\omega)\right|=\angle(\omega j-1)-\angle(\omega j+5)$$

$$\left|G(j\omega)\right|=0.2\frac{\sqrt{(\omega)^2+1}}{\sqrt{(0.2\omega)^2+1}}$$

$$\angle\left|G(j\omega)\right|=tan^{-1}(-\omega)-tan^{-1}(0.2\omega)$$



Καθυστέρηση φάσης
από το μηδενικό στο ΔΗΕ.
Σύστημα μη-ελάχιστης φάσης
(non-minimum phase).

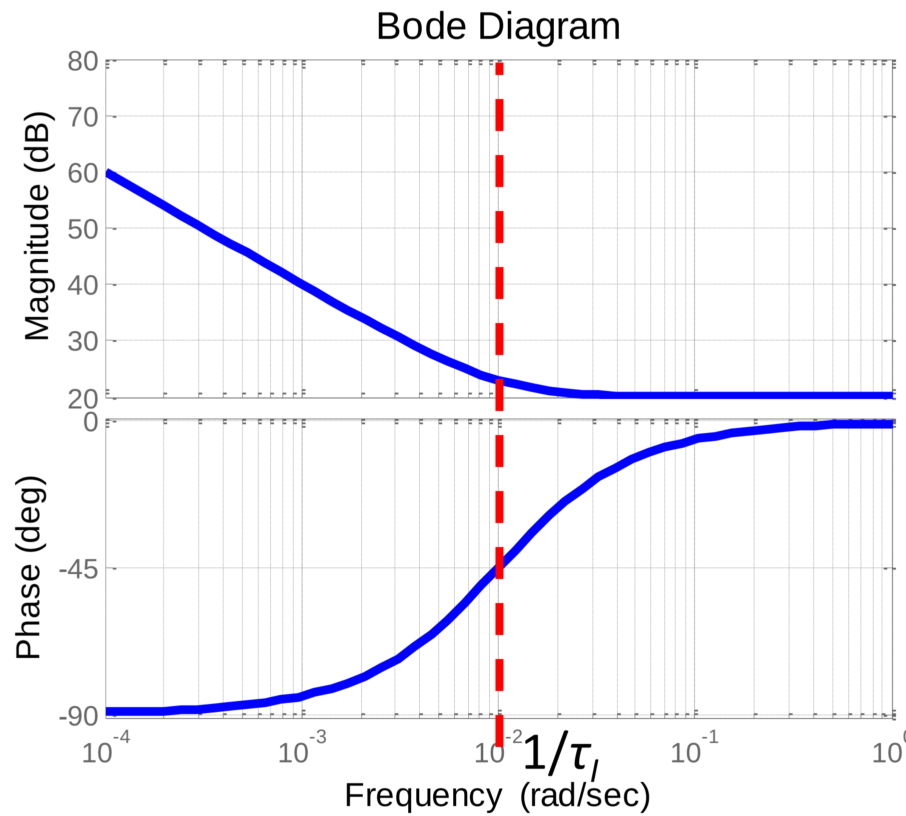
Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Ελεγκτής PI.

$$G(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

$$\left|G(j\omega)\right| = K_c\sqrt{\frac{1}{(\omega\tau_I)^2} + 1}$$

$$\angle\left|G(j\omega)\right| = tan^{-1}\left(-1/\omega\tau_I\right)$$



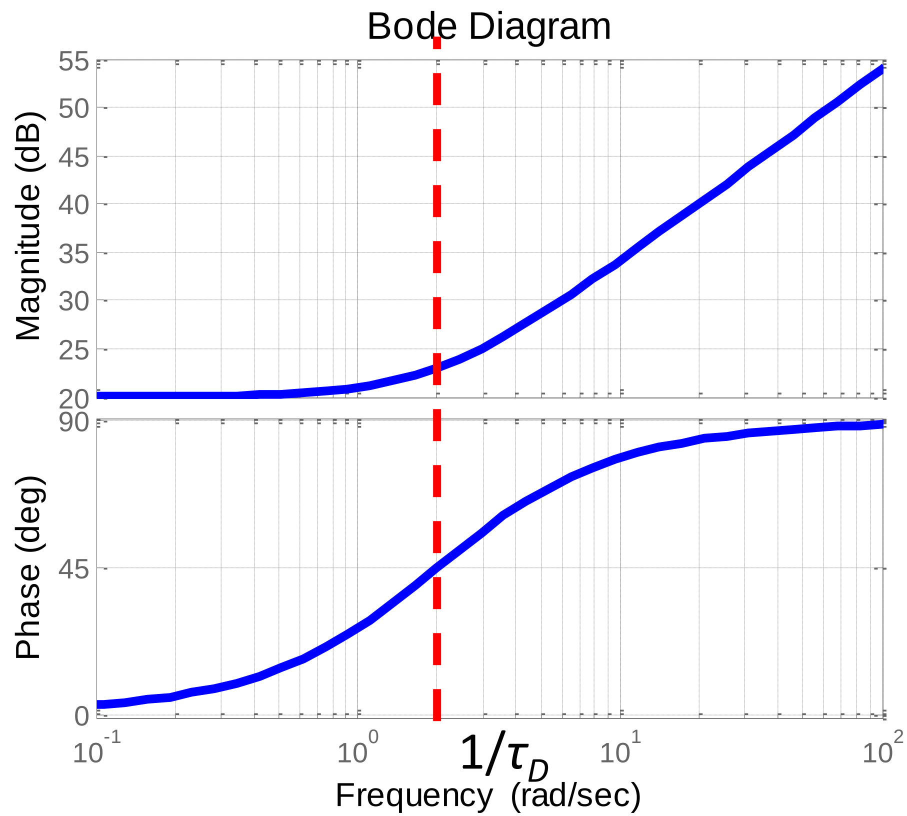
Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Ελεγκτής PD.

$$G(s)=K_c\left(1+\tau_D s\right)$$

$$\left|G(j\omega)\right|=K_c\sqrt{\left(\omega\tau_D\right)^2+1}$$

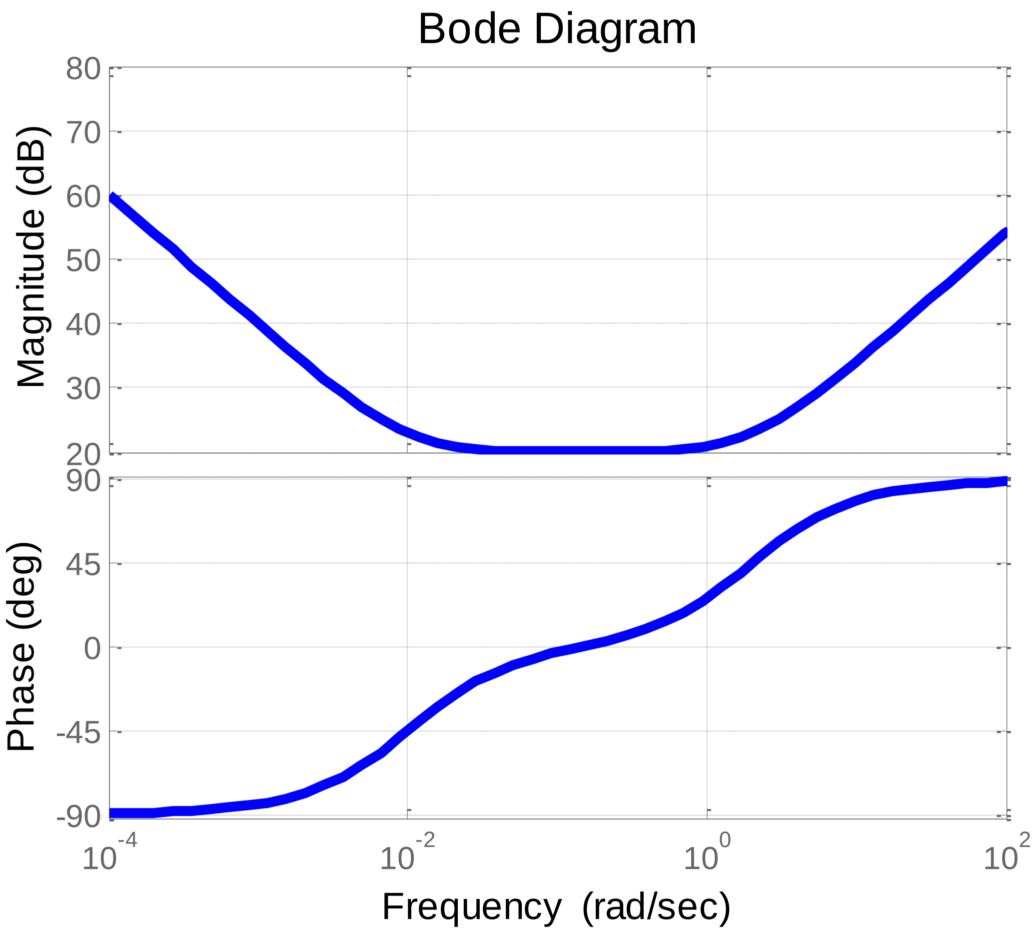
$$\angle\left|G(j\omega)\right|=tan^{-1}\left(\omega\tau_D\right)$$



Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Ελεγκτής PID.

$$G(s) = K_c\left(\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1\right) / \tau_I s$$



Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Παράδειγμα: Διάγραμμα Bode για σύνθετο σύστημα.

$$G(s)=\frac{5(0.1s+1)}{s(0.5s+1)\left[(1/50)^2 s^2+1.2/50\,s+1\right]}$$

Ασυμπτωτική συμπεριφορά:

Κλίση λόγου πλάτους για $\omega \rightarrow \infty$: -1, -1, -2, +1 = -3

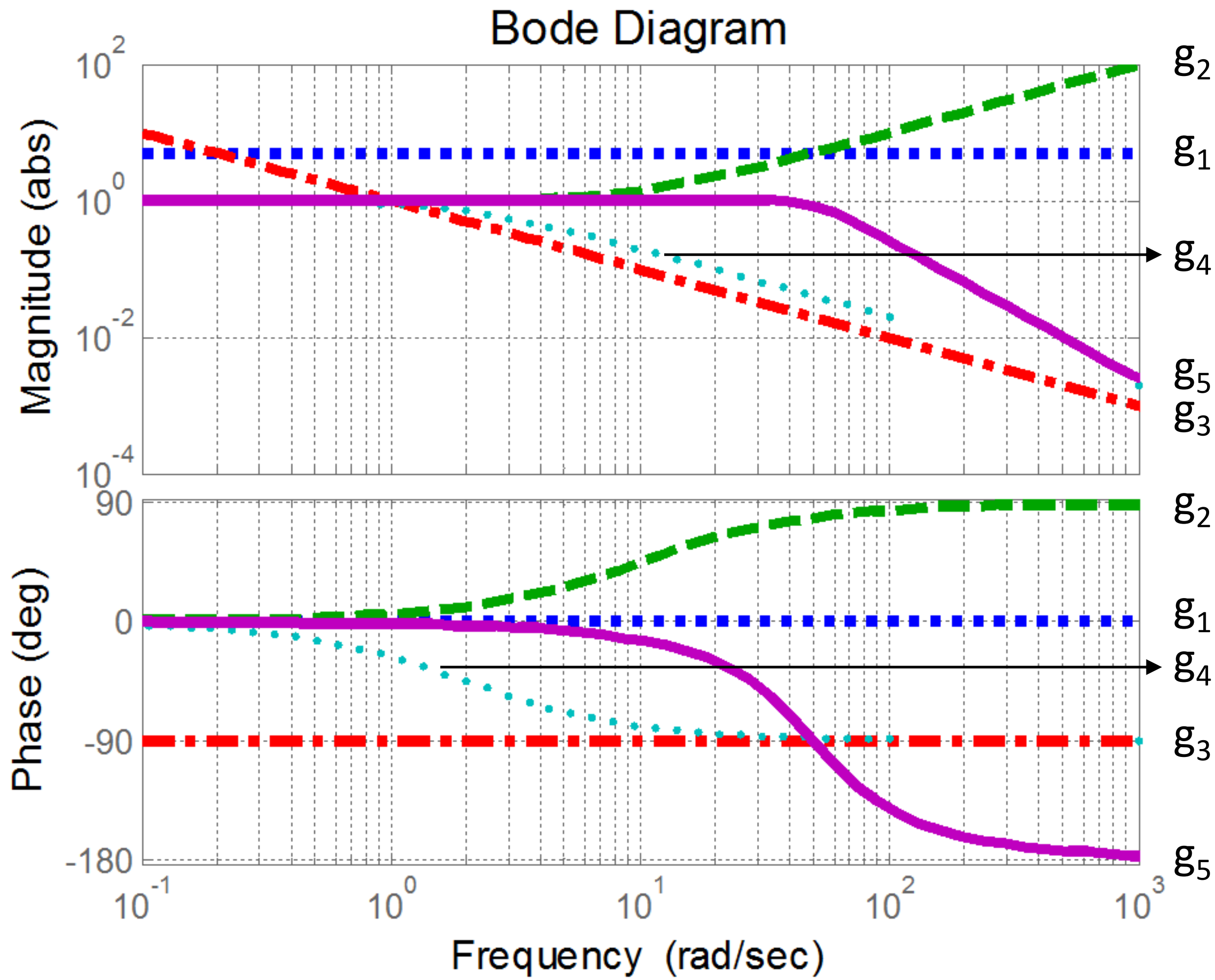
Γωνία φάσης για $\omega \rightarrow \infty$: -90°, -90°, -180°, +90°, -270°

Κρίσιμες συχνότητες: ω=2, ω=10 rad/s

$$g_1(s)=5 \quad g_2(s)=(0.1s+1) \quad g_3(s)=\frac{1}{s}$$

$$g_4(s)=\frac{1}{0.5s+1} \quad g_5(s)=\frac{1}{(1/50)^2 s^2+1.2/50\,s+1}$$

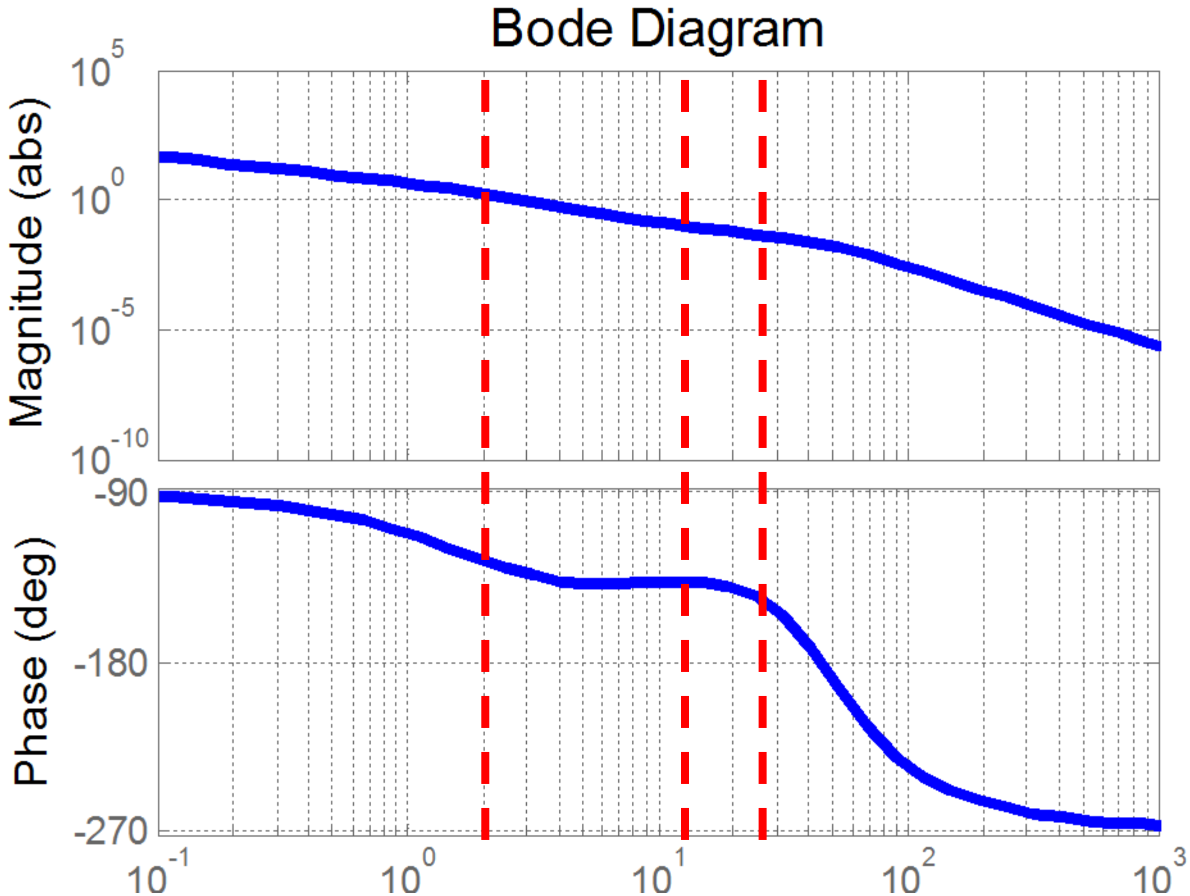
Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων



$$G(s) = \frac{5(0.1s+1)}{s(0.5s+1)\left[(1/50)^2 s^2 + 1.2/50\, s + 1\right]}$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

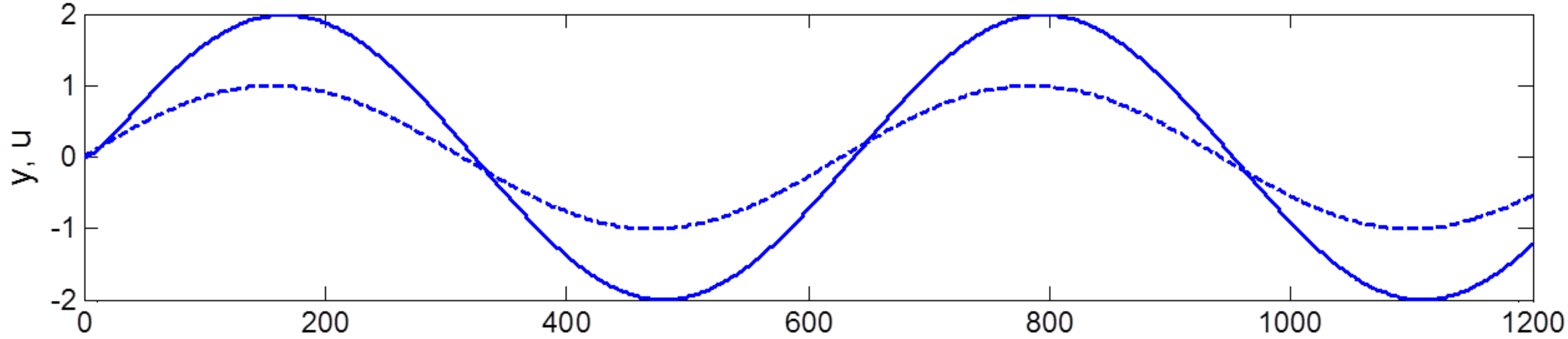


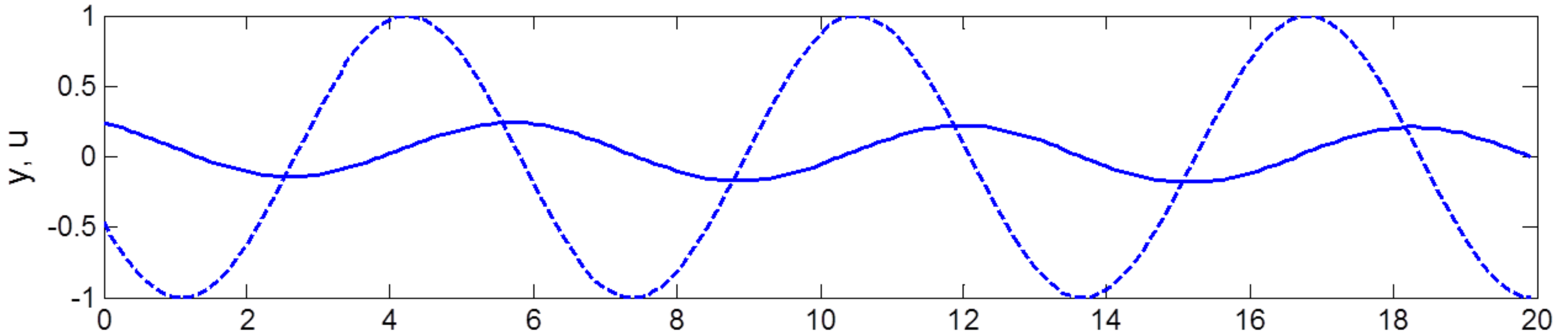
$$G(s)=\frac{5(0.1s+1)}{s(0.5s+1)\left[(1/50)^2 s^2+1.2/50\,s+1\right]}$$

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Άσκηση: Να εκτιμηθεί η συνάρτηση μεταφοράς 1ης τάξης από τα ακόλουθα πειραματικά δεδομένα.

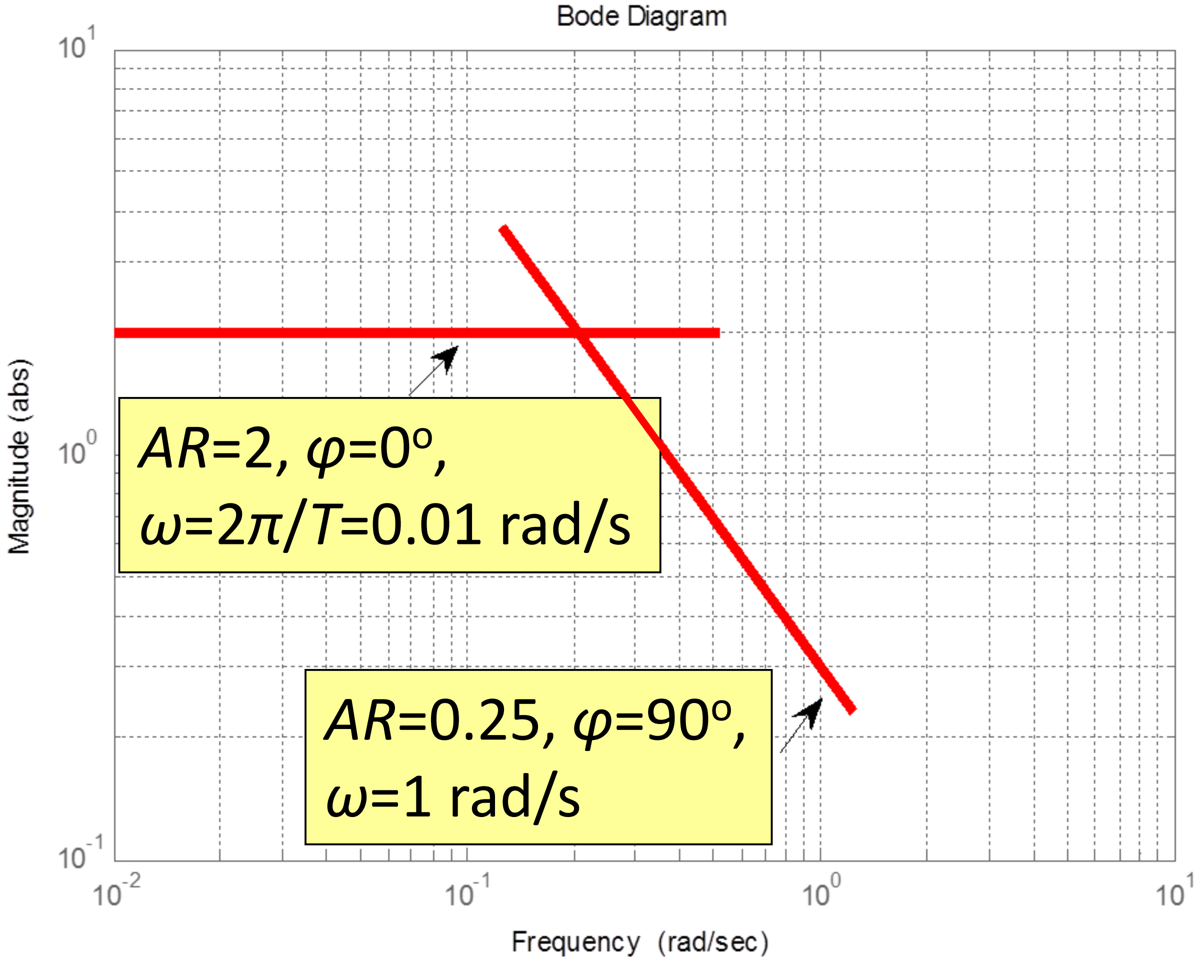
$AR=2$, $\varphi=0^{o}$, $\omega=2\pi/T=0.01$ rad/s





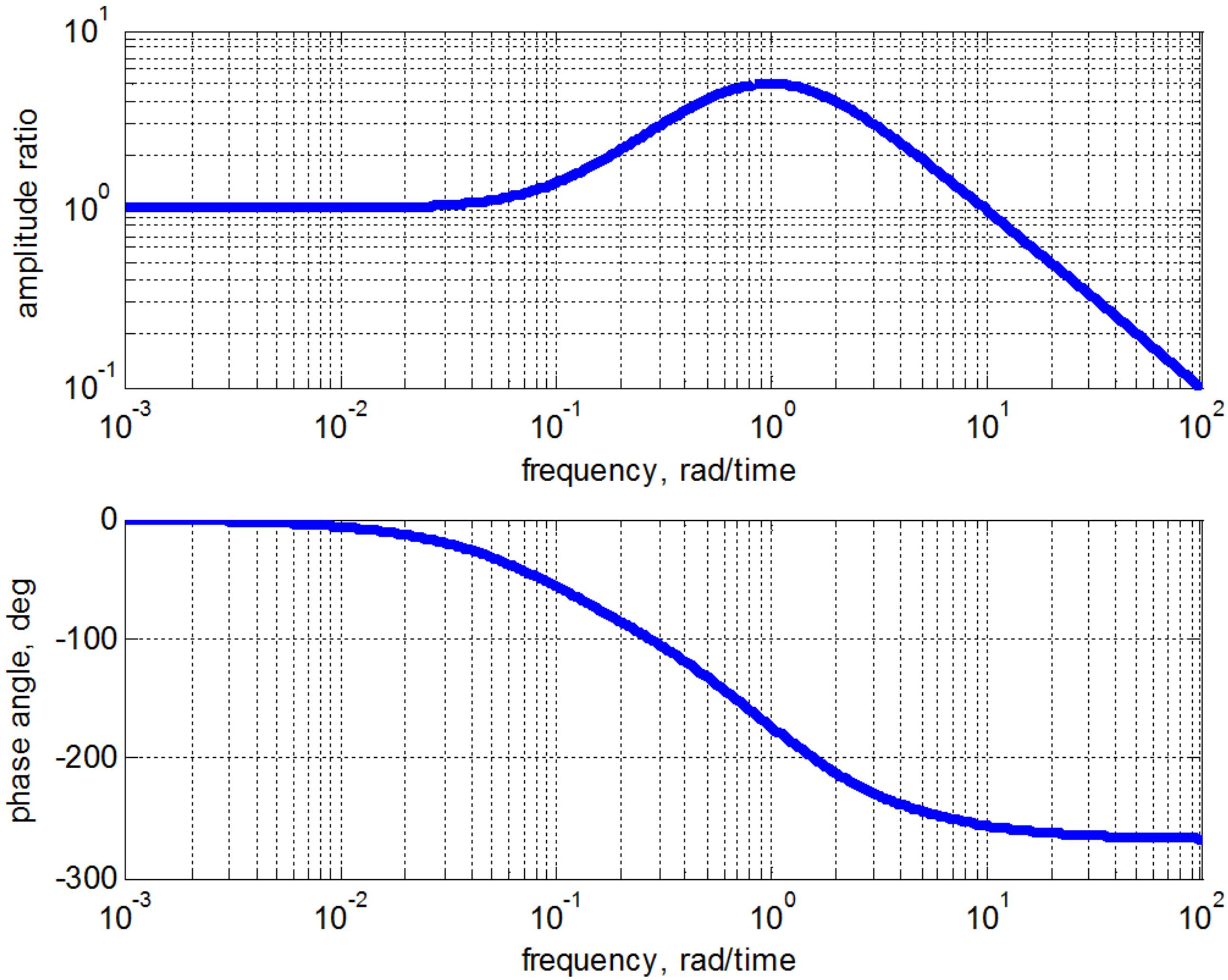
$AR=0.25$, $\varphi=90^{o}$, $\omega=1$ rad/s

Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων



Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

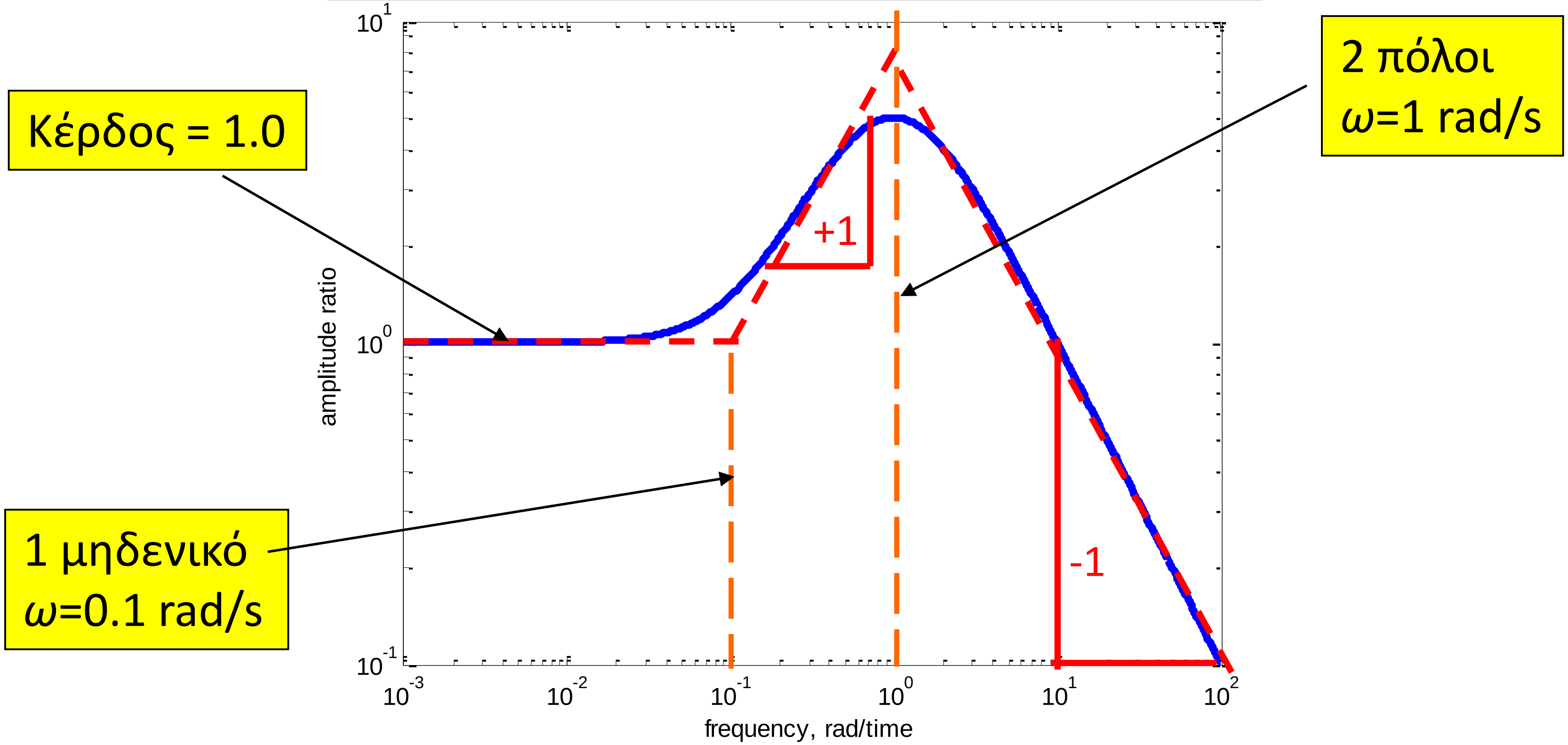
Άσκηση: Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς της οποίας το διάγραμμα Bode εικονίζεται παρακάτω:



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Απόκριση δυναμικών συστημάτων

$$G(s)=\frac{(10s+1)}{(s+1)^2} \quad \text{ή} \quad G(s)=\frac{(-10s+1)}{(s+1)^2}$$

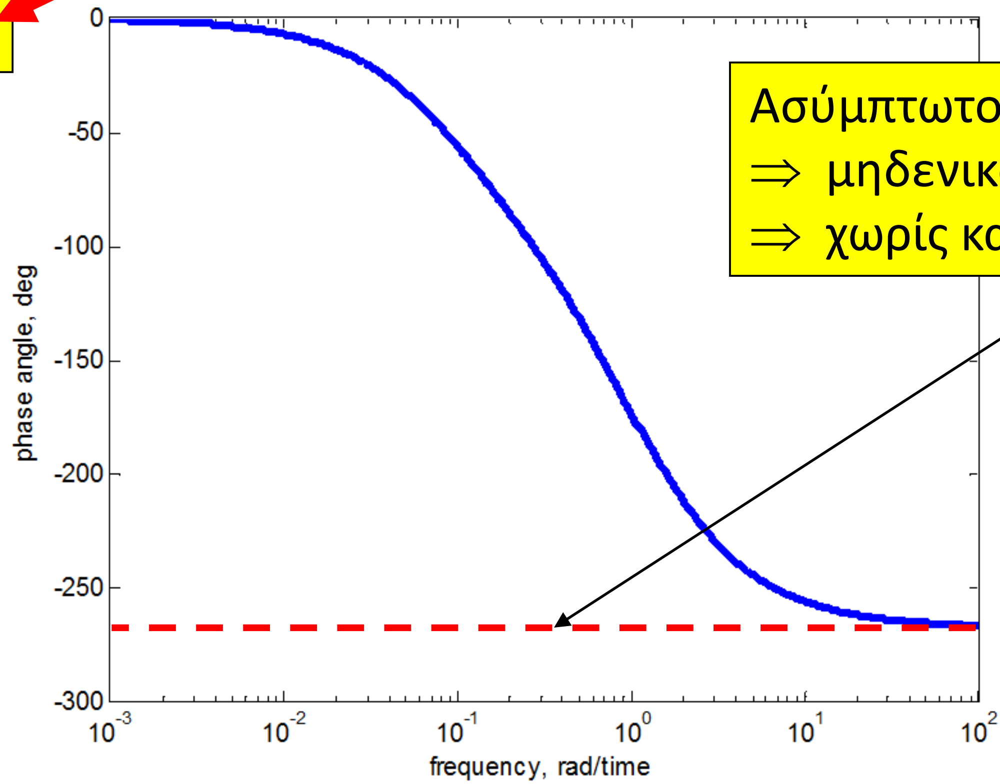


Βήμα 1ο: Από το διάγραμμα λόγου πλάτους υπολογίζεται η κλίση των ασύμπτωτων και οι κρίσιμες συχνότητες του συστήματος.

Απόκριση συχνότητας

$$G(s)=\frac{(10s+1)}{(s+1)^2} \quad \text{ή} \quad G(s)=\frac{(-10s+1)}{(s+1)^2}$$

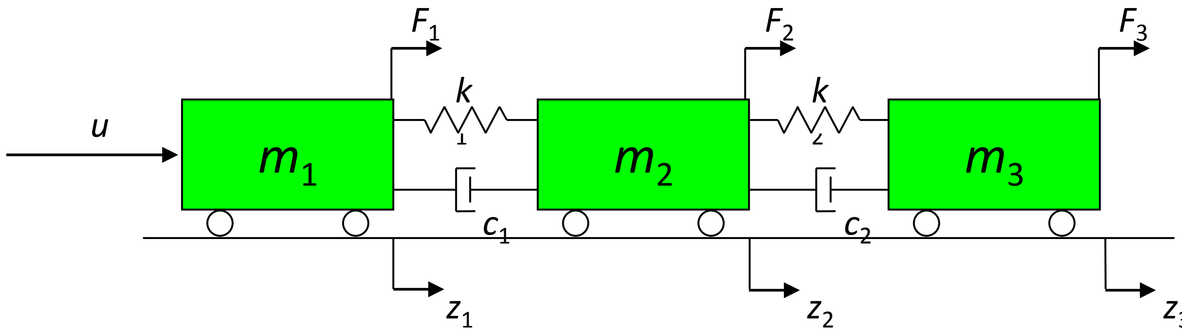
Απορρίπτεται



Ασύμπτωτος στα 270°
⇒ μηδενικό στο ΔΗΕ
⇒ χωρίς καθυστέρηση χρόνου

Βήμα 2ο: Από το διάγραμμα φάσης διαπιστώνεται η ύπαρξη μηδενικών στο δεξιό ημιεπίπεδο ή καθυστέρησης χρόνου.

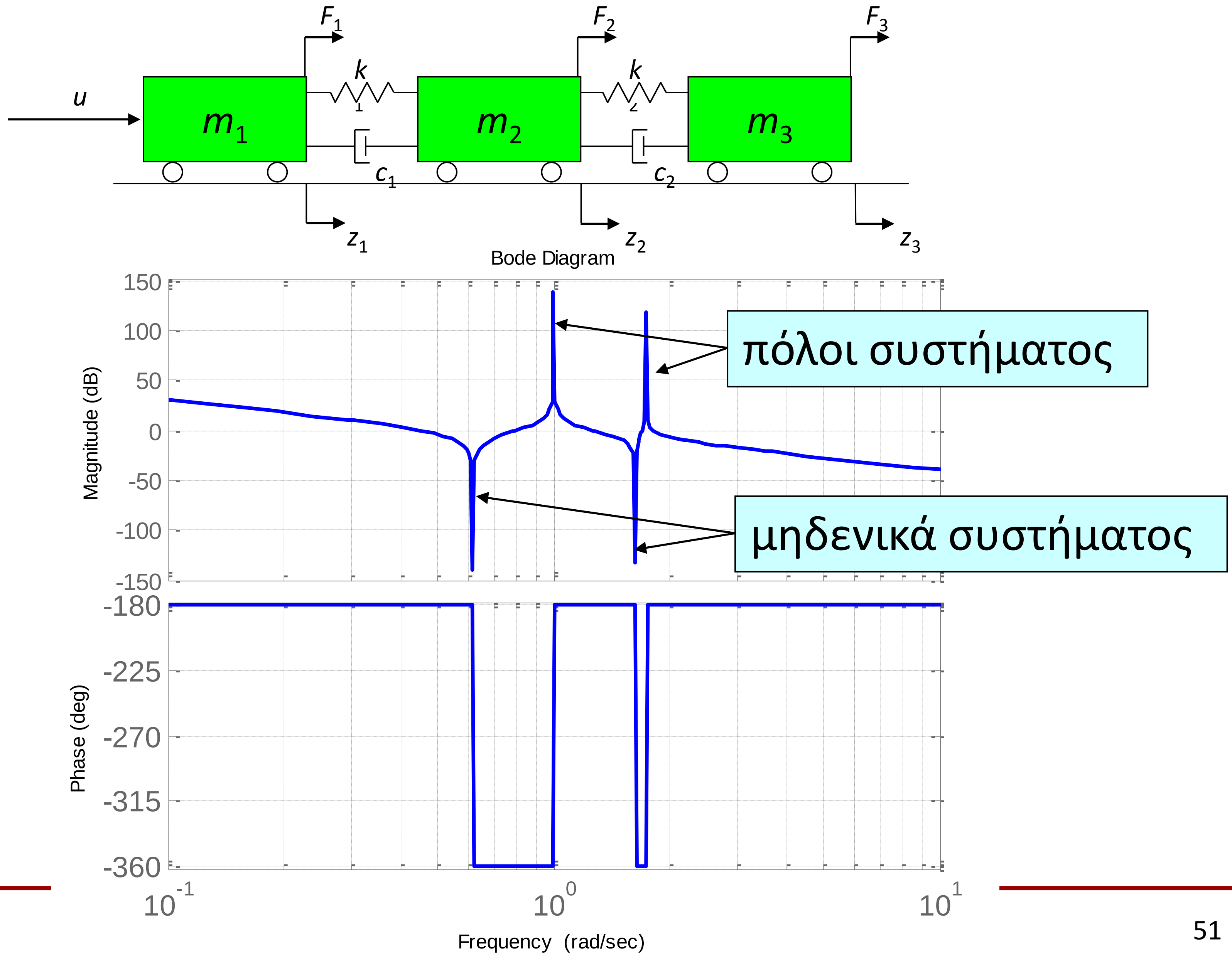
Απόκριση συχνότητας



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \left(m^2 s^4 + 3mks^2 + k^2\right) & \left(mks^2 + k^2\right) & k^2 \\ \left(mks^2 + k^2\right) & \left(m^2 s^4 + 2mks^2 + k^2\right) & \left(mks^2 + k^2\right) \\ k^2 & mks^2 + k^2 & \left(m^2 s^4 + 3mks^2 + k^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}{s^2\left(m^3 s^4 + 4m^2 ks^2 + 3mk^2\right)}$$

$$\frac{\begin{matrix} \pm 0.62j, \pm 1.62j & \pm j & - \\ \pm j & \pm j,\ \pm j & \pm j \\ - & \pm j & \pm 0.62j, \pm 1.62j \end{matrix}}{0, 0, \pm 1j, \pm 1.732j}$$

Απόκριση συχνότητας



Ευστάθεια στο πεδίο της συχνότητας

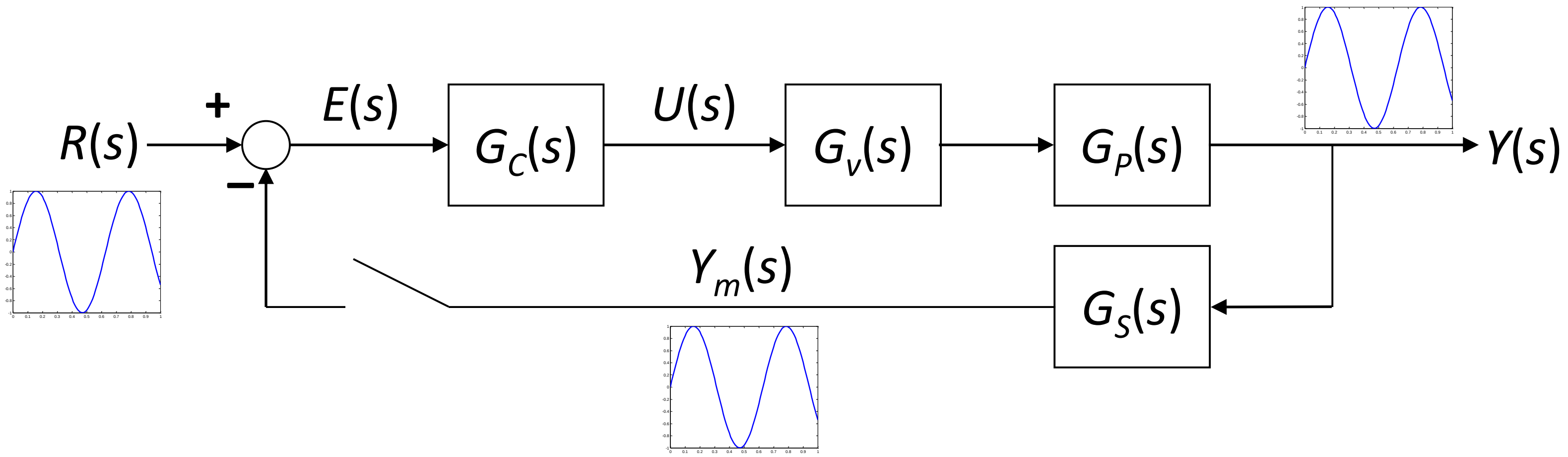
Κριτήριο ευστάθειας Bode.

Ελέγχει την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου από τη συμπεριφορά του συστήματος ανοικτού βρόχου.

Περιορισμοί.

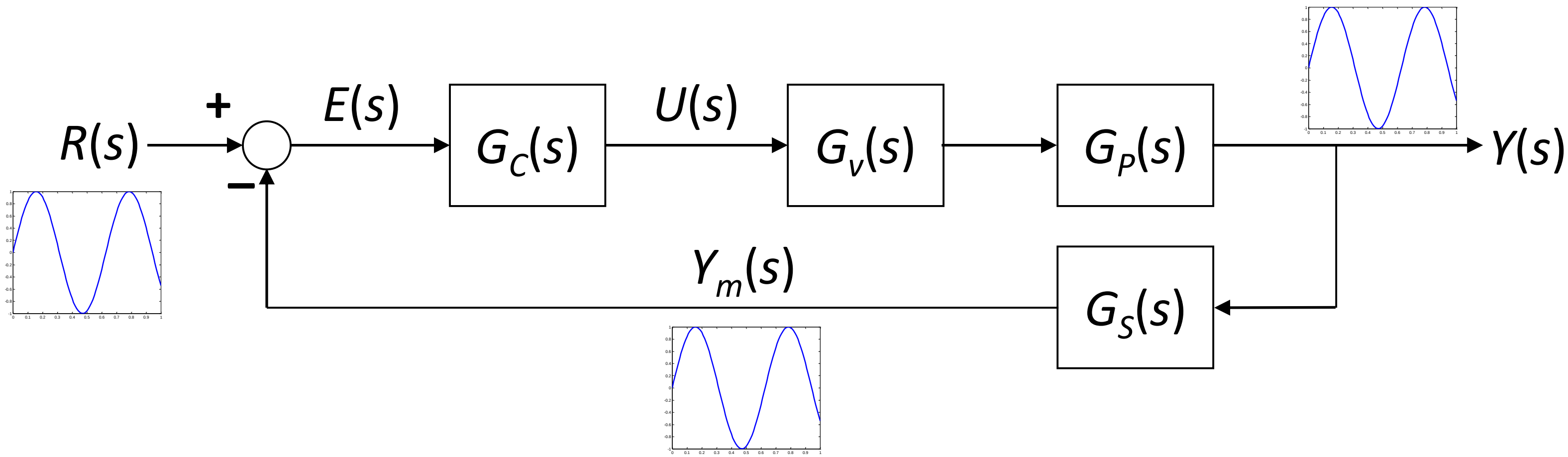
1. Σύστημα ανοικτού βρόχου ΕΥΣΤΑΘΕΣ.
2. Μονότονα φθίνουσα συμπεριφορά γωνία φάσης.

Ευστάθεια στο πεδίο της συχνότητας



- Σε συνθήκες ανοικτού βρόχου θέτουμε μια ημιτονοειδή μεταβολή στο σημείο αναφοράς.
- Μετά από ικανό χρόνο τα μεταβατικά δυναμικά χαρακτηριστικά της διεργασίας αποσβένονται και παραμένει μονάχα η ημιτονοειδής μεταβολή.

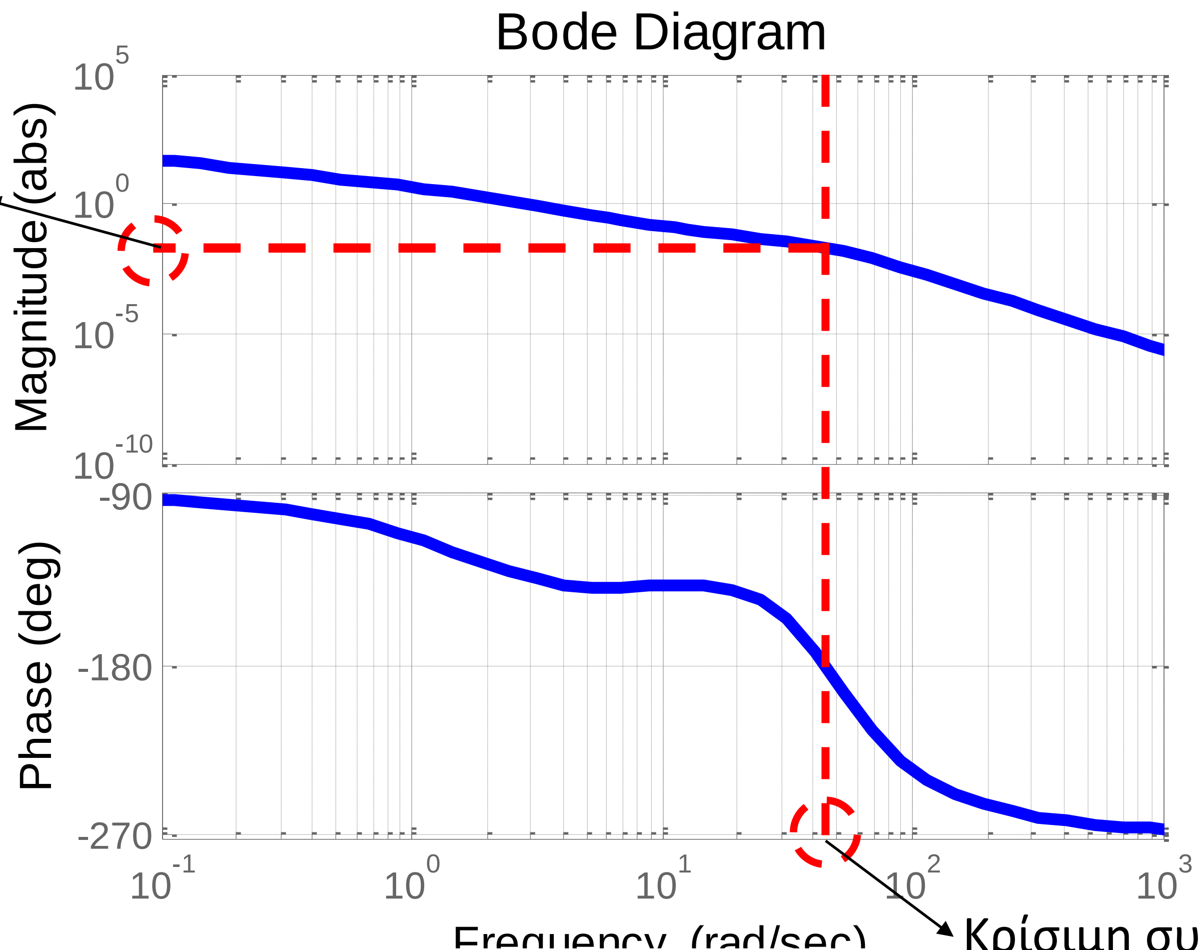
Ευστάθεια στο πεδίο της συχνότητας



- Μηδενίζουμε το σημείο αναφοράς και ταυτόχρονα θέτουμε το σύστημα σε κλειστό βρόχο.
- Καταγράφουμε την ελάττωση ή αύξηση του πλάτους του σήματος λόγω ανάδρασης.
- Αν ο λόγος πλάτους μειώνεται σταδιακά με κάθε πέρασμα από το βρόχο ανάδρασης τότε το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές.
- Στο πεδίο της συχνότητας εξετάζουμε το λόγω πλάτους του συστήματος ανοικτού βρόχου στη συχνότητα που αντιστοιχεί σε γωνία φάσης -180^o . Γιατί επιλέγετε αυτό το σημείο;
- Αν είναι μικρότερος του 1 ή 0 dB τότε το σύστημα ΚΛΕΙΣΤΟΥ βρόχου είναι ΕΥΣΤΑΘΕΣ.

Ευστάθεια στο πεδίο της συχνότητας

AR<1
ευσταθές



Κρίσιμη συχνότητα

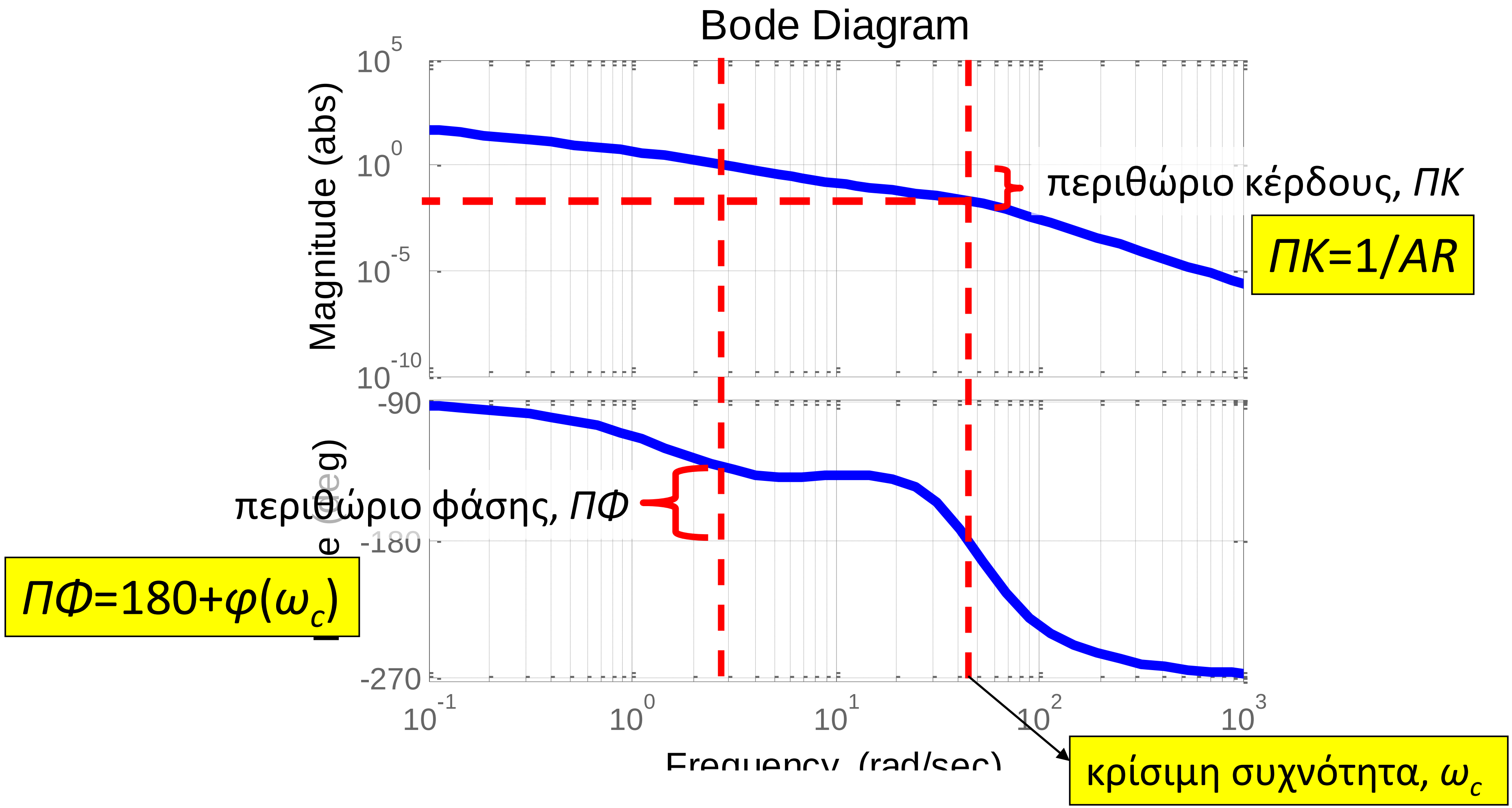
$$G(s)=\frac{5(0.1s+1)}{s(0.5s+1)\left[(1/50)^2 s^2+(1.2/50)s+1\right]}$$

Ευστάθεια στο πεδίο της συχνότητας

Το κριτήριο ευστάθειας Bode δηλώνει ότι **ένα σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές όταν ο λόγος πλάτους για τη συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού βρόχου είναι μικρότερος της μονάδας** (ή μικρότερο από 0 dB) **στην κρίσιμη συχνότητα $\boldsymbol{\omega_c}$** (που αντιστοιχεί σε γωνία φάσης -180°).

Το σύστημα είναι ασταθές αν ο λόγος πλάτους είναι μεγαλύτερος της μονάδας στην κρίσιμη συχνότητα.

Ευστάθεια στο πεδίο της συχνότητας



$$G(s)=\frac{5(0.1s+1)}{s(0.5s+1)\left[(1/50)^2 s^2+(1.2/50)s+1\right]}$$

Περιθώριο κέρδους

Το **περιθώριο κέρδους** (***ΠΚ***) δηλώνει πόσο περισσότερο στατικό κέρδος (π.χ. κέρδος ελεγκτή) μπορεί το σύστημα να ανεχθεί προτού προκληθεί αστάθεια στη δυναμική συμπεριφορά του κλειστού βρόχου.

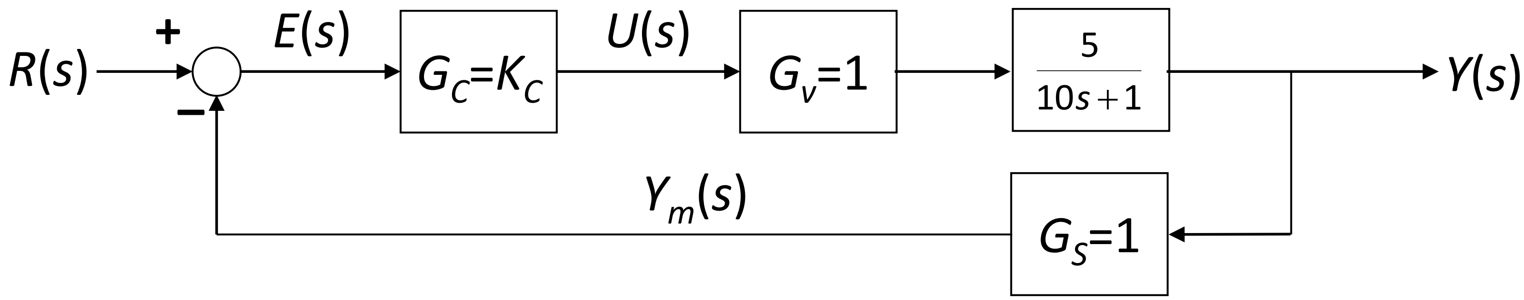
1. Υπολογίζουμε την κρίσιμη συχνότητα, ω_c, για την οποία η γωνία φάσης είναι -180^o.
2. Υπολογίζουμε το λόγο πλάτους στην κρίσιμη συχνότητα ω_c, $AR(\omega_c)$.
3. ***ΠΚ*****=1/*****AR*****(*****ω*****$_c$).** $\boldsymbol{\Pi K = 1/AR(\omega_c)}$.

Περιθώριο φάσης

Το **περιθώριο φάσης** (***ΠΦ***) δηλώνει πόσο περισσότερη καθυστέρηση φάσης (π.χ. λόγω καθυστέρησης χρόνου) μπορεί το σύστημα να ανεχθεί προτού προκληθεί αστάθεια στη δυναμική συμπεριφορά του κλειστού βρόχου.

1. Υπολογίζουμε την κρίσιμη συχνότητα, ω_c, για την οποία ο λόγος πλάτους είναι 1.0.
2. Υπολογίζουμε τη γωνία φάσης στην κρίσιμη συχνότητα ω_c, $\varphi(\omega_c)$.
3. **$\Pi\Phi = 180 + \varphi(\omega_c)$**.

Άσκηση στην ευστάθεια

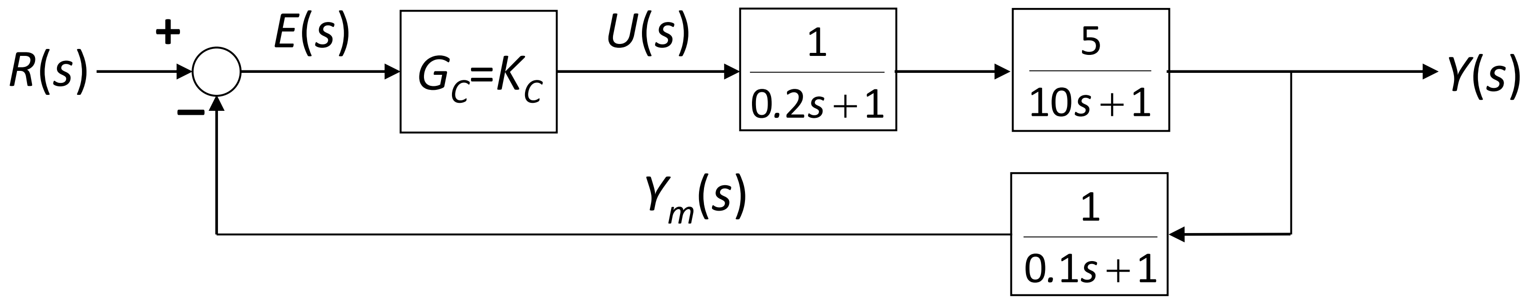


Ζητούμενο: Να προσδιορισθεί το εύρος τιμών για τη σταθερά K_c του ελεγκτή ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές.

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου $G(s) = K_c \dfrac{5}{(10s+1)}$ είναι 1ης τάξης και δεν υπάρχει συχνότητα ώστε το διάγραμμα φάσης να τέμνει τη γωνία -180°.

Συνεπώς το **σύστημα είναι ευσταθές για κάθε τιμή του K_c**.

Άσκηση στην ευστάθεια



Ζητούμενο: Να προσδιορισθεί το εύρος τιμών για τη σταθερά K_c του ελεγκτή ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές.

Το σύστημα δεν έχει αμελητέα δυναμικά χαρακτηριστικά για τον ενεργοποιητή και τον αισθητήρα.

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s) = K_c \frac{5}{(10s+1)} \frac{1}{(0.2s+1)} \frac{1}{(0.1s+1)}$$

είναι 3ης τάξης και το διάγραμμα φάσης προσεγγίζει ασυμπτωτικά τις -270^o.

Συνεπώς απαιτείται η κατασκευή του διαγράμματος Bode.

Άσκηση στην ευστάθεια

Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίνεται από τη σχέση:

$$\left|G(s)\right| = 5K_c \frac{1}{\sqrt{100\omega^2+1}} \frac{1}{\sqrt{0.04\omega^2+1}} \frac{1}{\sqrt{0.01\omega^2+1}}$$

Η γωνία φάσης της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίνεται από τη σχέση:

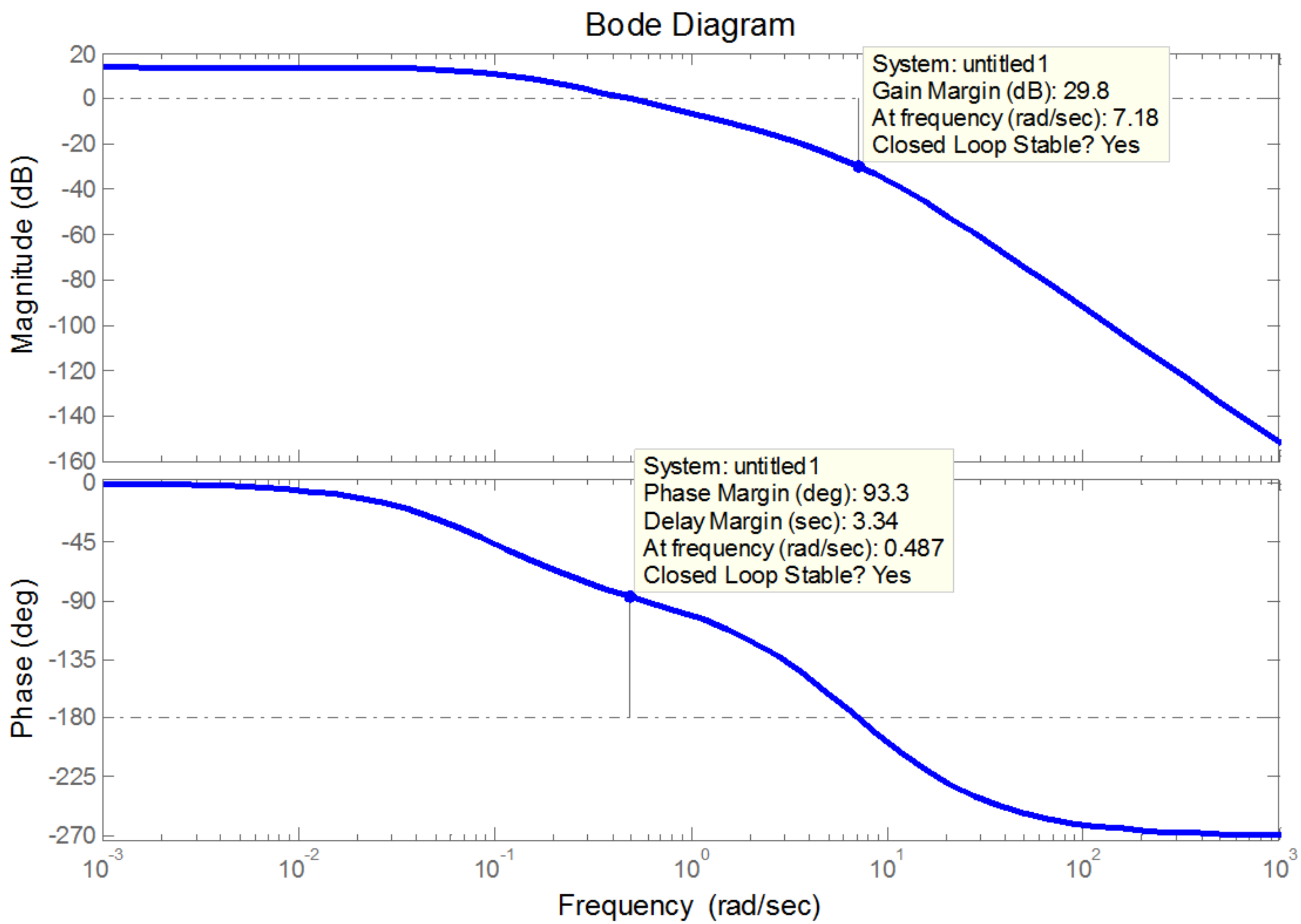
$$\angle G(s) = \text{-}\tan^{-1}(10\omega)\text{-}\tan^{-1}(0.2\omega)\text{-}\tan^{-1}(0.1\omega)$$

Η συχνότητα που η γωνία φάσης γίνεται -180^o υπολογίζεται ω_c=7.18 rad/s.

Για να είναι ο λόγος πλάτους στην κρίσιμη συχνότητα ω_c μικρότερος από μονάδα πρέπει η παράμετρος του ελεγκτή να είναι K_c<1/0.0323=30.94.

π.χ. για περιθώριο κέρδους (*ΠΚ*)=2 πρέπει ο λόγος πλάτους *AR*=1/*ΠΚ*=0.5 και άρα το K_c=0.5/0.0323=15.47.

Άσκηση στην ευστάθεια



K_c=1 : Το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές με *ΠΚ*=29.8 dB και *ΠΦ*=93.3°.

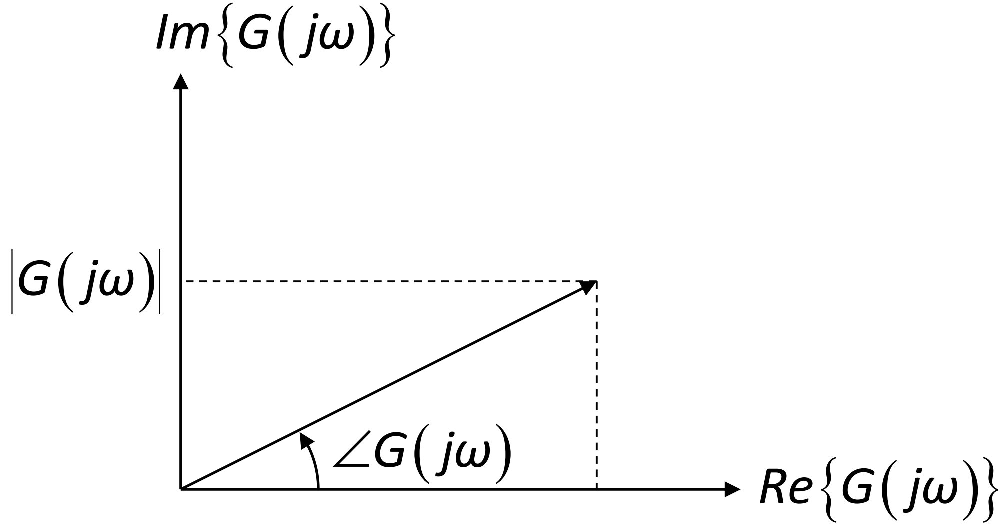
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Διάγραμμα Nyquist

Εναλλακτικά η απόκριση συχνότητας μπορεί να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο.

Σε πολική μορφή η απόκριση συχνότητας εκφράζεται ως:

$$\left|G(j\omega)\right| e^{j\omega\varphi}$$



Διάγραμμα Nyquist

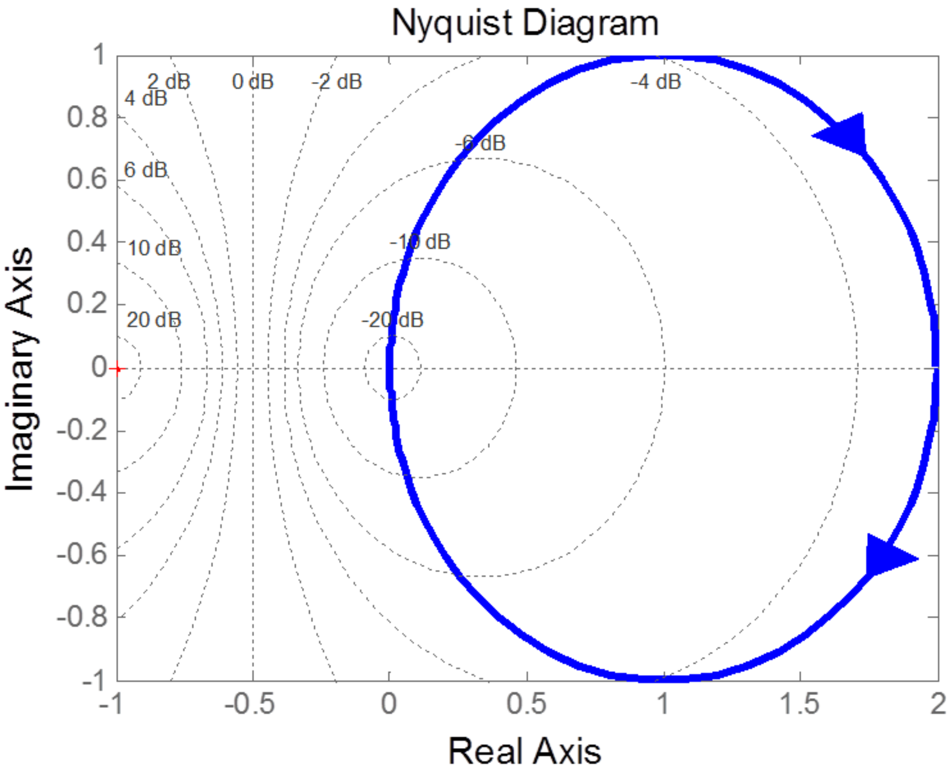
Σύστημα 1ης τάξης: $G(s)=\dfrac{K}{\tau s+1}$

$$G(j\omega)=\frac{K}{\tau j\omega+1}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi=\angle G(j\omega)=-tan^{-1}(\tau\omega)$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+(\tau\omega)^2}+j\frac{-K\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}$$



$$G(s)=\frac{2}{10s+1}$$

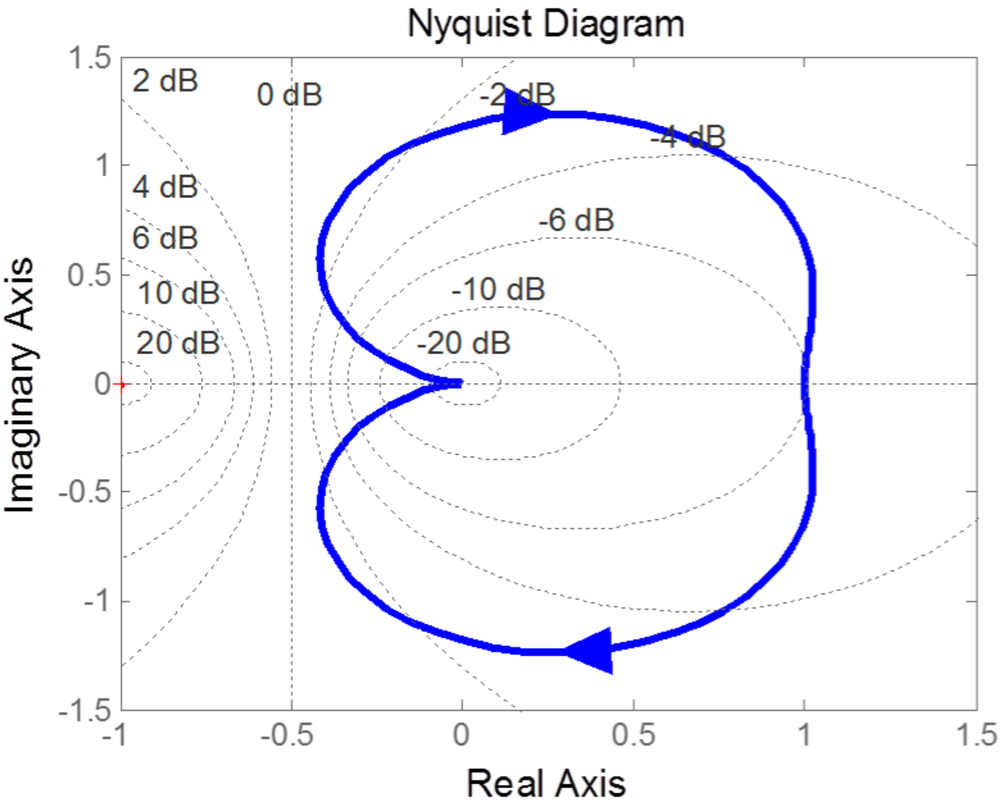
Διάγραμμα Nyquist

Σύστημα 2ης τάξης: $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{\omega_n}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\angle G(j\omega)=-tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\,\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]$$



$G(s)=1.4/\left(s^2+s+1.4\right)$

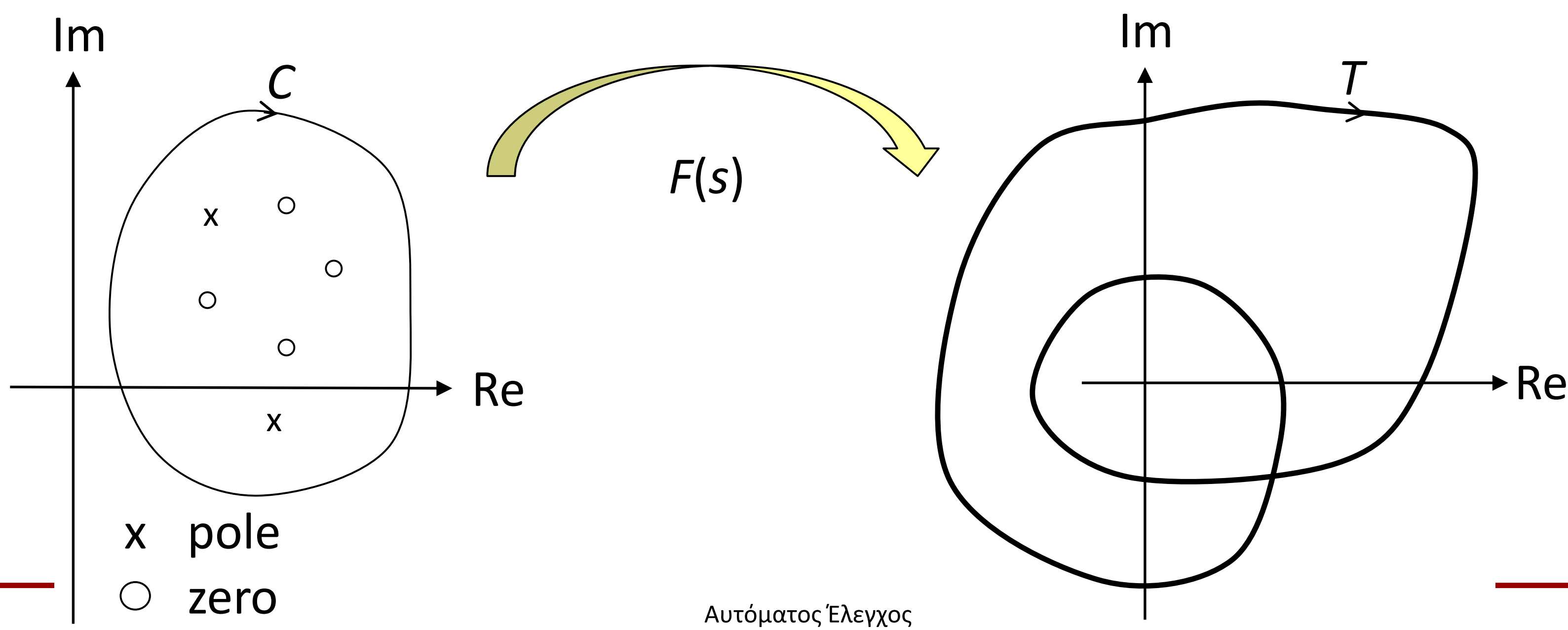
Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

- Το κριτήριο ευστάθειας Bode περιορίζεται σε συστήματα όπου ο ανοικτός βρόχος είναι ευσταθής (όλοι οι πόλοι του ανοικτού βρόχου είναι στο ΑΗΕ).
- Επίσης η γωνία φάσης πρέπει να είναι μονοτόνως φθίνουσα κοντά στην κρίσιμη συχνότητα.
- Οι περιορισμοί αυτοί επιβάλλουν τη χρήση ενός πιο γενικευμένου κριτηρίου ευστάθειας στο πεδίο της συχνότητας.
- Το κριτήριο ευστάθειας Nyquist στηρίζεται στο θεώρημα του Cauchy για μιγαδικές συναρτήσεις.

Μαθηματικό υπόβαθρο

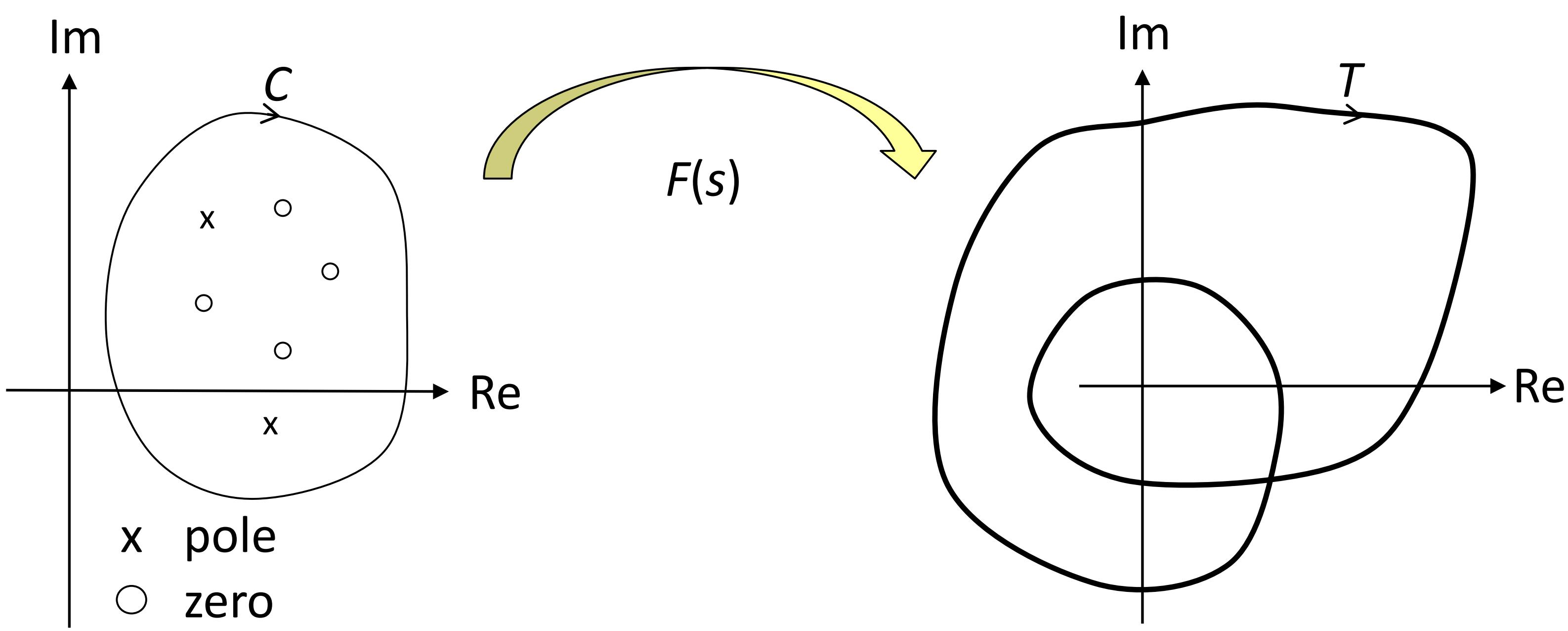
Θεωρούνται μια συνάρτηση $F(s)$ της μιγαδικής μεταβλητής s και μια κλειστή καμπύλη C του μιγαδικού επιπέδου. Επίσης θεωρείται ότι η καμπύλη C περικλείει Z μηδενικά και P πόλους της συνάρτησης $F(s)$ (οι πόλοι και τα μηδενικά δεν ανήκουν πάνω στην καμπύλη).

Όταν η C διαγράφεται από τη μεταβλητή s, τότε η συνάρτηση $F(s)$ τη μετασχηματίζει σε μια κλειστή τροχιά T στο μιγαδικό πεδίο.

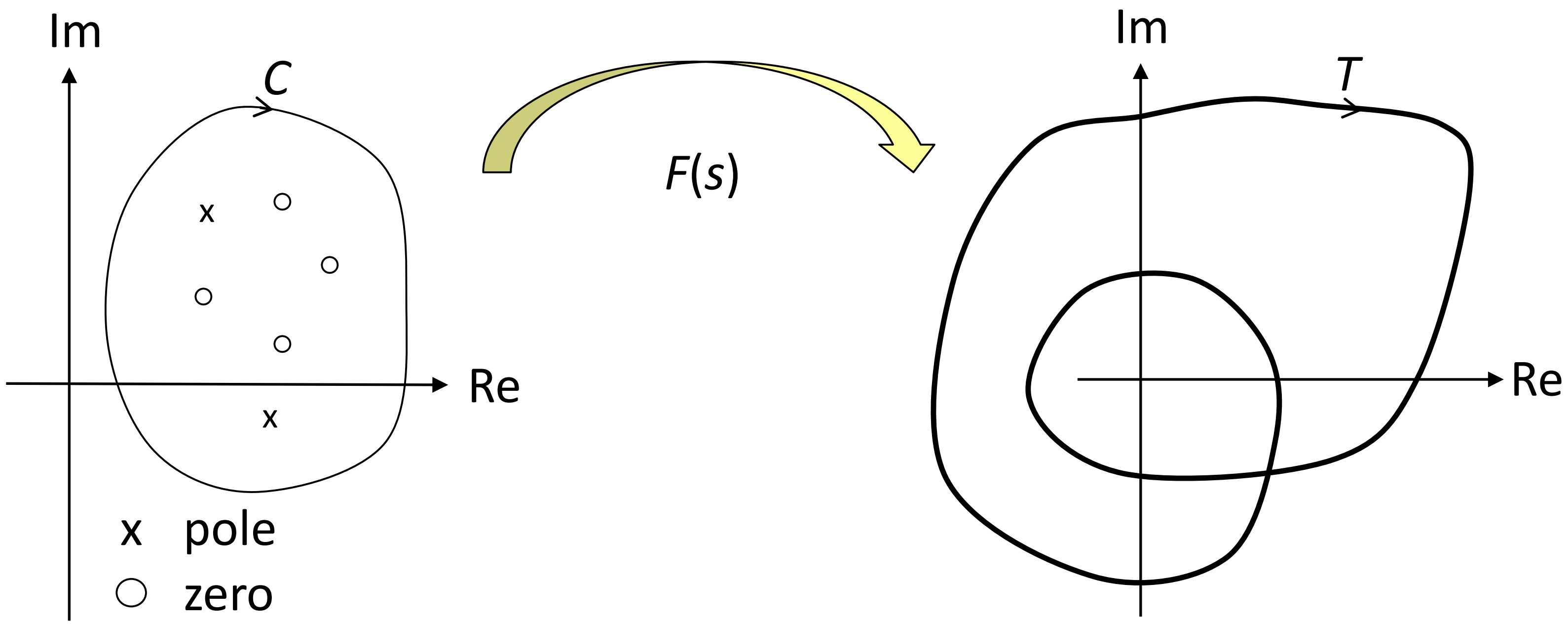


Μαθηματικό υπόβαθρο

Ο αριθμός N των κυκλώσεων (μετρούμενες θετικά αν η κύκλωση γίνεται με την ίδια φορά με την οποία διαγράφει η μεταβλητή s την καμπύλη C και αρνητικά αν ισχύει το αντίθετο) της αρχής των αξόνων O από την απεικόνιση της συνάρτησης $F(s)$ είναι ίσος με τη διαφορά Z-P: $N=Z-P$.



Μαθηματικό υπόβαθρο



$N=Z-P=4-2=2$. Άρα η $F(s)$ μετασχηματίζει τη C σε κλειστή τροχιά T που κυκλώνει δύο φορές την αρχή των αξόνων με τη φορά που διαγράφεται η C.

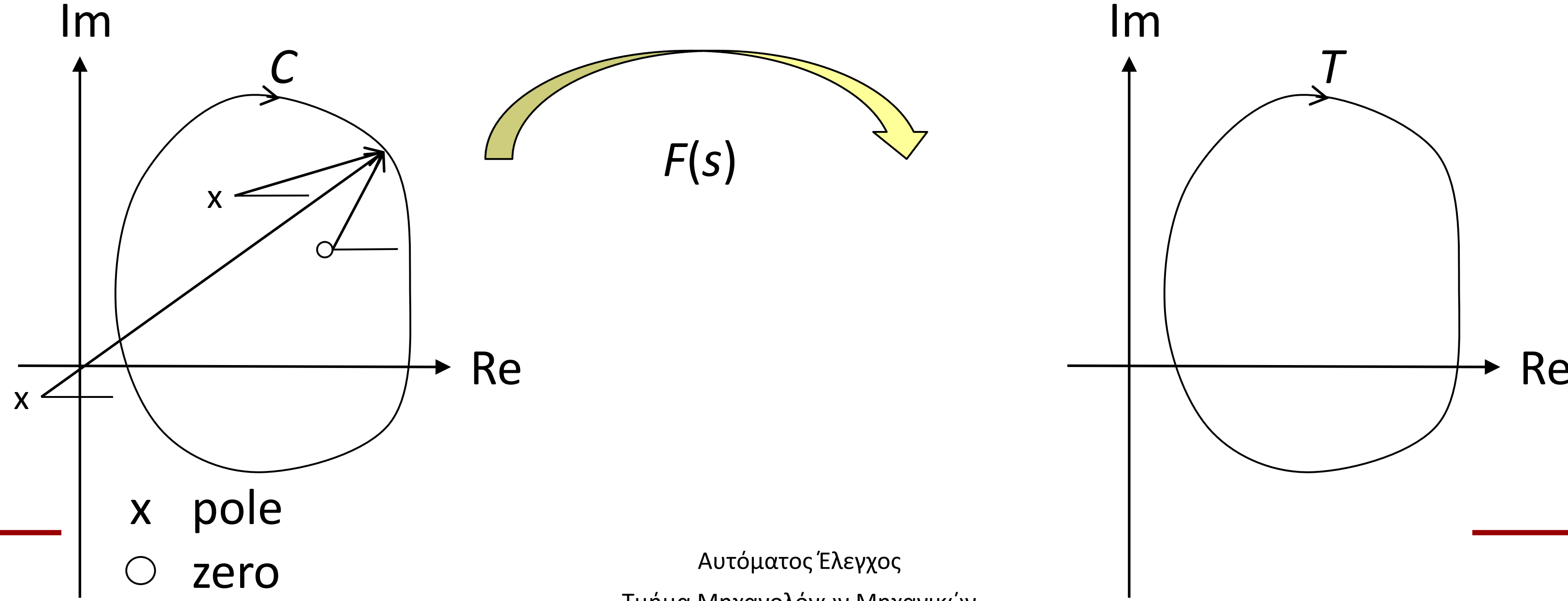
Μαθηματικό υπόβαθρο

Αυτό συμβαίνει διότι η γωνία (όρισμα) των διανυσμάτων (*s*-*p*) και (*s*-*z*) όταν τα *p* και *z* βρίσκονται εντός της καμπύλης *C* καθώς η μεταβλητή *s* διαγράφει τη *C* είναι 2*π*. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\arg\left(G\left(s\right)\right)=\arg\left(s-z\right)-\arg\left(s-p\right)$$

η συνολική γωνία περιφοράς θα είναι 2*π*-2*π*=0.

Οι πόλοι και τα μηδενικά εκτός της καμπύλης δε συνεισφέρουν στη συνολική γωνία περιφοράς της απεικόνισης της *F*(*s*).

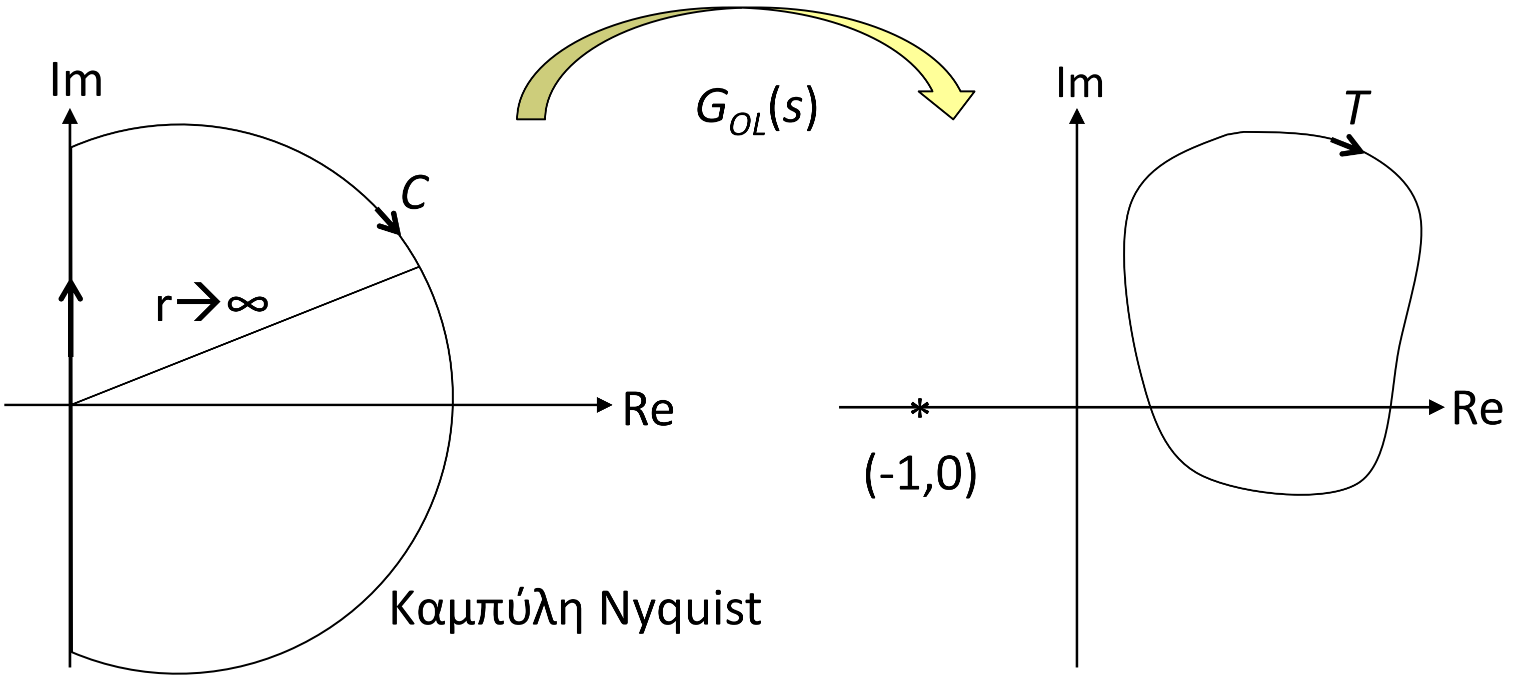


Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

- Για την ευστάθεια συστημάτων κλειστού βρόχου αρκεί να επιλέξουμε ως συνάρτηση την $F(s)=1+G_{OL}(s)$ (δηλαδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού βρόχου).
- Μετατοπίζοντας οριζοντίως το σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται ως συνάρτηση η $G_{OL}(s)$ με το σημείο (-1,0) να αντικαθιστά την αρχή των αξόνων. Αυτό ονομάζεται σημείο Nyquist.
- Για να υφίσταται ευσταθής δυναμική συμπεριφορά πρέπει η $1+G_{OL}(s)$ να μην έχει μηδενικά με θετικό πραγματικό μέρος (δηλαδή μηδενικά στο ΔΗΕ), άρα $Z=0$.

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Η καμπύλη *C* περικλείει λοιπόν όλο το δεξιό ημι-επίπεδο του μιγαδικού χώρου. Αυτό επιτυγχάνεται λαμβάνοντας τη *C* ως ημικύκλιο με ακτίνα r→∞ με κέντρο την αρχή των αξόνων (0,0).



Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Ο αριθμός των κυκλώσεων *N* (θεωρούμενες θετικές αν διαγράφονται με την ίδια φορά που διαγράφεται η *C* και αρνητικές αν ισχύει το αντίθετο) του σημείου (-1,0) από την καμπύλη *T* της $G_{OL}(s)$, πρέπει να είναι αντίθετη με το πλήθος των πόλων της $G_{OL}(s)$ εντός της *C* (δηλαδή των πόλων του ανοικτού βρόχου που βρίσκονται στο δεξί ημι-επίπεδο):

Δηλαδή να ισχύει $N=-P$, ώστε τα μηδενικά της $1+G_{OL}(s)$ να βρίσκονται στο αριστερό ημι-επίπεδο και το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι **ευσταθές**.

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Ένα σύστημα ανάδρασης αυτόματου ελέγχου είναι **ευσταθές** αν και μόνο αν το πλήθος των κυκλώσεων του σημείου (-1,0) από την καμπύλη *T*, κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού (αρνητική) ισούται με το πλήθος των πόλων της $G_{OL}(s)$ οι οποίοι έχουν θετικό πραγματικό μέρος.

Ένα σύστημα ανάδρασης αυτόματου ελέγχου είναι **ευσταθές** αν και μόνο αν η καμπύλη *T* δεν κυκλώνει το σημείο (-1,0) ενώ ταυτόχρονα το πλήθος των πόλων της $G_{OL}(s)$ στο δεξί ημι-επίπεδο είναι μηδέν (δηλαδή το σύστημα ανοικτού βρόχου είναι ευσταθές).

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Επιπλέον το πλήθος των μηδενικών της $1+G_{OL}(s)$ στο δεξί ημι-επίπεδο θα ισούται με $Z=N+P$.

N: πλήθος των κυκλώσεων του (-1,0).

P: πλήθος των πόλων της $G_{OL}(s)$ στο δεξί ημι-επίπεδο.

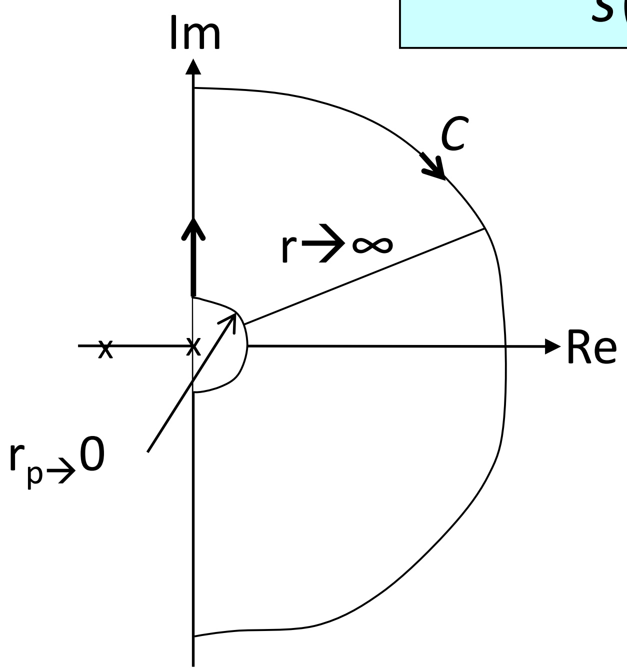
Για ευστάθεια το Z πρέπει να είναι μηδέν.

Επομένως για ευστάθεια $N=-P$.

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Σε περίπτωση πόλων της $G_{OL}(s)$ στο φανταστικό άξονα τότε το σημείο αυτό δεν ανήκει στη C με την παράλειψή του μέσω ενός ημικυκλίου με ακτίνα $r_p \rightarrow 0$.

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

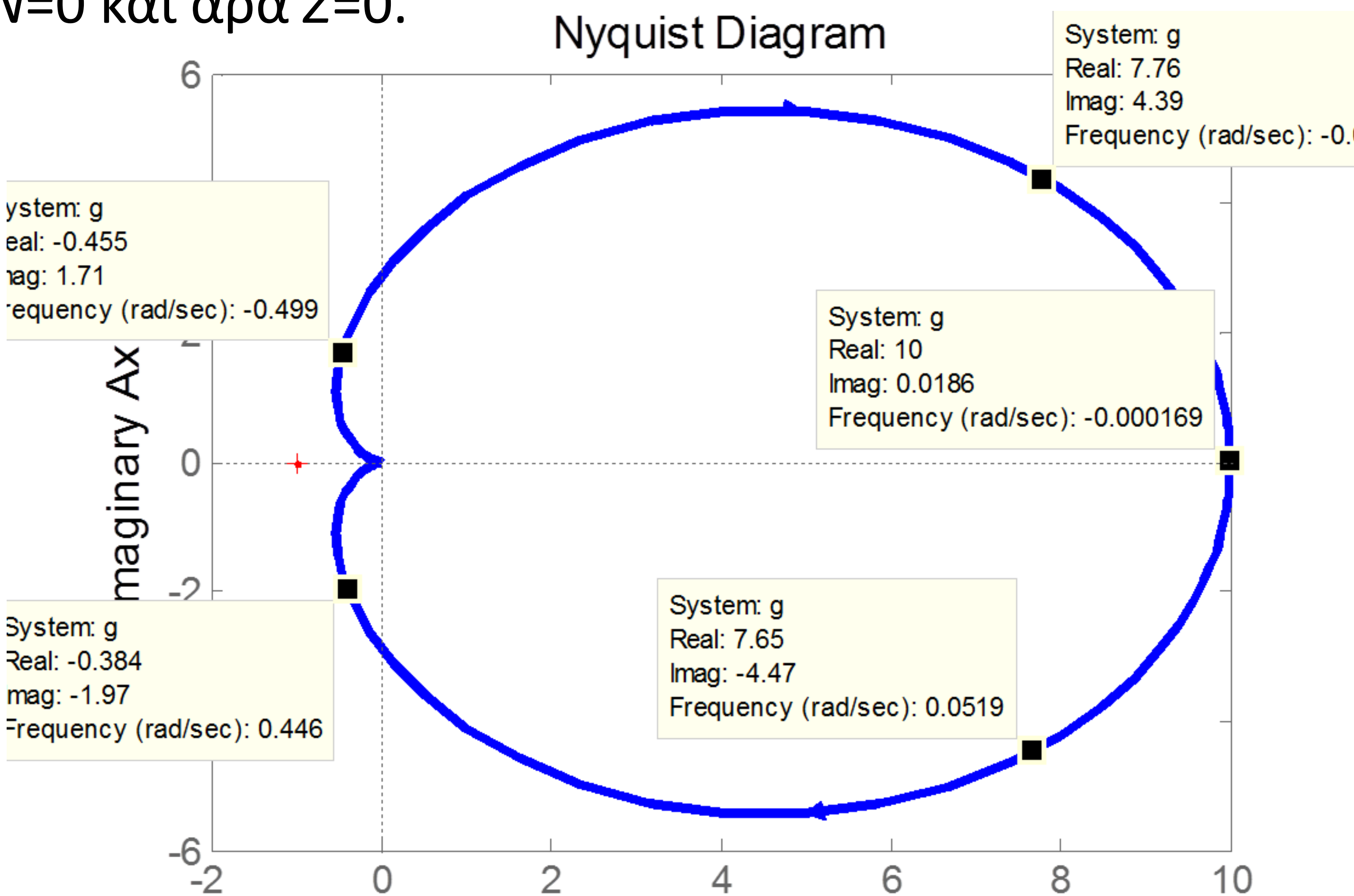


Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Σύστημα με 2 πραγματικούς πόλους.

$$G(s)=\frac{10}{(s+1)(10s+1)}$$

P=0, N=0 και άρα Z=0.

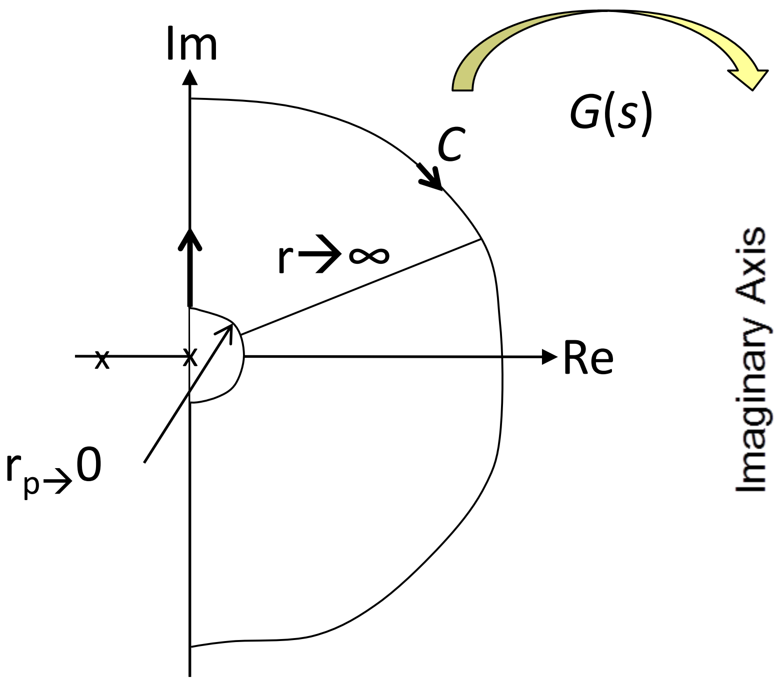


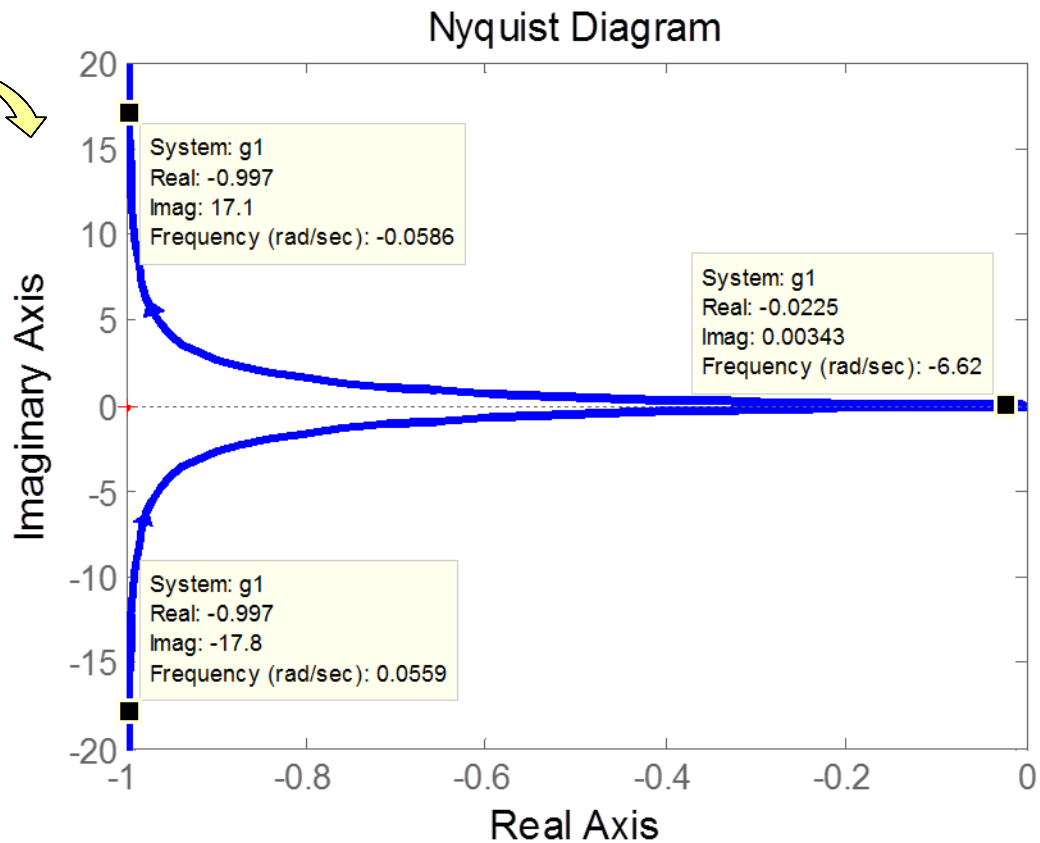
Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Σύστημα με πόλο στην αρχή των αξόνων.

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)}$$

Καμπύλη Nyquist





P=0, N=0 και άρα Z=0

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Σύστημα με 3 πόλους.

$$G(s)=\frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

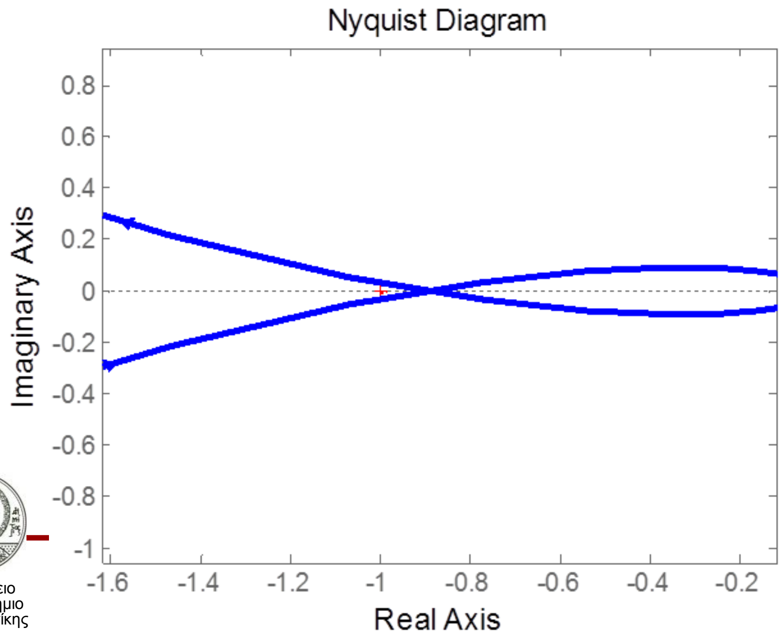
$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(\tau_1 j\omega+1)(\tau_2 j\omega+1)}=\frac{K(\tau_1+\tau_1)-jK(1/\omega)\left(1-\omega^2\tau_1\tau_2\right)}{1+\omega^2\left(\tau_1^2+\tau_2^2\right)+\omega^4\tau_1^2\tau_2^2}$$

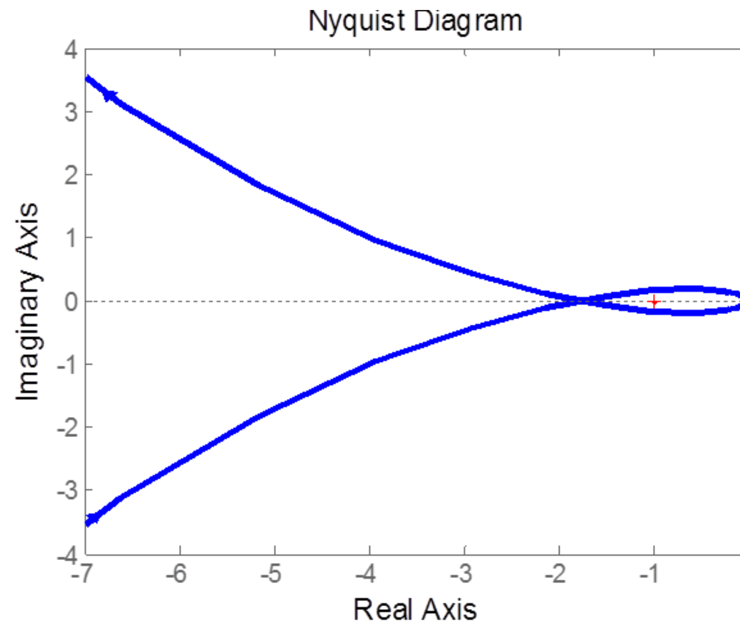
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(10s+1)}$$

P=0, N=0 → Z=0 ευσταθές

$$G(s)=\frac{2}{s(s+1)(10s+1)}$$

P=0, N=2 → Z=2 ασταθές





Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Παράδειγμα: Σύστημα με 3 πραγματικούς πόλους.

$$G(s)=\frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

Η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να είναι το σύστημα ευσταθές προκύπτει από τον υπολογισμό της κρίσιμης συχνότητας όπου το διάγραμμα Nyquist τέμνει το σημείο (-1,0).

Θέτοντας το φανταστικό μέρος ίσο με μηδέν:

$$G(j\omega)=u+jv=\frac{K(\tau_1+\tau_2)-jK(1/\omega)\left(1-\omega^2\tau_1\tau_2\right)}{1+\omega^2\left(\tau_1^2+\tau_2^2\right)+\omega^4\tau_1^2\tau_2^2}$$

$$v=0=\frac{K(1/\omega)\left(1-\omega^2\tau_1\tau_2\right)}{1+\omega^2\left(\tau_1^2+\tau_2^2\right)+\omega^4\tau_1^2\tau_2^2}\Rightarrow 0=\left(1-\omega^2\tau_1\tau_2\right)\Leftrightarrow \boxed{\omega=1/\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

Στη συχνότητα αυτή το πραγματικό μέρος υπολογίζεται ως:

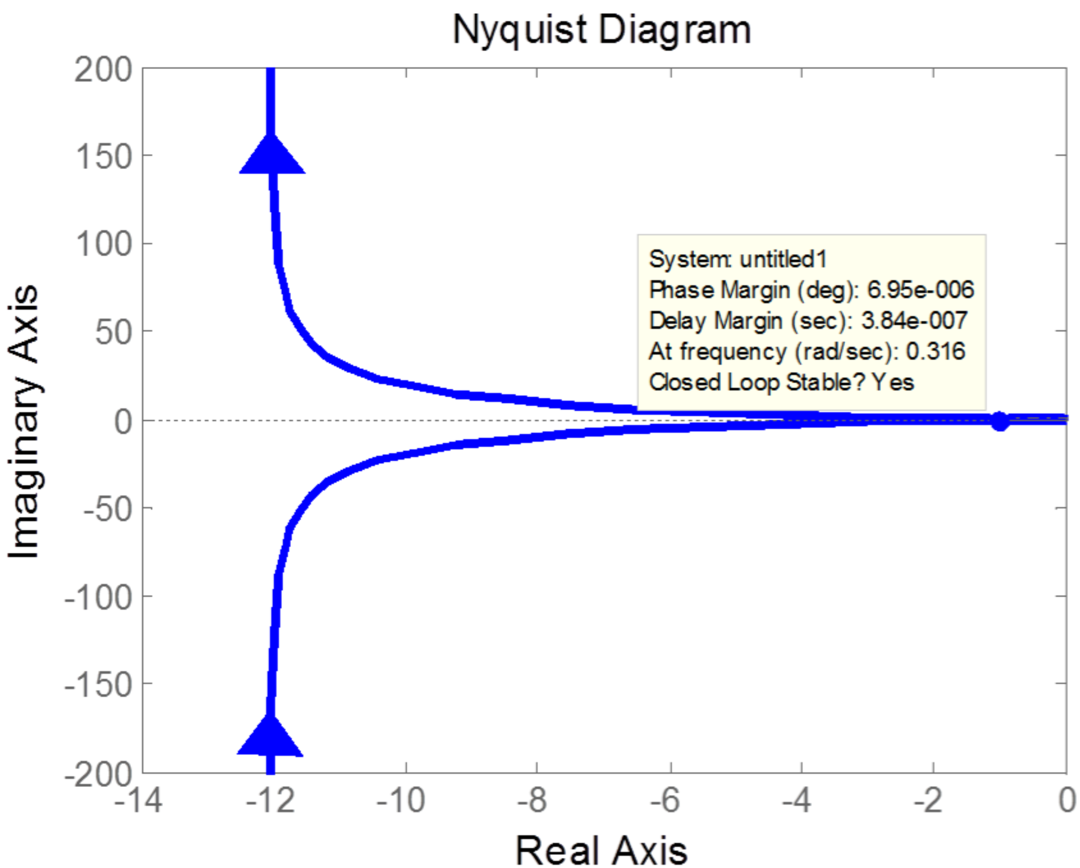
Ευσταθές

$$u=\left.\frac{K(\tau_1+\tau_2)}{1+\omega^2\left(\tau_1^2+\tau_2^2\right)+\omega^4\tau_1^2\tau_2^2}\right|_{\omega^2=1/\tau_1\tau_2}=\frac{-K\tau_1\tau_2}{(\tau_1+\tau_2)}\Rightarrow\frac{-K\tau_1\tau_2}{(\tau_1+\tau_2)}\geq -1\Rightarrow \boxed{K\leq 1.1}$$

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Παράδειγμα: Σύστημα με 3 πραγματικούς πόλους.

$$G(s)=\frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$



$$G(s)=\frac{1.1}{s(s+1)(10s+1)}$$

Οριακά ευσταθές σύστημα.

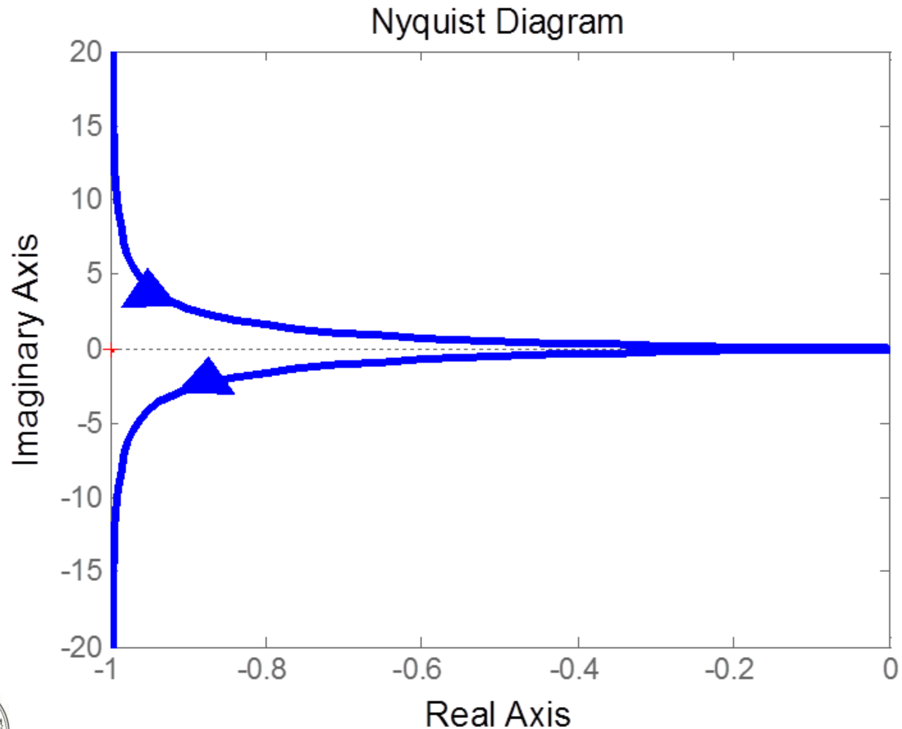
Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Παράδειγμα: Σύστημα με πόλο στο δεξί ημι-επίπεδο.

$$G(s)=\frac{K}{s(s-1)}$$

Bishop & Dorf, Κεφ. 9.3, *Εκδόσεις Τζιόλα.*

P=1 οπότε για ευστάθεια θα πρέπει *N*=-1 (δηλ. κύκλωση του (-1,0) κατά την αντίθεση φορά των δεικτών του ρολογιού).



Για *K*=1 υπάρχει κύκλωση κατά τη θετική φορά οπότε *Z*=2 (δυο πόλοι του κλειστού βρόχου στο ΔΗΕ).

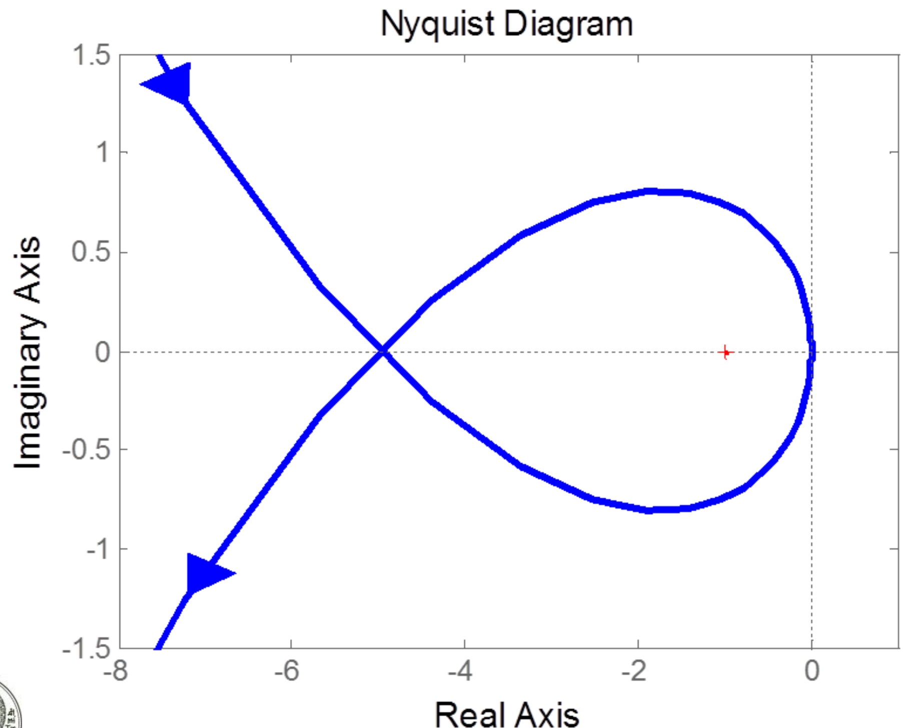
Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Παράδειγμα: Σύστημα με πόλο στο δεξί ημι-επίπεδο.

$$G(s)=\frac{K_1(1+K_2 s)}{s(s-1)}$$

Bishop & Dorf, Κεφ. 9.3, *Εκδόσεις Τζιόλα.*

$$G(j\omega)=\frac{K_1(1+K_2 j\omega)}{j\omega(j\omega-1)}=\frac{K_1\omega^2(1+K_2)+j\omega\left(1-K_2\omega^2\right)K_1}{\omega^2+\omega^4}$$



Μηδενισμός του φανταστικού μέρους συμβαίνει όταν:

$$\left(1-K_2\omega^2\right)=0 \Leftrightarrow \omega^2=1/K_2$$

Το πραγματικό μέρος στην κρίσιμη συχνότητα είναι:

$$u=\left.\frac{K_1\omega^2(1+K_2)}{\omega^2+\omega^4}\right|_{\omega^2=1/K_2}=-K_1K_2$$

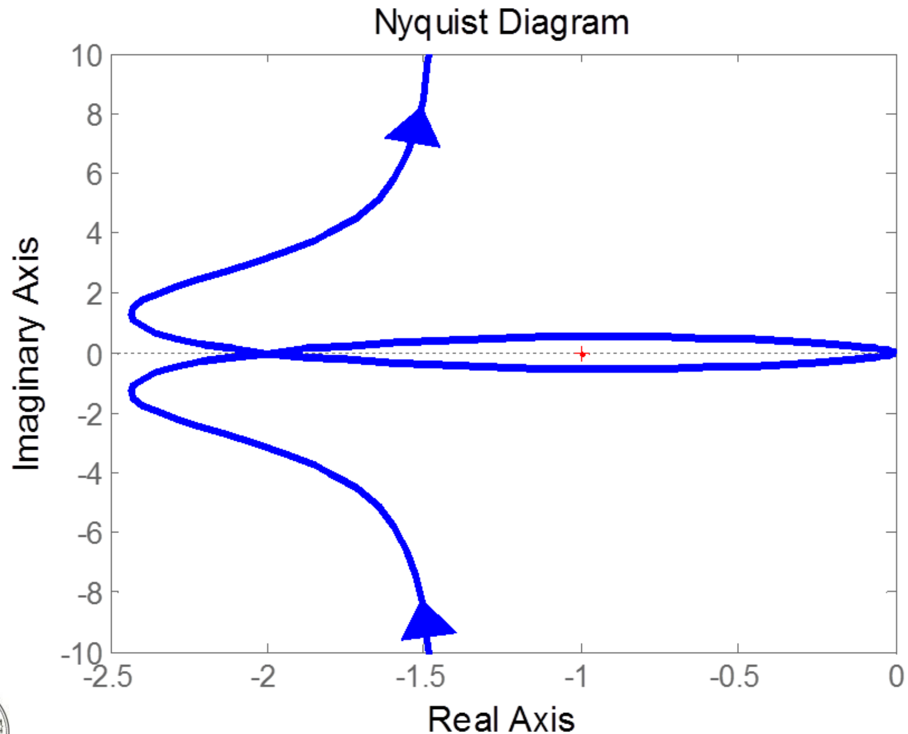
K_1=5, K_2=2: Κύκλωση του (-1,0) με αρνητική φορά επομένως N=-1 και Z=1-1=0.

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Παράδειγμα: Σύστημα 2ης τάξης με ολοκληρωτικό πόλο.

$$G(s)=\frac{K}{s\left(s^2+s+1.4\right)}$$

K=2, N=2 και επομένως Z=N+P=2+0=2. Δυο πόλοι στο ΔΗΕ, άρα **ασταθές** σύστημα κλειστού βρόχου.



Ποια είναι η οριακή τιμή του κέρδους K για ευστάθεια;

Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Προσδιορίζει τη συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος στο πεδίο της συχνότητας.
- Σχεδιάζει το διάγραμμα Bode από τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.
- Εξαγάγει τη συνάρτηση μεταφοράς ενός δυναμικού συστήματος από το διάγραμμα Bode.
- Εκτιμά την ευστάθεια του κλειστού βρόχου μέσω της απόκρισης συχνότητας του ανοικτού βρόχου.

Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Εφαρμόζει το κριτήριο ευστάθειας Bode για την εκτίμηση του εύρους των παραμέτρων ενός ελεγκτή ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές.
- Σχεδιάζει το διάγραμμα Nyquist από τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Εκτιμά την ευστάθεια ενός συστήματος κλειστού βρόχου με το κριτήριο ευστάθειας Nyquist.
- Εφαρμόζει το κριτήριο ευστάθειας Nyquist για την εκτίμηση του εύρους των παραμέτρων ενός ελεγκτή ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δρ Αθανάσιος Ι. Παπαδόπουλος
Δρ Αγγελική Μονέδα
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης