



# Αυτόματος Έλεγχος

Ενότητα 9<sup>η</sup>: Σχεδίαση ελεγκτών με το  
γεωμετρικό τόπο ριζών

Παναγιώτης Σεφερλής



Εργαστήριο Δυναμικής Μηχανών  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Γεωμετρικός τόπος ριζών

## Στόχοι της ενότητας

- Ιδιότητες και προσδιορισμός γεωμετρικού τόπου ριζών δυναμικού συστήματος κλειστού βρόχου.
- Σχεδίαση ελεγκτών με το γεωμετρικό τόπο ριζών.



# Γεωμετρικός τόπος ριζών

## Περίληψη της ενότητας

- Κανόνες κατασκευής γεωμετρικού τόπου ριζών.
- Αντιστοίχιση προδιαγραφών δυναμικής συμπεριφοράς με τμήματα του ΓΤΡ.
- Επιλογή κατάλληλων παραμέτρων για τον ελεγκτή με τοποθέτηση των πόλων στον επιθυμητό χώρο.
- Μέθοδοι σχεδίασης ελεγκτών με τον ΓΤΡ.

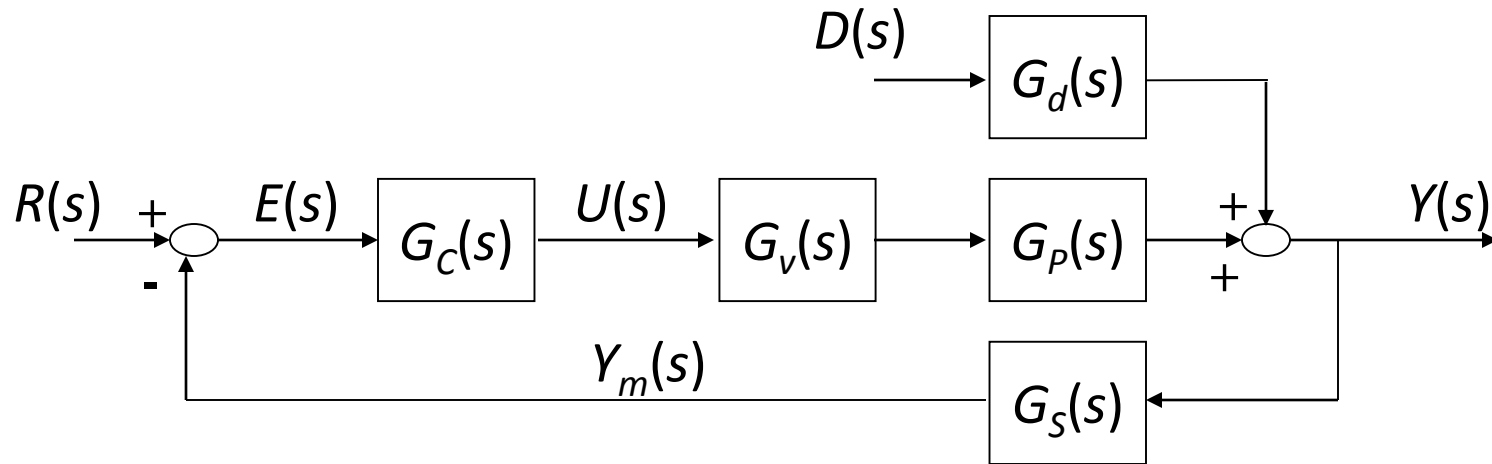


# Γεωμετρικός τόπος ριζών

- Ο γεωμετρικός τόπος ριζών δείχνει τη θέση των πόλων του κλειστού βρόχου καθώς το κέρδος του ελεγκτή,  $K$ , αυξάνεται από  $K=0 \rightarrow +\infty$ .
- Η σχεδίαση ελεγκτών με το ΓΤΡ είναι μια τεχνική τοποθέτησης των πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου για την επίτευξη της επιθυμητής συμπεριφοράς.
- Εύκολη και γραφική μέθοδος για τη σχεδίαση ελεγκτών.
- Κύρια μειονεκτήματα:
  - α. Δεν αντιμετωπίζει συστήματα με καθυστέρηση χρόνου.
  - β. Είναι χρήσιμη μόνο σε συστήματα μιας μεταβλητής εισόδου – μιας μεταβλητής εξόδου (MEME).



# Γεωμετρικός τύπος ριζών



Έστω  $G(s)=G_v(s)G_p(s)G_s(s)$  και  $G_c(s)=K$   
με συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_v(s)G_p(s)}{1 + KG(s)}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$1 + \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = 0$$



# Γεωμετρικός τόπος ριζών

$$\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = -1 + 0j$$

Επομένως ένα σημείο επί του γεωμετρικού τόπου ριζών ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις για το μέτρο και το όρισμα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

$$\left| \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \right| = 1$$
$$\arg \left( \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \right) = 180 \pm q360$$

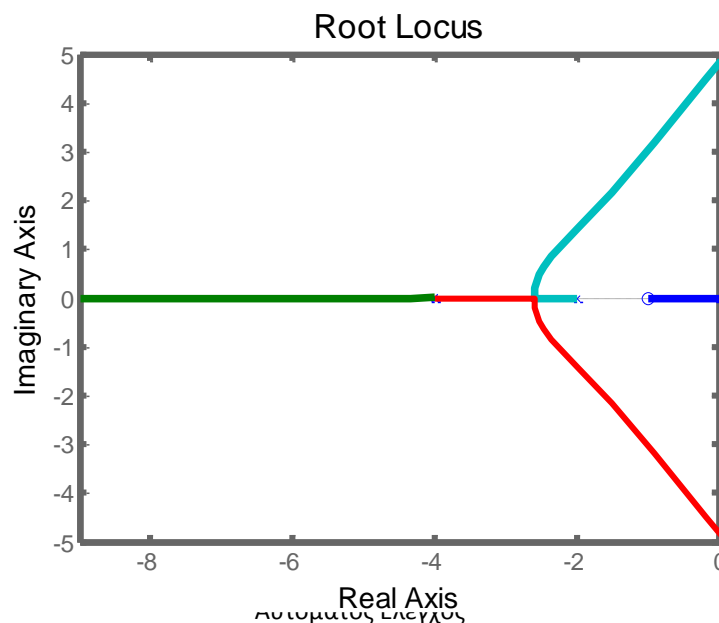




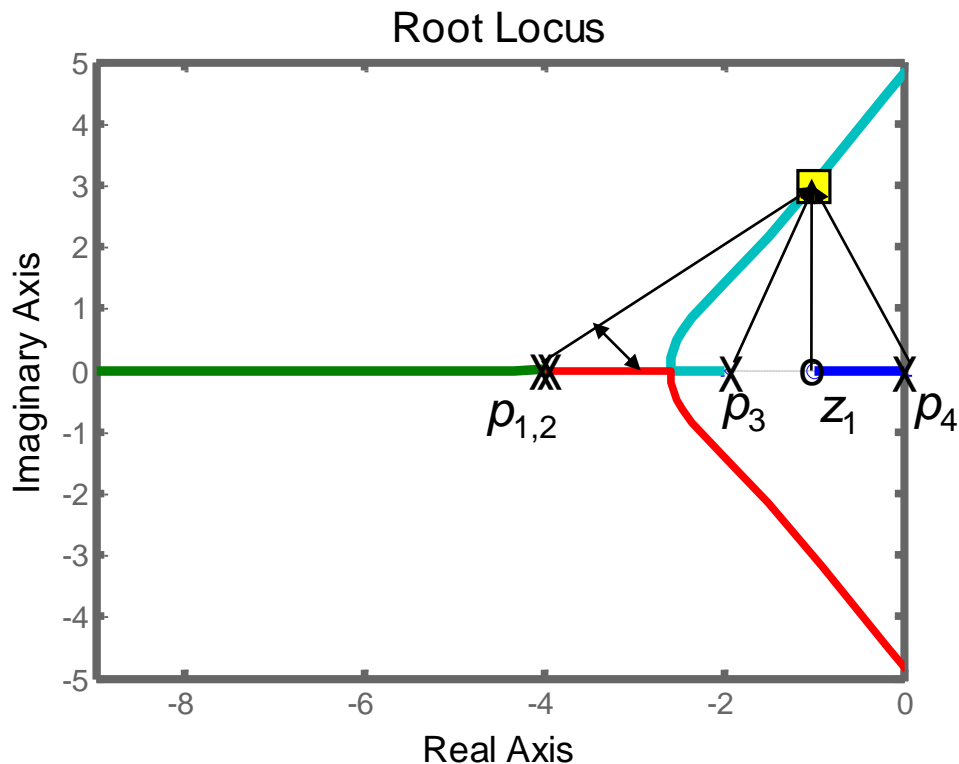
# Γεωμετρικός τύπος ριζών

Αναλυτικότερα για κάθε σημείο  $s$  του ΓΤΡ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{K|s - z_1||s - z_2|\dots|s - z_m|}{|s - p_1||s - p_2|\dots|s - p_n|} = 1$$
$$\arg(s - z_1) + \arg(s - z_2) + \dots + \arg(s - z_m) -$$
$$- \arg(s - p_1) - \arg(s - p_2) - \dots - \arg(s - p_n) = 180 \pm q360$$



# Γεωμετρικός τύπος ριζών



Σχέση μέτρου:  $K|s-z_1|/(|s-p_1||s-p_2||s-p_3||s-p_4|)=1$

Σχέση ορίσματος:  $\vartheta_{z_1}-(\vartheta_{p_1}+\vartheta_{p_2}+\vartheta_{p_3}+\vartheta_{p_4})=180$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Βήμα 1: Καταστρώνουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $1+KG(s)=0$ .

Βήμα 2: Παραγοντοποιούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$1 + \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = 0$$

Βήμα 3: Τοποθετούμε τους πόλους και τα μηδενικά του ανοικτού βρόχου στο μιγαδικό επίπεδο.

Ο ΓΤΡ ξεκινά από τους πόλους για  $K=0$  και καταλήγει στα μηδενικά του ανοικτού βρόχου για  $K \rightarrow +\infty$ .

$$(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) + K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m) = 0$$

Αν τα μηδενικά είναι λιγότερα από τους πόλους, τότε τα τμήματα του ΓΤΡ τείνουν στο άπειρο (μηδενικό στο άπειρο).

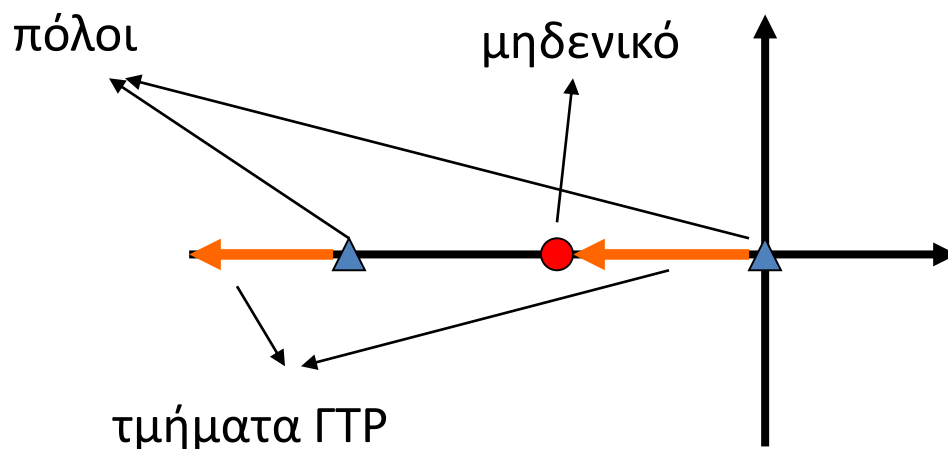


# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Βήμα 4: Τα τμήματα του πραγματικού άξονα στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στο ΓΤΡ αν το πλήθος των πόλων και μηδενικών επί του πραγματικού άξονα στα δεξιά του τμήματος είναι περιττός.

Παράδειγμα

$$1 + \frac{2K(s+2)}{s(s+4)} = 0$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Βήμα 5: Το πλήθος των ανεξάρτητων κλάδων του ΓΤΡ ισούται με το πλήθος των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου.

Βήμα 6: Τα τμήματα του ΓΤΡ είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα του μιγαδικού επίπεδου.

Βήμα 7: Οι κλάδοι που κατευθύνονται σε μηδενικά στο άπειρο οδεύουν κατά μήκος ασύμπτωτων με κέντρο συμμετρίας  $\sigma_A$  και γωνία ως προς τον πραγματικό άξονα  $\varphi_A$ .

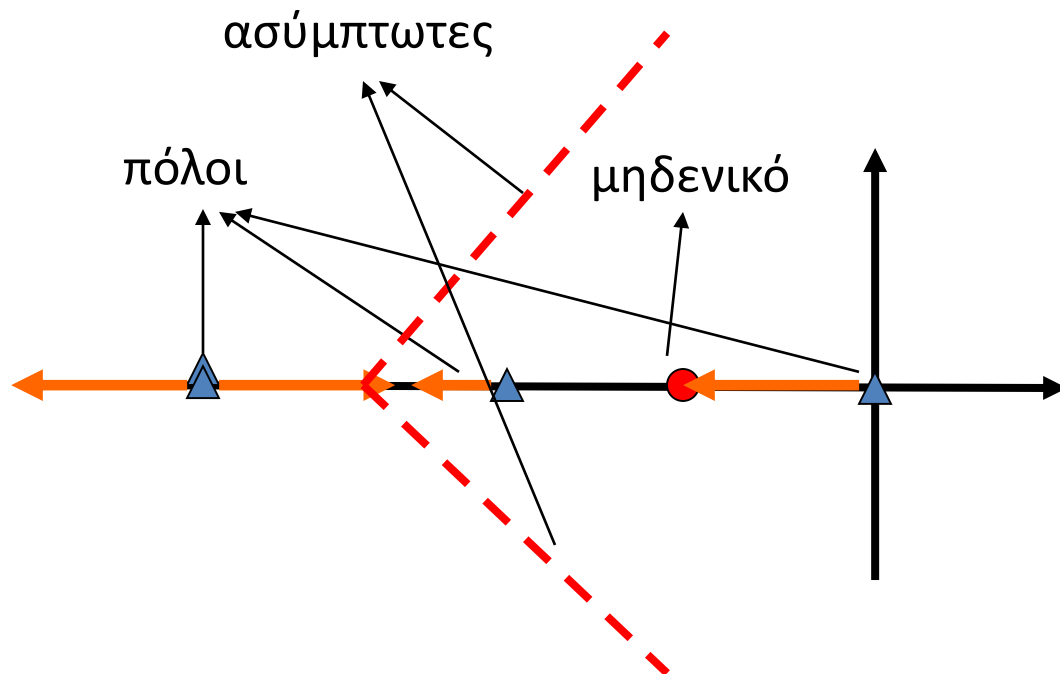
$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^n (p_j) - \sum_{i=1}^m (z_i)}{n - m}$$
$$\varphi_A = \frac{(2q + 1)}{n - m} 180 \quad q = 0, 1, 2, \dots, (n - m - 1)$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2} = 0$$

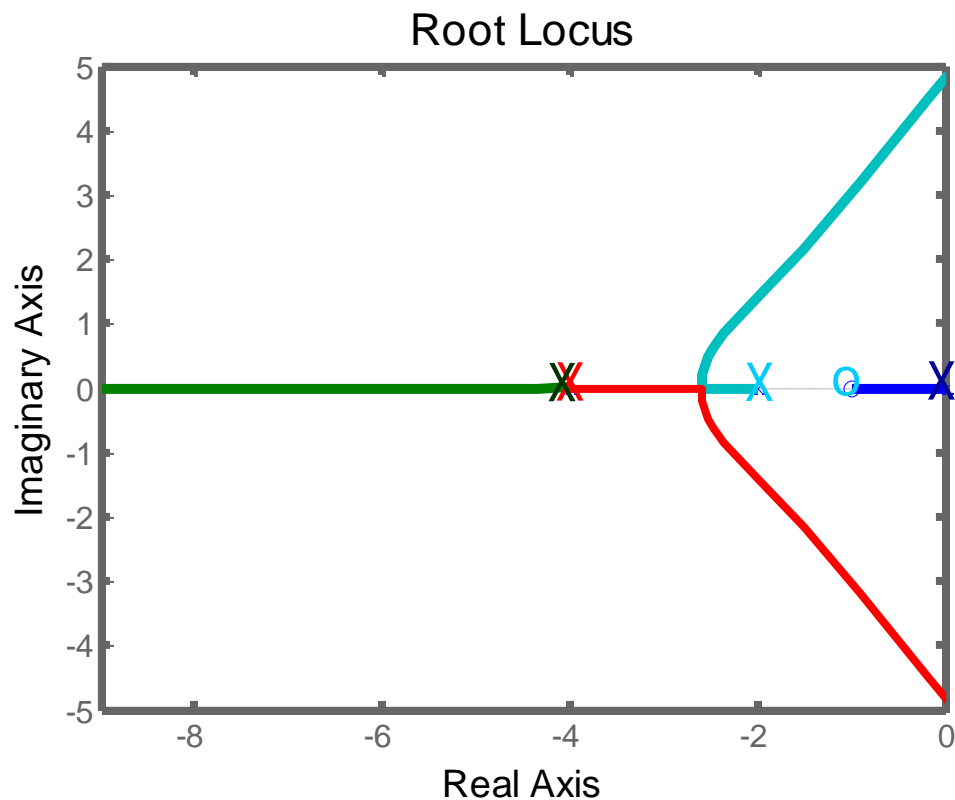


$$\sigma_A = \frac{0 - 2 - 4 - 4 - (-1)}{4 - 1} = \frac{-9}{3} = -3$$
$$\varphi_A = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \quad q = 0$$
$$\varphi_A = \frac{3}{3} 180^\circ = 180^\circ \quad q = 1$$
$$\varphi_A = \frac{5}{3} 180^\circ = 300^\circ \quad q = 2$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2} = 0$$



```
h=tf([1 1],[1 10 32 32 0]);  
rlocus(h)
```



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Βήμα 8: Το σημείο τομής του ΓΤΡ με τον φανταστικό άξονα προσδιορίζεται με το κριτήριο Routh-Hurwitz.

Βήμα 9: Το σημείο που αφήνει ο ΓΤΡ τον πραγματικό άξονα (σημείο θλάσης) ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{-(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)} \right] = 0$$

Οι γωνίες των εφαπτόμενων του ΓΤΡ στο σημείο θλάσης είναι ίσες, προφανώς συνολικά  $360^\circ$ .

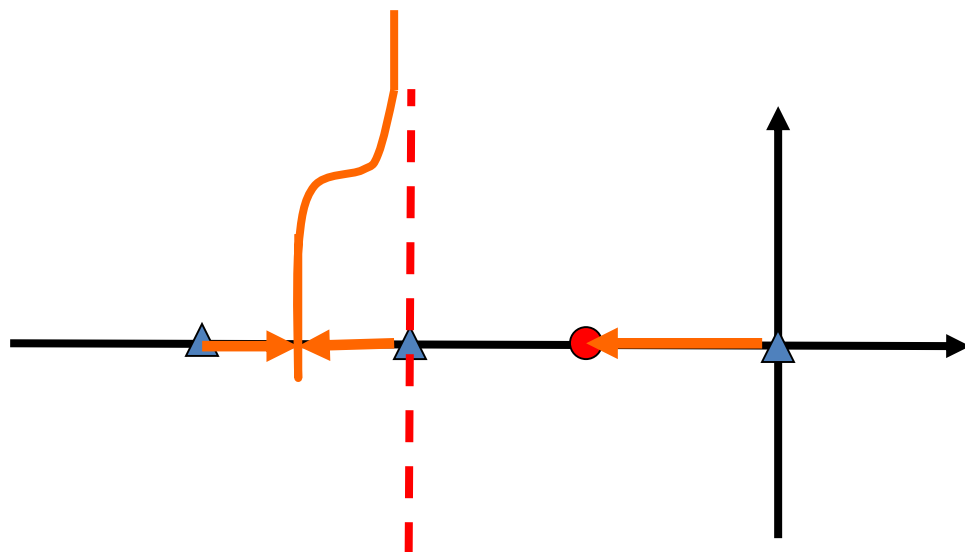




# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0$$



Ασύμπτωτες:

$$\sigma_A = \frac{0 - 2 - 3 - (-1)}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\varphi_A = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \quad q = 0$$

$$\varphi_A = \frac{3}{2} 180^\circ = 270^\circ \quad q = 1$$

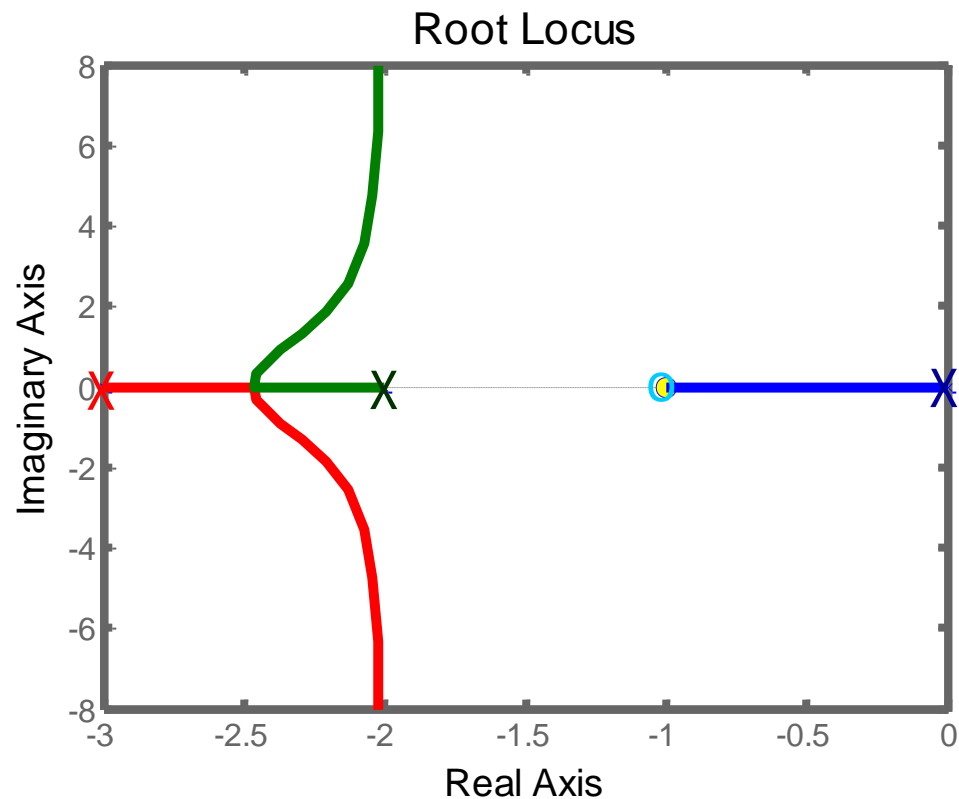
Σημείο θλάσης:

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{-s(s+2)(s+3)}{(s+1)} \right] = 2s^3 + 8s^2 + 10s + 6 = 0 \quad s = -2.54$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

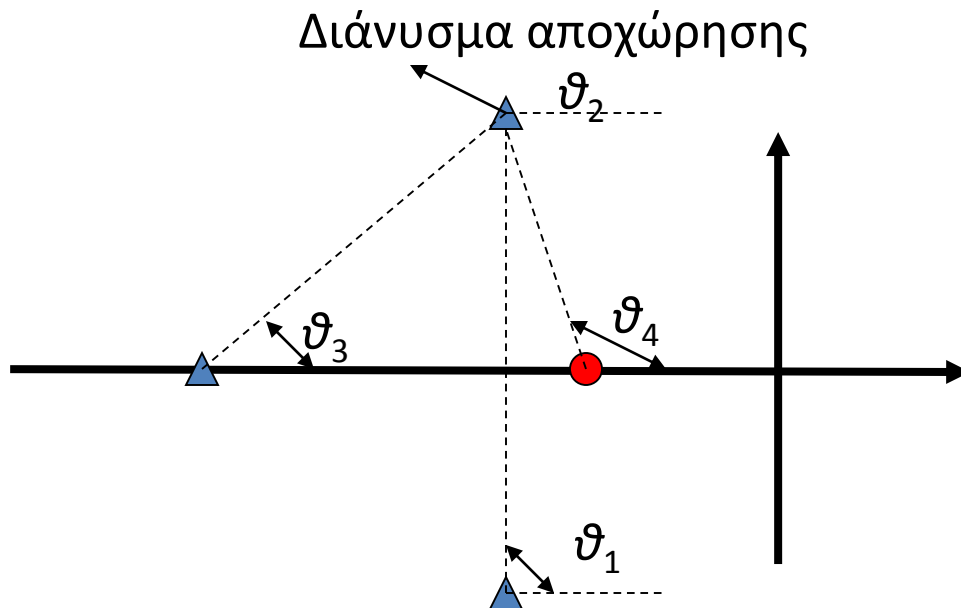


```
h=tf([1 1],[1 5 6 0]);  
rlocus(h)
```



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Βήμα 10: Η γωνία υπό την οποία αναχωρεί ο ΓΤΡ από ένα πόλο ισούται με τη διαφορά μεταξύ της συνολικής γωνίας που προκύπτει εξ' αιτίας των υπολοίπων πόλων και μηδενικών και της απαίτησης των  $180(2q+1)$  λόγω του κριτηρίου φάσης.



$$\vartheta_4 - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = 180 \pm q360$$

$$\vartheta_4 - (90 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = 180$$

$$\vartheta_2 = 90 + (\vartheta_4 - \vartheta_3)$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Βήμα 11: Προσδιορισμός του ΓΤΡ καθώς το  $s$  μεταβάλλεται με βάση τη σχέση του ορίσματος  $\arg(G(s))=180^\circ \pm q360^\circ$ .

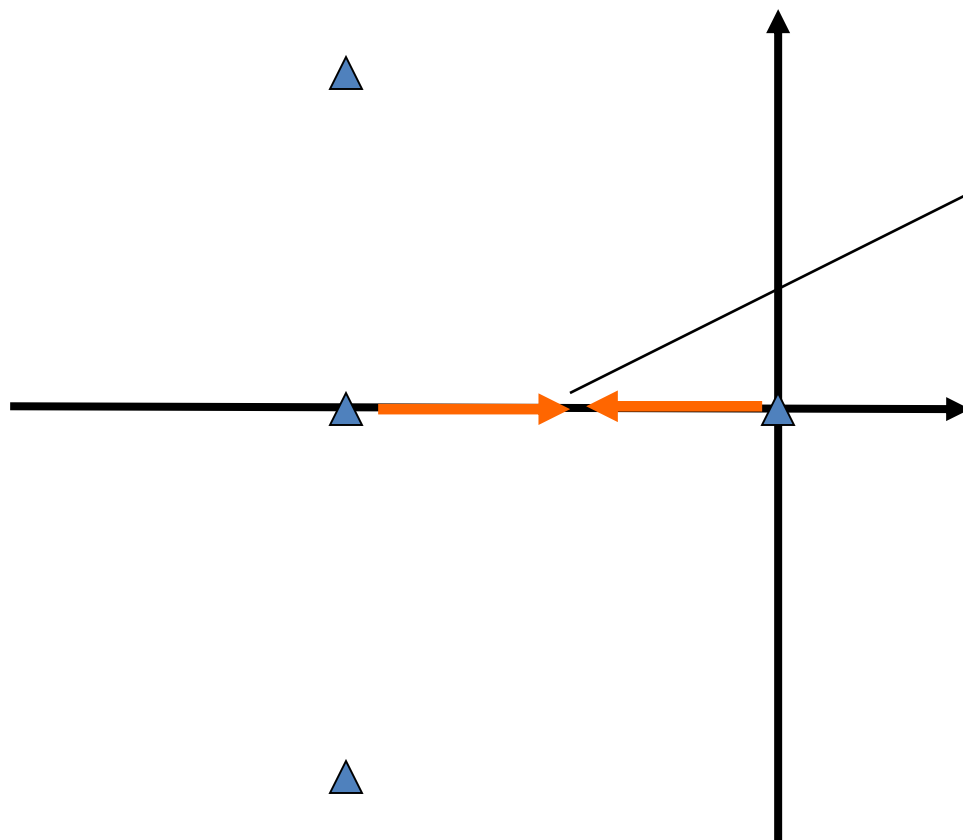
Βήμα 12: Προσδιορισμός του κέρδους  $K$  για μια συγκεκριμένη ρίζα με βάση τη σχέση του μέτρου  $K|G(s)|=1$ .



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0$$



Κλάδος του ΓΤΡ.

Τοποθέτηση πόλων  
και μηδενικών.

Πόλοι:  $0, -4, -4 \pm 4j$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

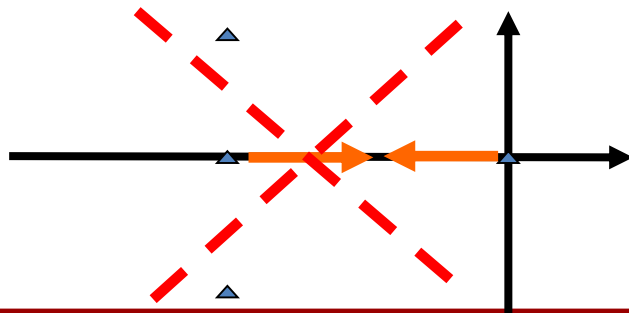
$$1 + \frac{K}{s(s+4)(s+4+4j)(s+4-4j)} = 0$$

Ένα τμήμα του ΓΤΡ βρίσκεται στον πραγματικό άξονα.

Ο ΓΤΡ έχει 4 ανεξάρτητους κλάδους (#πόλων-#μηδενικών=4).

Οι κλάδοι τείνουν στο άπειρο κατά την κατεύθυνση 4 ασύμπτωτων.

$$\sigma_A = \frac{0 - 4 - 4 - 4}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$
$$\varphi_A = \frac{(2q+1)}{4} 180^\circ = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ \quad q = 0, 1, 2, 3$$



Αυτόματος Έλεγχος

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Εφαρμογή κριτηρίου Routh-Hurwitz για τον υπολογισμό του σημείου τομής με τον φανταστικό άξονα για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$s^4$	1	64	$K$
$s^3$	12	128	
$s^2$	$b_1$	$K$	
$s^1$	$c_1$		
$s^0$	$K$		

$$s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K = 0$$

$$b_1 = (12 \times 64 - 128) / 12 = 53.33$$

$$c_1 = (53.33 \times 128 - 12 K) / 53.33$$

Σημείο τομής  $K=568.89$  (για ευστάθεια πρέπει  $K < 568.89$ ).

Με το βοηθητικό πολυώνυμο (το πολυώνυμο που προηγείται της γραμμής που μηδενίζεται το στοιχείο της πρώτης στήλης):

$$53.33 s^2 + K = 0$$

$$53.33 (s^2 + 10.67) = 0$$

Υπολογίζουμε τις ρίζες  $\pm 3.266j$ .



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

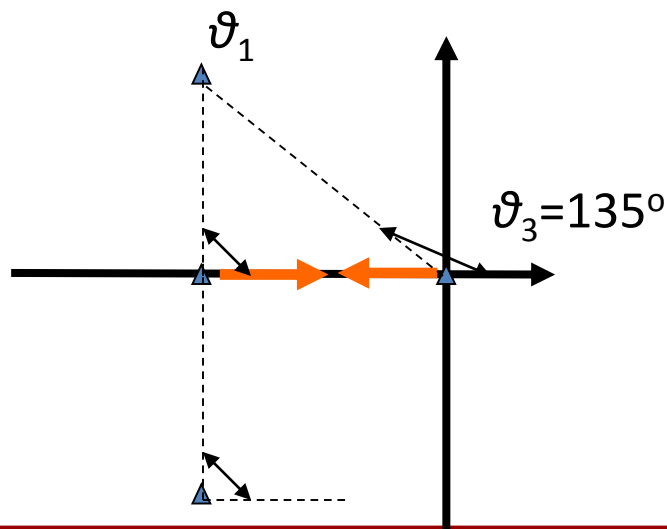
Σημείο θλάσης:

$$K = -s(s+4)(s^2 + 8s + 32)$$
$$\frac{d}{ds} [-s(s+4)(s^2 + 8s + 32)] = 0$$
$$-4s^3 - 36s^2 - 128s - 128 = 0$$
$$s = -1.5767$$

Γωνία αναχώρησης:

$$\vartheta_1 + 90 + 90 + \vartheta_3 = 180$$

$$\vartheta_1 = -135$$



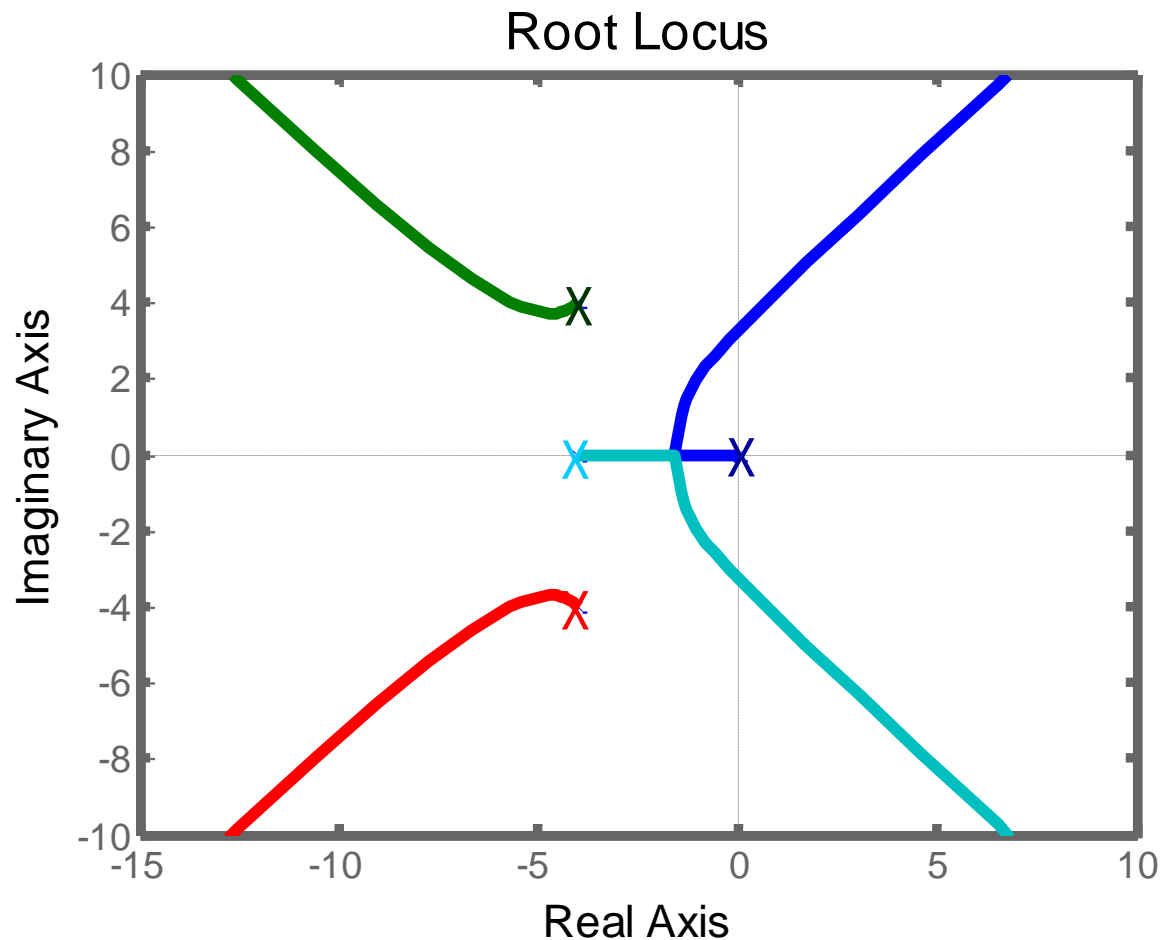
Αυτόματος Έλεγχος

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών





# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

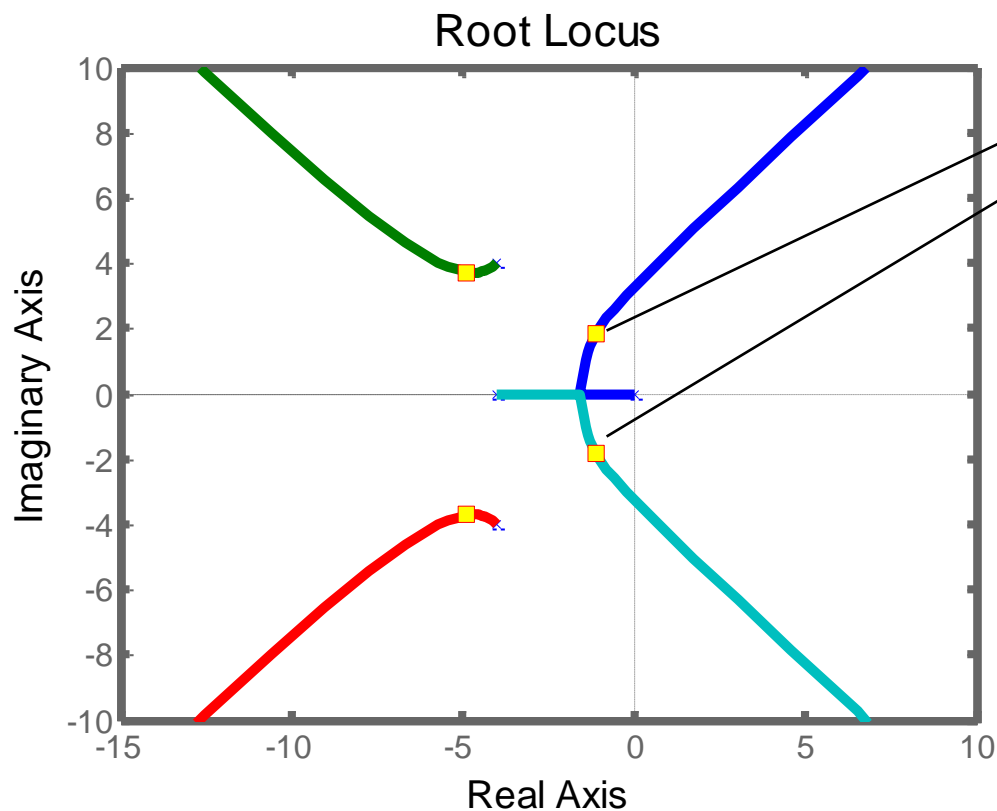


$$1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0$$

```
g=tf([1],[1 12 64 128 0]);  
rlocus(g)
```



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ



Κυρίαρχοι (επικρατούντες)  
πόλοι.

$$1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0$$

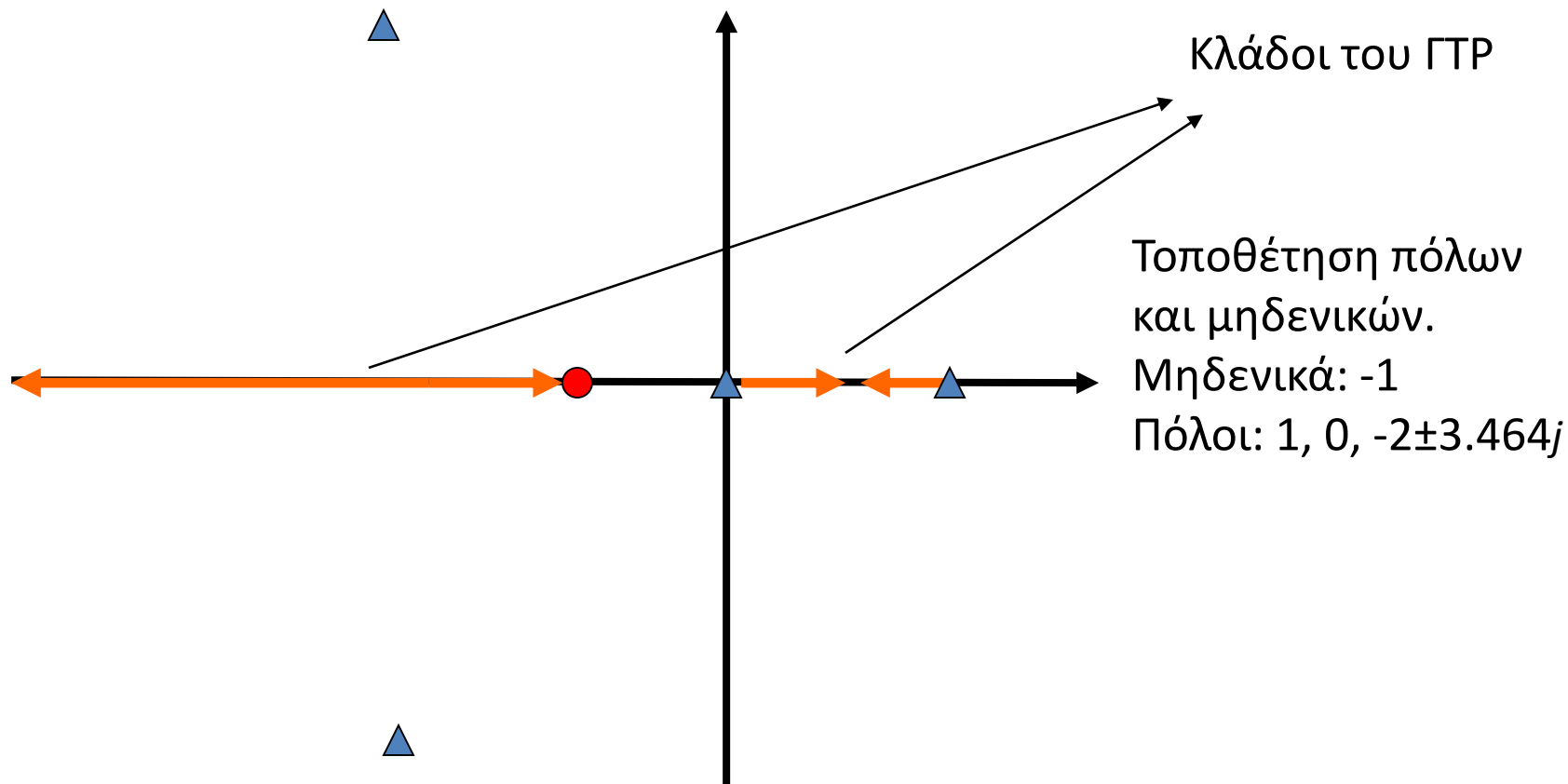
```
g=  
tf([1],[1 12 64 128 0]);  
rlocus(g)  
[K,poles]=rlocfind(g)  
k = 1.7196e+002  
poles =  
-4.8969e+00 +3.7242e+00i  
-4.8969e+00 -3.7242e+00i  
-1.1031e+00 +1.8238e+00i  
-1.1031e+00 -1.8238e+00i
```



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = 0$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

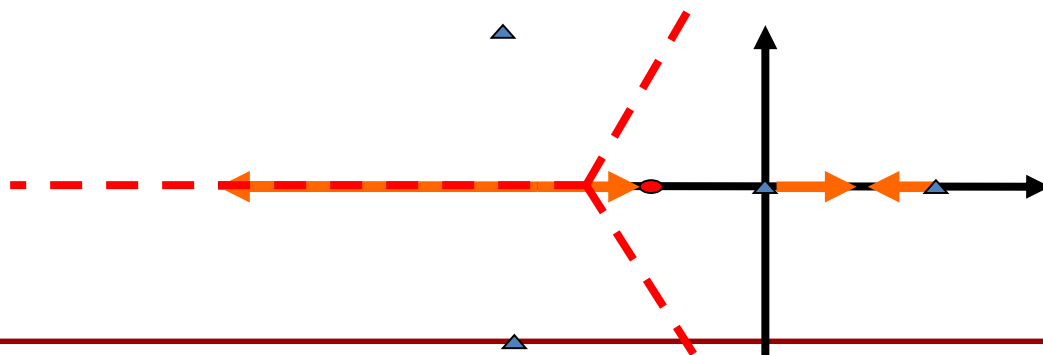
$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+2+3.464j)(s+2-3.464j)} = 0$$

Ο ΓΤΡ έχει 3 ανεξάρτητους κλάδους (#πόλων-#μηδενικών=3)

Ένα τμήμα του ΓΤΡ βρίσκεται στον πραγματικό άξονα.

Οι κλάδοι τείνουν στο άπειρο κατά την κατεύθυνση 3 ασύμπτωτων.

$$\sigma_A = \frac{0+1-2-2+1}{4-1} = -\frac{2}{3}$$
$$\varphi_A = \frac{(2q+1)}{4-1} 180^\circ = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ \quad q = 0, 1, 2$$



Αυτόματος Έλεγχος

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Εφαρμογή κριτηρίου Routh-Hurwitz για τον υπολογισμό του σημείου τομής με τον φανταστικό άξονα στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$s^4$	1	12	K
$s^3$	3	K-16	
$s^2$	$b_1$	K	
$s^1$	$c_1$		
$s^0$	$d_1$		

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K - 16)s + K = 0$$

$$b_1 = (52 - K)/3 \quad c_1 = (-K^2 + 59K - 832)/(52 - K) \quad d_1 = K$$

Για ευστάθεια  $23.3 \leq K \leq 35.7$ .

Από βοηθητικό πολυώνυμο  $(52 - K)/3 s^2 + K = 0$ .

$$s = \pm 2.56j \text{ για } K = 35.7.$$

$$s = \pm 1.56j \text{ για } K = 23.3.$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

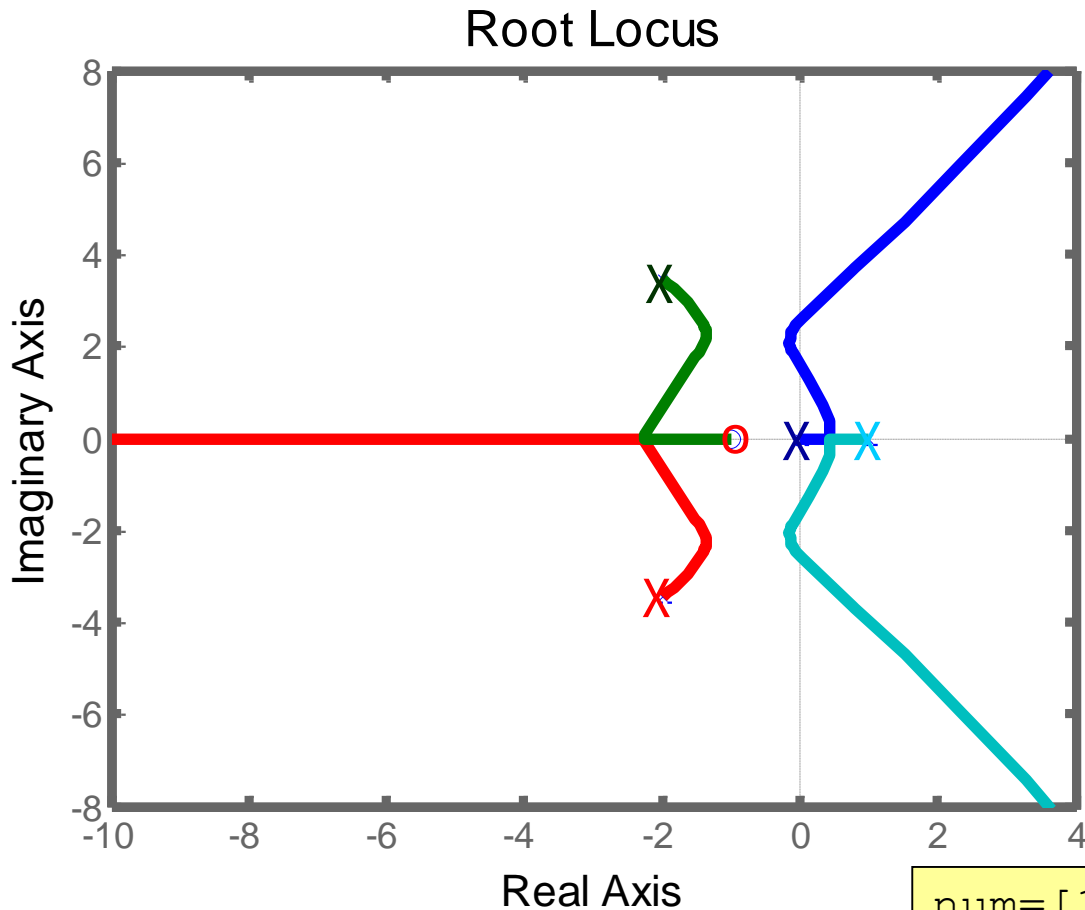
Σημείο θλάσης:

$$K = -\frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{(s+1)}$$
$$\frac{d}{ds} \left[ -\frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{(s+1)} \right] = 0$$
$$-\frac{s^4+10s^3+21s^2+24s-16}{(s+1)^2} = 0$$
$$s = -2.26, 0.45, -0.76 \pm j2.16$$

Τα σημεία  $s=-2.26$  και  $s=0.45$  ανήκουν σε τμήμα του πραγματικού άξονα που είναι κλάδος του ΓΤΡ και συνεπώς είναι σημεία θλάσης (σημείο εγκατάλειψης ή σημείο εισόδου του πραγματικού άξονα).



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ



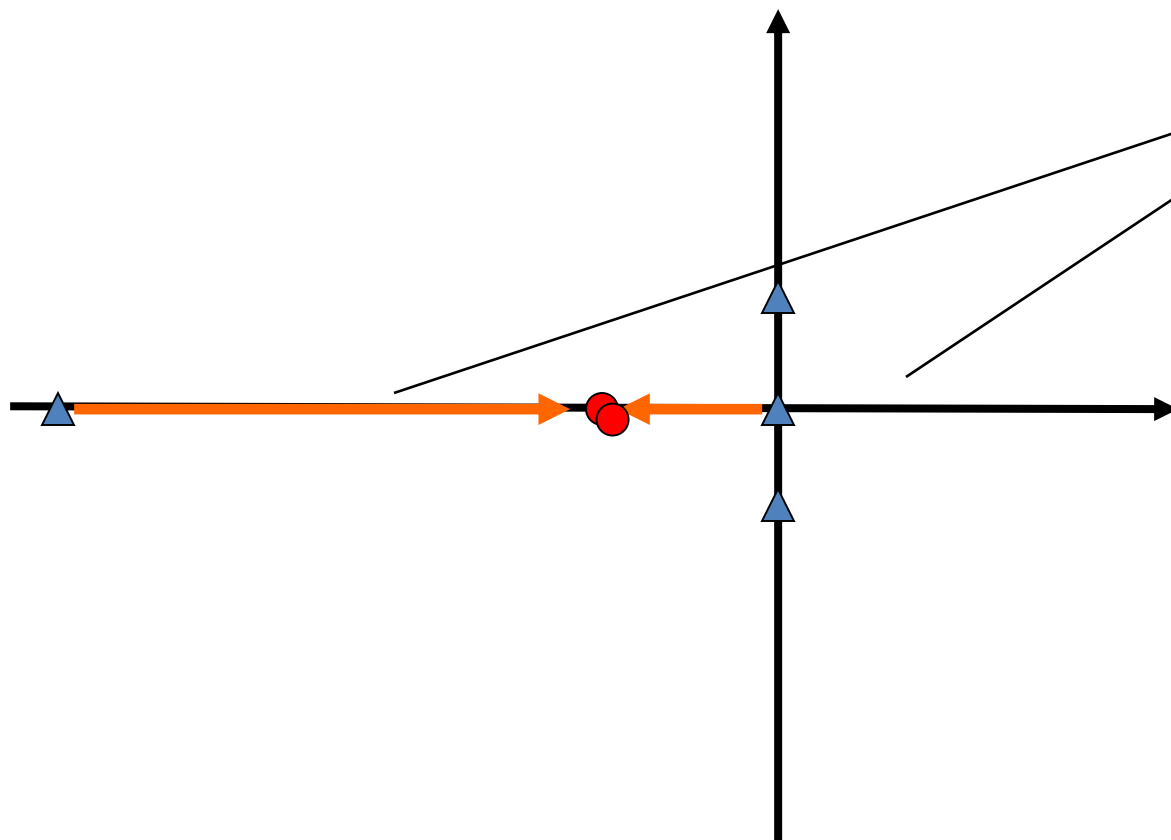
```
num=[1 1];  
den=conv([1 -1],[1 4 16]);  
den=conv(den,[1 0]);  
g=tf(num,den);  
rlocus(g)
```



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$1 + \frac{K(s+2)^2}{s(s^2+1)(s+8)} = 0$$



Κλάδοι του ΓΤΡ.

Τοποθέτηση πόλων  
και μηδενικών.

Πόλοι:  $0, \pm j, -8$ .

Μηδενικά:  $-2$  (διπλό).





# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

$$1 + \frac{K(s+2)^2}{s(s+8)(s+j)(s-j)} = 0$$

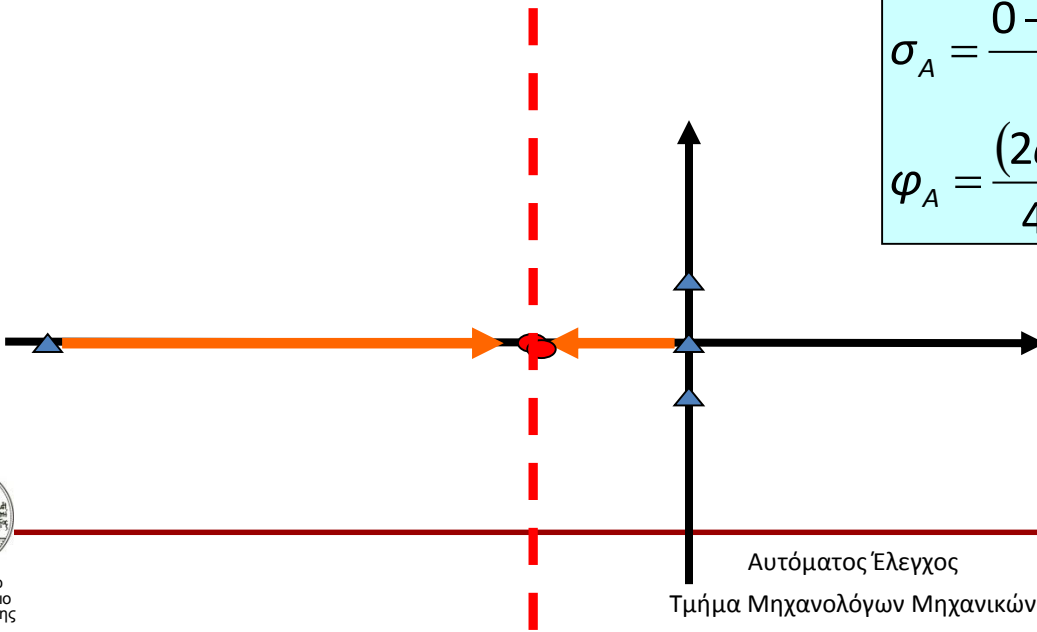
Ο ΓΤΡ έχει 2 ανεξάρτητους κλάδους (#πόλων-#μηδενικών=2).

Δυο τμήματα του ΓΤΡ βρίσκονται στον πραγματικό άξονα.

Δυο πόλοι (0, -8) τείνουν στα δυο μηδενικά στο (-2).

Δυο κλάδοι τείνουν στο άπειρο κατά την κατεύθυνση 2 ασύμπτωτων.

$$\sigma_A = \frac{0 - 8 + j - j - (-2 - 2)}{4 - 2} = \frac{-8 + 4}{2} = -2$$
$$\varphi_A = \frac{(2q + 1)}{4 - 2} 180^\circ = 90^\circ, 270^\circ \quad q = 0, 1$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Εφαρμογή κριτηρίου Routh-Hurwitz για τον υπολογισμό του σημείου τομής με τον φανταστικό άξονα για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$s^4$	1	$1+K$	$4K$	$s^4 + 8s^3 + (1+K)s^2 + (8+4K)s + 4K = 0$
$s^3$	8	$8+4K$		
$s^2$	$b_1$	$b_2$		
$s^1$	$c_1$			
$s^0$	$d_1$			

$$b_1 = 4K/8$$

$$b_2 = 4K$$

$$c_1 = (2K-28)$$

$$d_1 = 4K$$

Για ευστάθεια πρέπει  $c_1 \geq 0$   $(2K-28) \geq 0 \Leftrightarrow K \geq 14$ .

Από βοηθητικό πολυώνυμο  $4K/8 s^2 + 4K = 0$ .

$s = \pm 2.8284j$  για  $K=14$ .

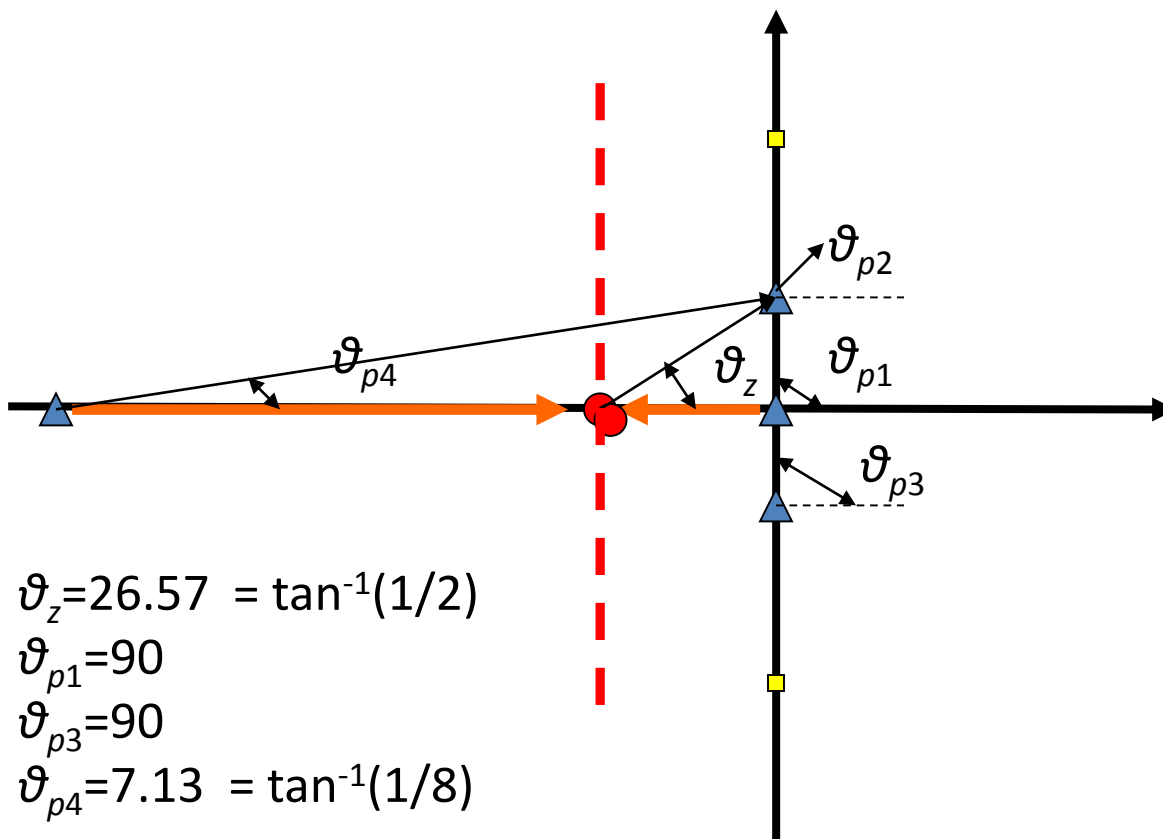


# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ

Σημείο θλάσης: ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ.

Γωνία αναχώρησης από πόλους  $\pm j$

$$\vartheta_z + \vartheta_z - (\vartheta_{p1} + \vartheta_{p2} + \vartheta_{p3} + \vartheta_{p4}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vartheta_{p2} = 46^\circ$$



$$\vartheta_z = 26.57 = \tan^{-1}(1/2)$$

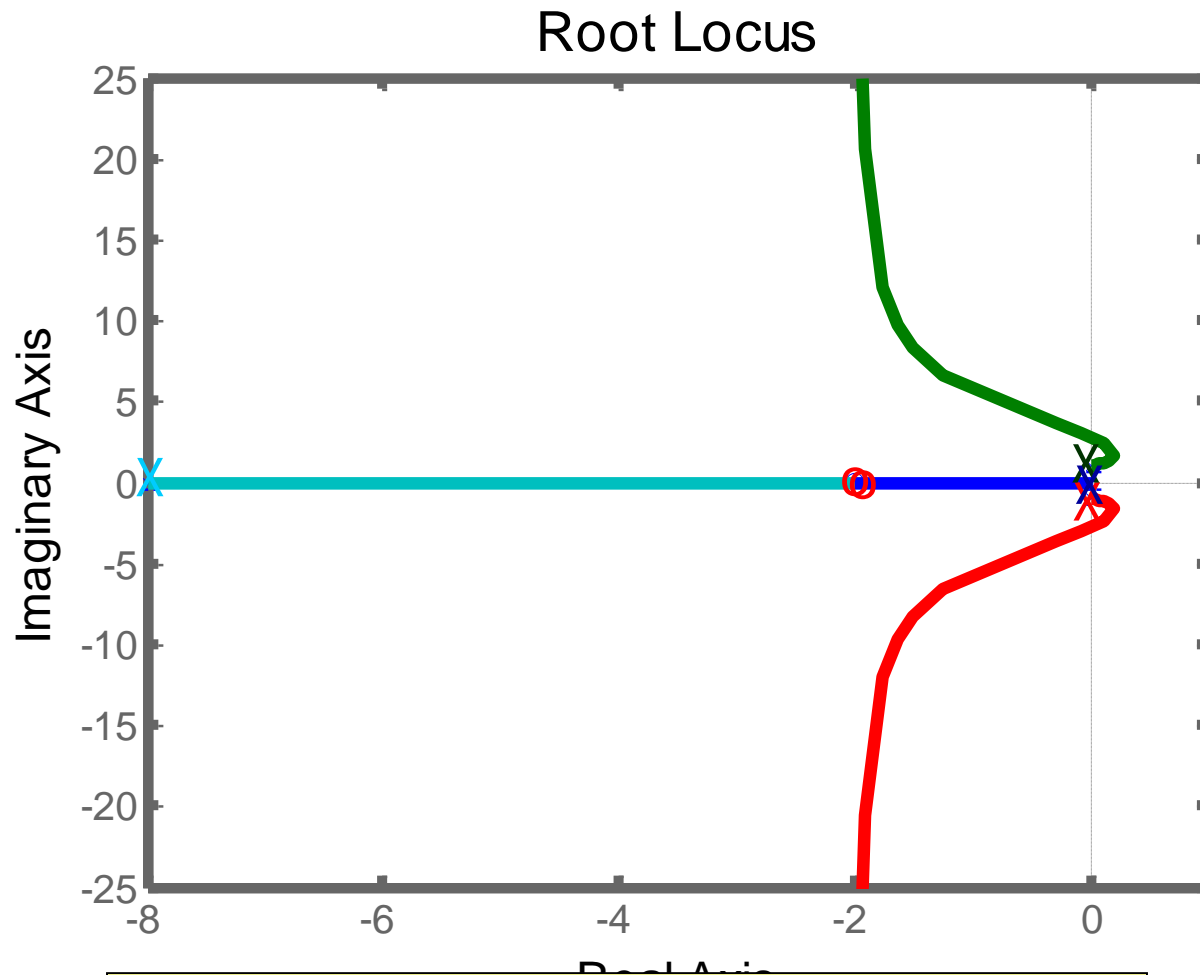
$$\vartheta_{p1} = 90$$

$$\vartheta_{p3} = 90$$

$$\vartheta_{p4} = 7.13 = \tan^{-1}(1/8)$$



# Κανόνες κατασκευής ΓΤΡ



```
num=[1 4 2];  
den=conv([1 8],[1 0 1]);  
g=tf(num,den);  
rlocus(g)
```



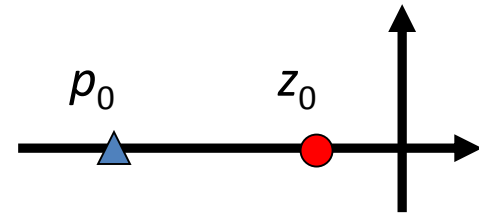
# Σχεδίαση αντισταθμιστών με το ΓΤΡ

Αντισταθμιστές προήγησης φάσης.

$$G_c(s) = K_c \frac{(s - z_0)}{(s - p_0)}$$

Το μέτρο του μηδενικού είναι μικρότερο από το μέτρο του πόλου.

$$|z_0| < |p_0|$$



Μετακινεί το ΓΤΡ προς τα αριστερά με αποτέλεσμα να:

- Βελτιώνει το περιθώριο ευστάθειας.
- Επιταχύνει την απόκριση του συστήματος.

Ενδεχομένως να αυξάνει το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση.



# Σχεδίαση αντισταθμιστών με το ΓΤΡ

Αντισταθμιστές προήγησης φάσης.

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^n (p_j) - \sum_{i=1}^m (z_i)}{n - m} = 0$$

Το σημείο συμμετρίας των ασύμπτωτων του ΓΤΡ μετακινείται προς τα αριστερά στο μιγαδικό επίπεδο επειδή αυξάνεται ο αριθμητής, λόγω του μεγαλύτερου σε απόλυτη τιμή πόλου, ενώ ο παρονομαστής παραμένει αμετάβλητος (προσθήκη ενός πόλου και μηδενικού αντίστοιχα).

Ως αποτέλεσμα, ο ΓΤΡ θα μετακινηθεί προς τα αριστερά, μακρύτερα από το όριο της ευστάθειας, προς ταχύτερα δυναμικά χαρακτηριστικά.



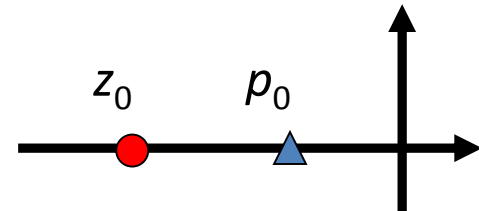
# Σχεδίαση αντισταθμιστών με το ΓΤΡ

Αντισταθμιστές καθυστέρησης φάσης.

$$G_c(s) = K_c \frac{(s - z_0)}{(s - p_0)}$$

Το μέτρο του πόλου είναι μικρότερο από το μέτρο του μηδενικού.

$$|z_0| > |p_0|$$



Μετακινεί το ΓΤΡ προς τα δεξιά με αποτέλεσμα να:

- Μειώνει το περιθώριο ευστάθειας.
- Επιβραδύνει την απόκριση του συστήματος.

Ωστόσο μειώνει το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση (π.χ. ολοκληρωτής).



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

## Μεθοδολογία

Bishop & Dorf, κεφ. 10.5

Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου,  
Εκδ. Τζιόλα, 2005

Βήμα 1. Συσχέτιση των προδιαγραφών του συστήματος με τη θέση των επιθυμητών κυρίαρχων πόλων.

Βήμα 2. Σχεδίαση του ΓΤΡ του μη-αντισταθμισμένου συστήματος.

Βήμα 3. Έλεγχος αν οι επιθυμητοί πόλοι ανήκουν στο ΓΤΡ (αν ναι, τότε επιλέγεται μόνο το κατάλληλο κέρδος  $K$  – δε χρειάζεται αντισταθμιστής).

Βήμα 4. Τοποθέτηση του μηδενικού του αντισταθμιστή στον πραγματικό άξονα ακριβώς κάτω από τη θέση του επιθυμητού πόλου του αντισταθμισμένου συστήματος ή στα αριστερά των πρώτων δυο πραγματικών πόλων.





# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Βήμα 5. Προσδιορισμός της θέσης του πόλου ώστε να ικανοποιείται η σχέση του ορίσματος για τους επιθυμητούς πόλους.

Βήμα 6. Υπολογισμός του κέρδους του συστήματος στη θέση της επιθυμητής ρίζας από τη σχέση του μέτρου.

Βήμα 7. Υπολογισμός της σταθεράς σφάλματος.

Βήμα 8. Επανάληψη των βημάτων 4-7 αν η σταθερά σφάλματος δεν είναι ικανοποιητική.



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$GH(s) = \frac{K}{s^2}$$

Προδιαγραφές:

- Χρόνος αποκατάστασης,  $T_s \leq 4$  s.
- Ποσοστό υπερέψωσης σε βηματική απόκριση  $\leq 35\%$ .

$$T_s = 4 / (\zeta \omega_n) \leq 4 \Leftrightarrow \zeta \omega_n \geq 1.$$

Από σχετικό διάγραμμα  $\zeta \geq 0.32$ .

Επιλέγονται ως ρίζες του αντισταθμισμένου συστήματος οι  $r_{1,2} = -1 \pm j 2$  που ικανοποιούν τις προδιαγραφές.



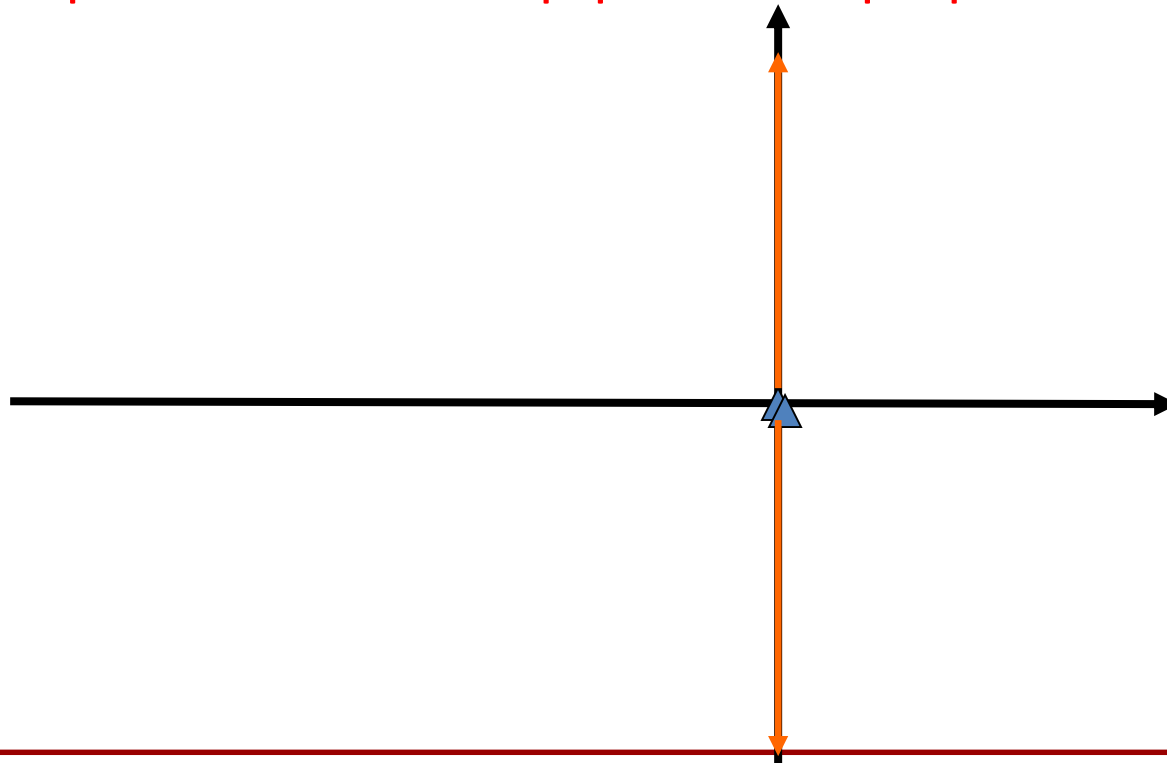
# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου:

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K}{s^2}$$

Ο ΓΤΡ είναι ο φανταστικός άξονας.

Άρα χρειάζεται αντιστάθμιση αφού οι επιθυμητές ρίζες δεν ανήκουν στο ΓΤΡ του μη αντισταθμισμένου συστήματος.

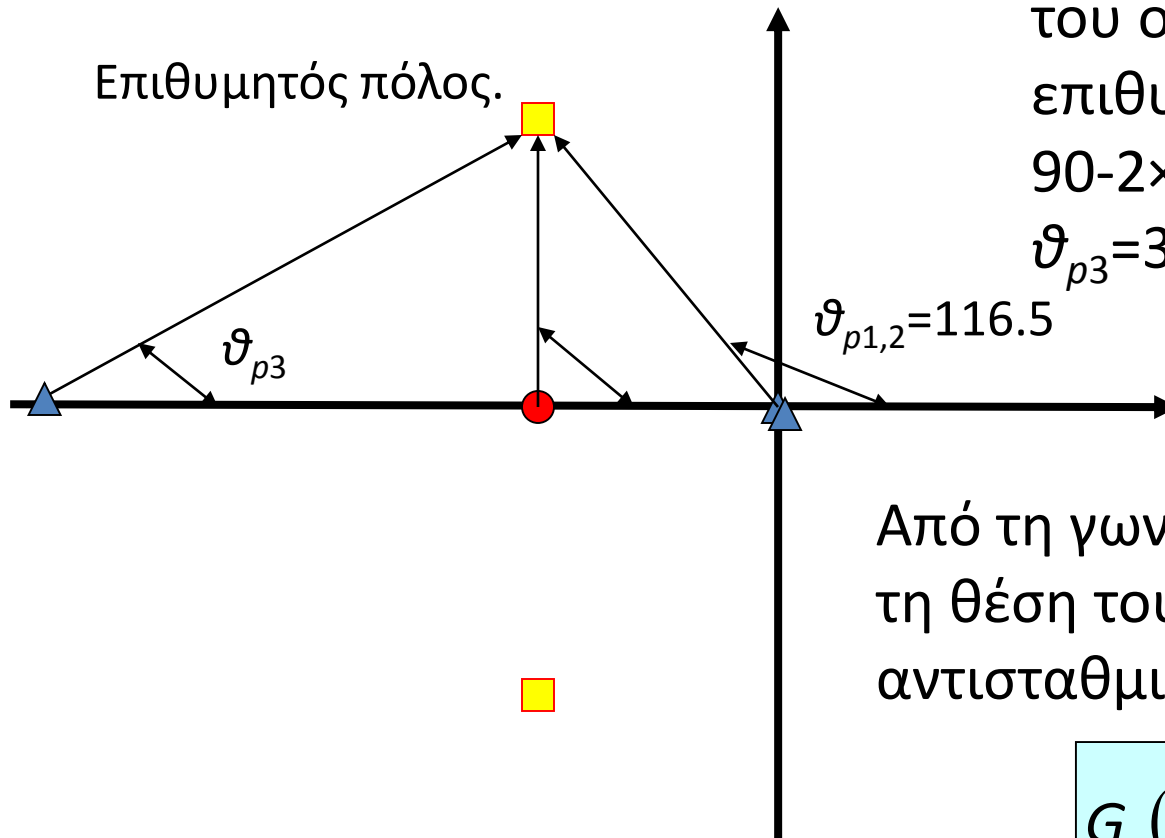


# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Θέτουμε ένα μηδενικό του αντισταθμιστή ακριβώς κάτω από τον επιθυμητό πόλο, δηλαδή  $s=-z=-1$ .

Εφαρμόζουμε το κριτήριο του ορίσματος για την επιθυμητή ρίζα:

$$90 - 2 \times 116.5 - \vartheta_{\rho 3} = 180 \Leftrightarrow \vartheta_{\rho 3} = 36.86^\circ$$

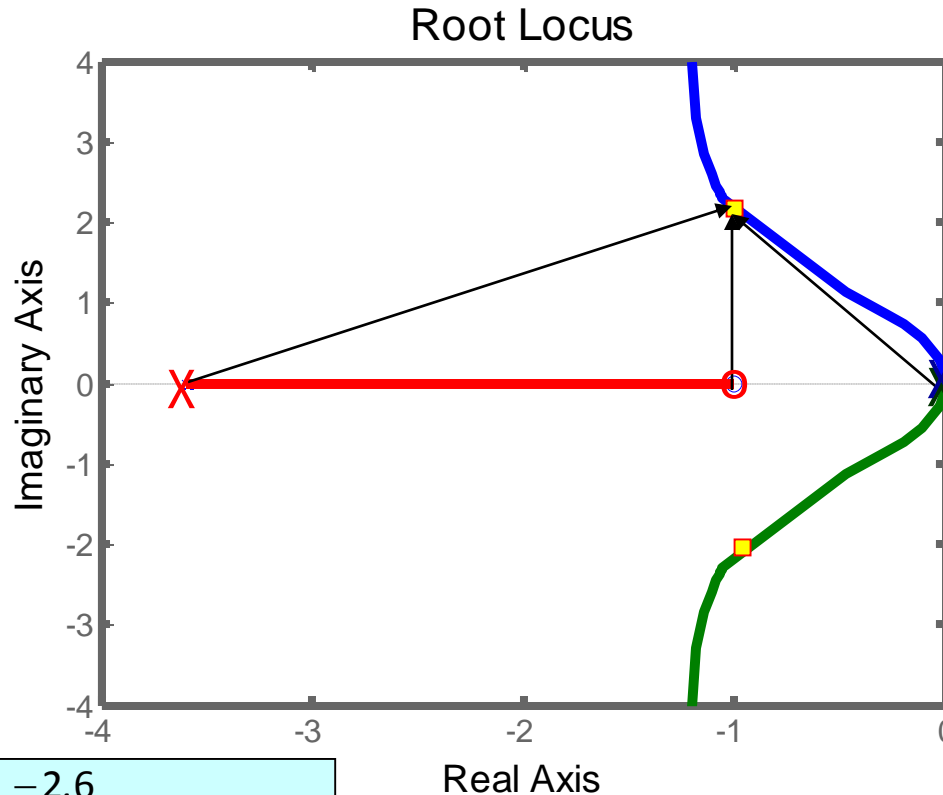


Από τη γωνία  $\vartheta_{\rho 3}$  υπολογίζουμε τη θέση του πόλου του αντισταθμιστή  $\rho = -3.6$ .

$$G_c(s) = K \frac{(s+1)}{(s+3.6)}$$



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ



ΓΤΡ  
αντισταθμισμένου  
συστήματος.

$$\sigma_A = \frac{-3.6 - (-1)}{3 - 1} = \frac{-2.6}{2} = -1.3$$

$$\varphi_A = \frac{(2q+1)}{3-1} 180^\circ = 90^\circ, 270^\circ \quad q=0,1$$

$$GH(s)G_c(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+3.6)}$$

Υπολογισμός παραμέτρου  $K$  στον επιθυμητό πόλο από τον κανόνα του μέτρου,  $K = (2.23)^2 (3.25) / 2 = 8.1$

# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Έλεγχος σφάλματος σε μόνιμη κατάσταση.

Σύστημα τύπου 2, άρα το σφάλμα θέσης και ταχύτητας είναι μηδέν.

Το σφάλμα επιτάχυνσης υπολογίζεται ως:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(s+1)}{s^2(s+3.6)} = \frac{8.1}{3.6} = 2.25$$



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Προδιαγραφές:

- Συντελεστής απόσβεσης κύριων ριζών,  $\zeta=0.45$ .
- Χρόνος αποκατάστασης  $T_s=1$  s.
- Σφάλμα μόνιμης κατάστασης σε μεταβολή κλίσης = 5%.

$$K_v = A/e_{ss} = A/(0.05A) = 20$$
$$T_s = 4/(\zeta\omega_n) \leq 1 \Leftrightarrow \zeta\omega_n \geq 4$$

Επιλέγεται  $\omega_n=9$ .

Επιλέγονται ως πόλοι του αντισταθμισμένου συστήματος οι

$$r_{1,2} = \zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -4 \pm j8.$$



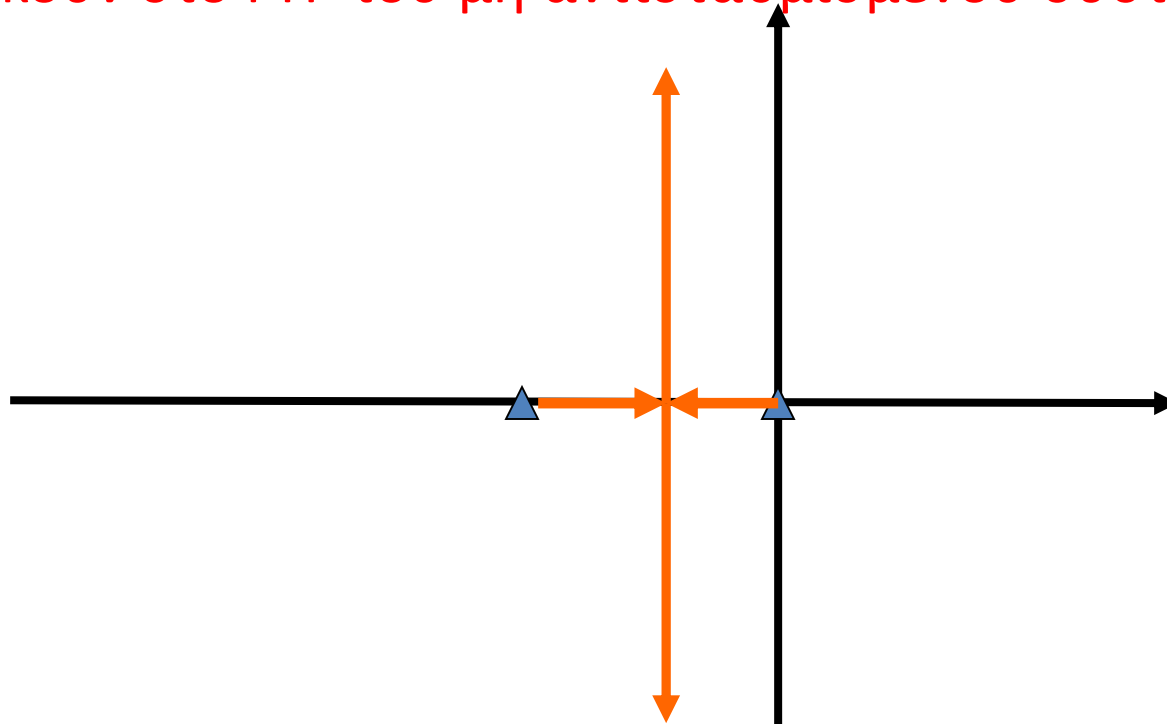
# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου:

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K}{s(s+2)}$$

Σχεδιάζεται ο ΓΤΡ του μη αντισταθμισμένου συστήματος.

Άρα χρειάζεται αντιστάθμιση, αφού οι επιθυμητές ρίζες δεν ανήκουν στο ΓΤΡ του μη αντισταθμισμένου συστήματος.



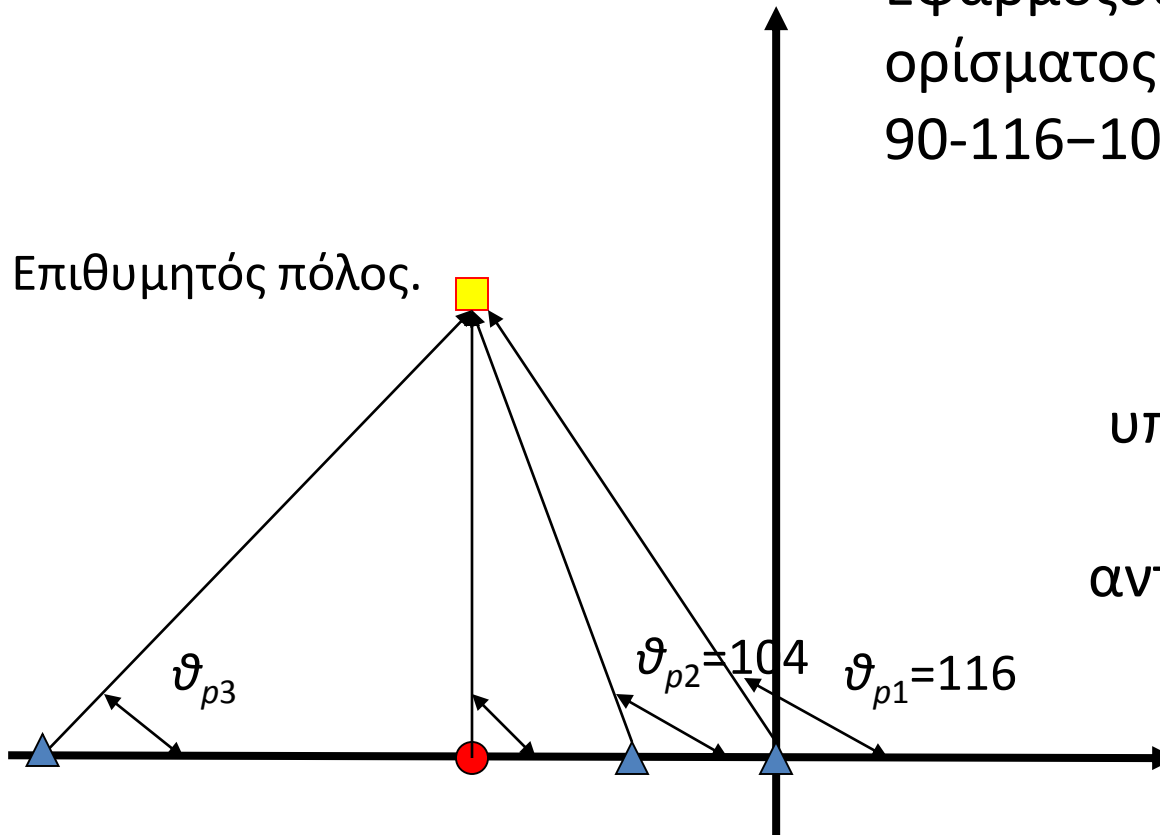


# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Θέτουμε ένα μηδενικό του αντισταθμιστή ακριβώς κάτω από τον επιθυμητό πόλο, δηλαδή  $s=-z=-4$ .

Εφαρμόζουμε το κριτήριο του ορίσματος στον επιθυμητό πόλο:  
 $90-116-104-\vartheta_{p3}=180 \Leftrightarrow \vartheta_{p3}=50^\circ$

Επιθυμητός πόλος.

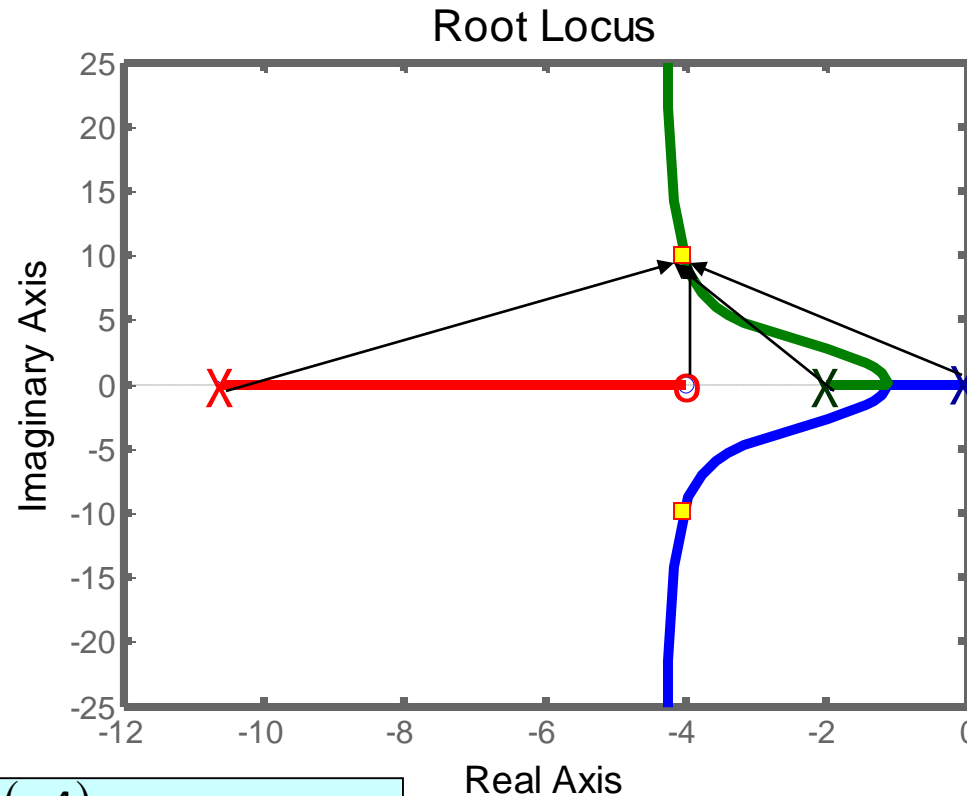


Από τη γωνία υπολογίζουμε τη θέση του πόλου του αντισταθμιστή  $p=-10.6$ .

$$G_c(s) = K \frac{(s+4)}{(s+10.6)}$$



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ



$$\sigma_A = \frac{-10.6 - 2 - (-4)}{3 - 1} = -4.3$$

$$\varphi_A = \frac{(2q + 1)}{3 - 1} 180^\circ = 90^\circ, 270^\circ \quad q = 0, 1$$

Real Axis

Υπολογισμός παραμέτρου  $K$  στην επιθυμητή ρίζα από τον κανόνα του μέτρου:  $K = 9 (8.25) (10.4) / 8 = 96.5$

$$GH(s)G_c(s) = \frac{K(s + 4)}{s(s + 2)(s + 10.6)}$$

Αυτόματος Έλεγχος

# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

Έλεγχος σφάλματος σε μόνιμη κατάσταση.

Σύστημα τύπου 1, άρα το σφάλμα θέσης σε βηματική μεταβολή είναι μηδέν.

Το σφάλμα ταχύτητας υπολογίζεται ως:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)}$$

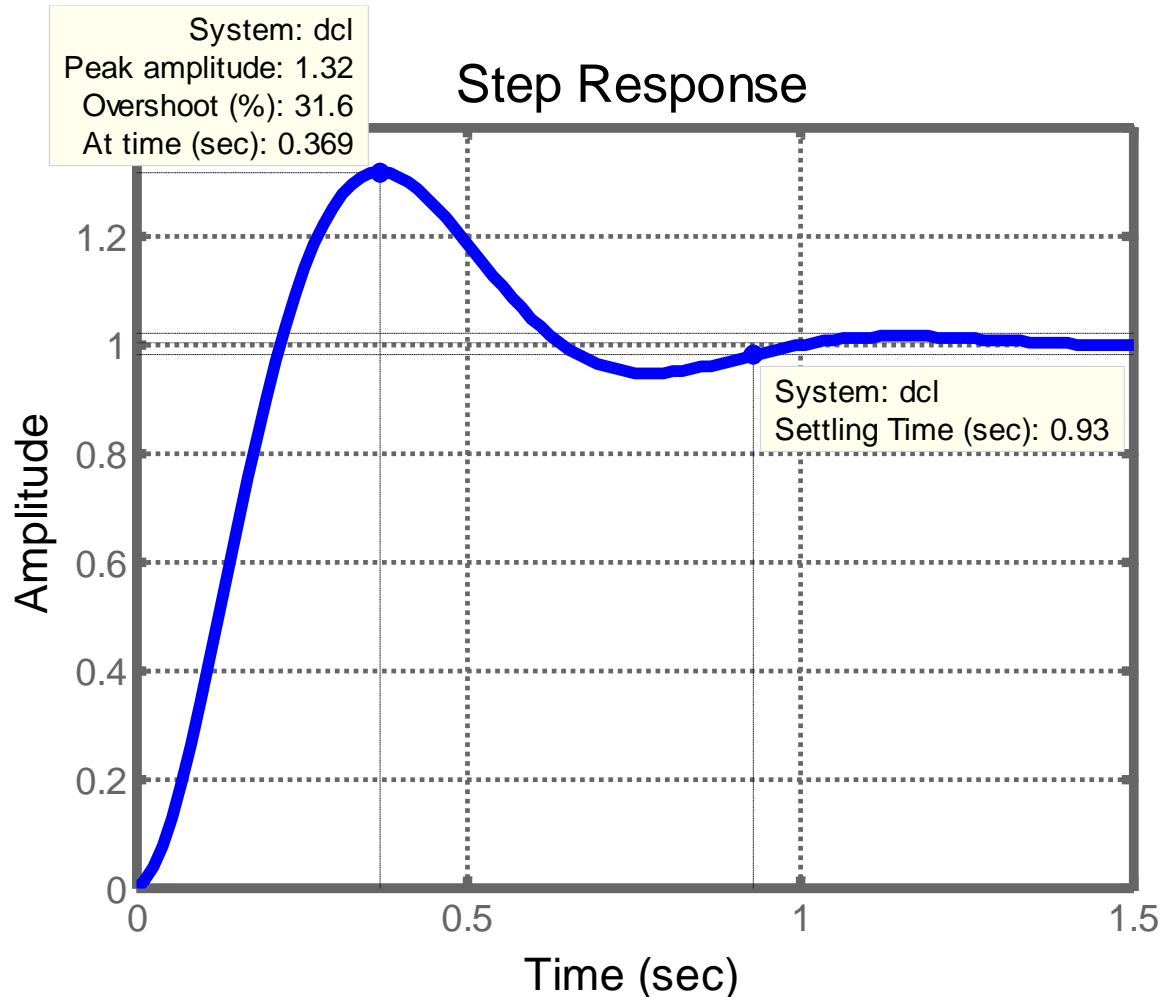
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{96.5(s+4)}{s(s+2)(s+10.6)} = \frac{96.5(4)}{2(10.6)} = 18.2 < 20$$

Η σταθερά σφάλματος ταχύτητας του αντισταθμισμένου συστήματος είναι μικρότερη από την απαίτηση των προδιαγραφών.



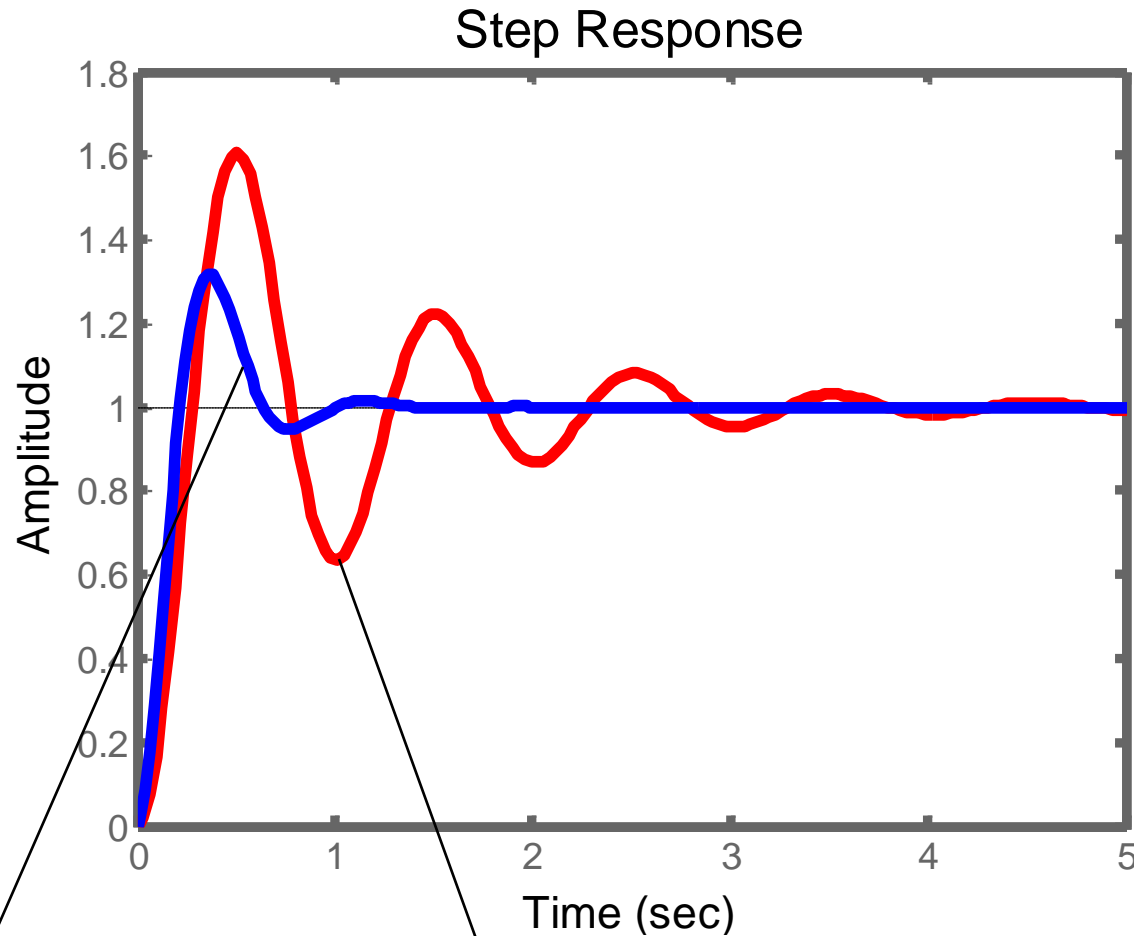
# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ



```
d = tf([96.5 386],[1 12.6 21.2 0]);  
dcl=minreal(d/(1+d));  
step(dcl)
```

Απόκριση σε βηματική μεταβολή του αντισταθμισμένου συστήματος.

# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ

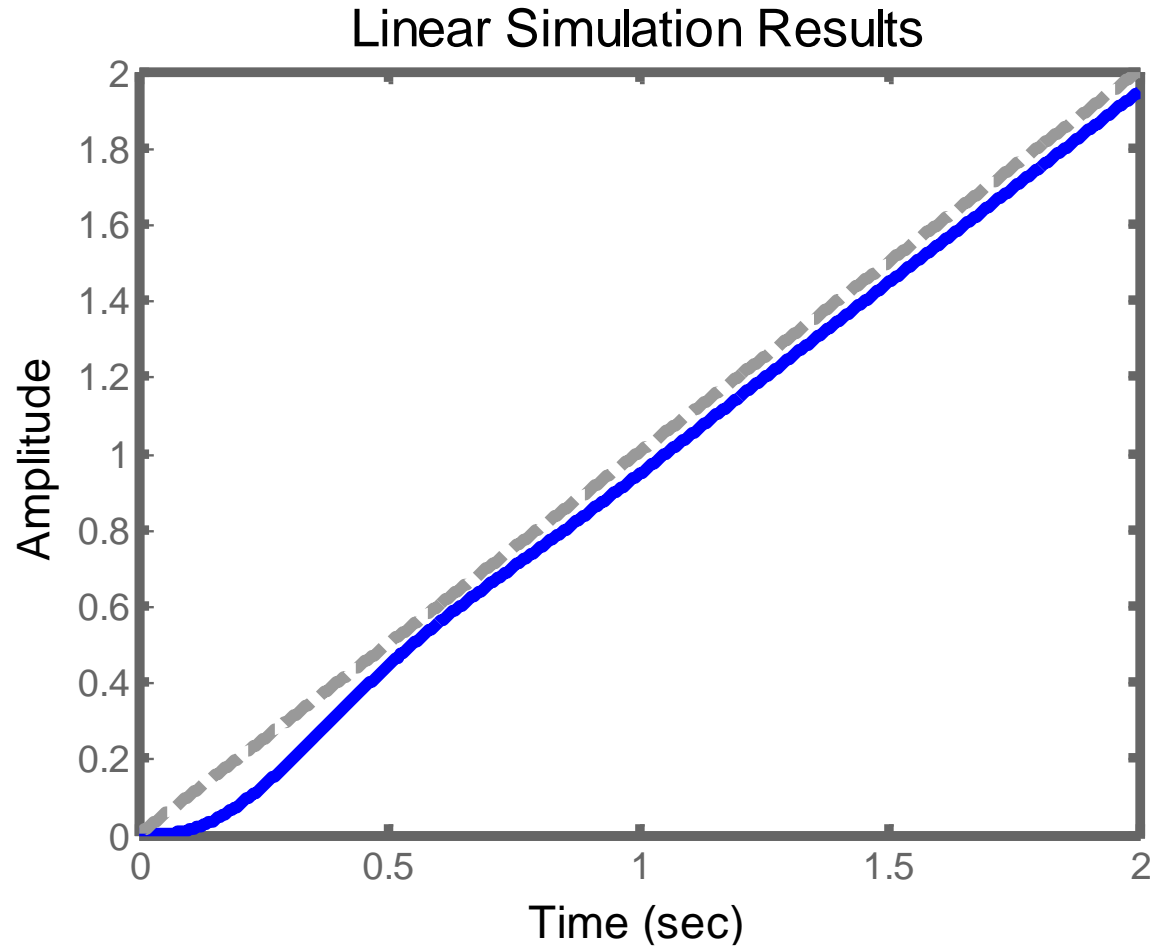


Απόκριση σε βηματική μεταβολή του **αντισταθμισμένου** συστήματος.

Απόκριση σε βηματική μεταβολή του **μη αντισταθμισμένου** συστήματος.



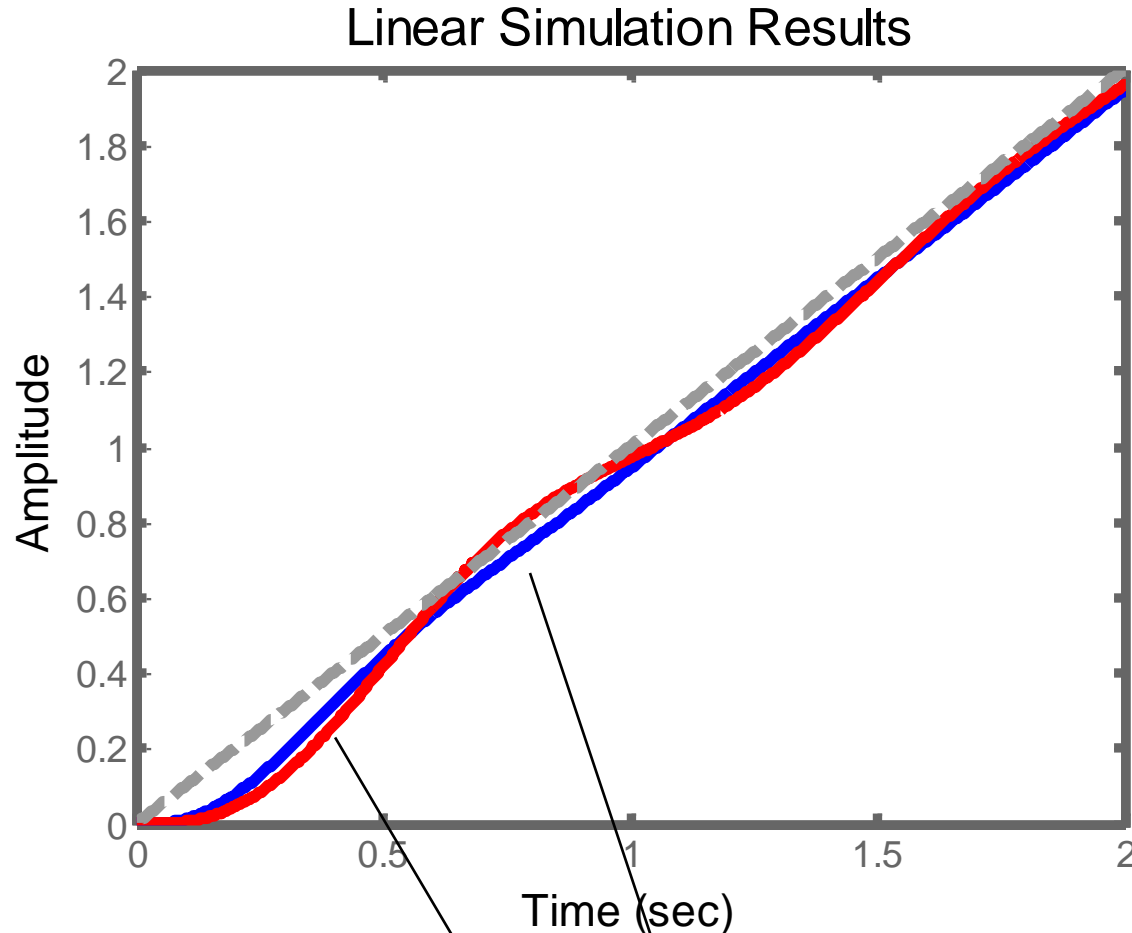
# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ



```
d = tf([96.5 386],[1 12.6 21.2 0]);  
dcl=minreal(d/(1+d));  
t=[0:0.002:2];  
u=t;  
lsim(dcl,u,t)
```

Απόκριση σε μεταβολή κλίσης του  
**αντισταθμισμένου** συστήματος.

# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης με το ΓΤΡ



Απόκριση σε μεταβολή κλίσης του **αντισταθμισμένου** συστήματος.  
Απόκριση σε μεταβολή κλίσης του **μη αντισταθμισμένου** συστήματος.

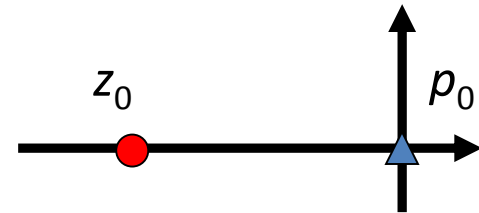


# Σχεδίαση αντισταθμιστών ολοκλήρωσης με ΓΤΡ

Αντισταθμιστές ολοκλήρωσης.

$$G_c(s) = K_c \frac{(s - z_0)}{s}$$

Ο πόλος τοποθετείται στην αρχή των αξόνων,  $p_0$ .



Μετακινεί το ΓΤΡ προς τα δεξιά με αποτέλεσμα να:

- Μειώνει το περιθώριο ευστάθειας.
- Επιβραδύνει την απόκριση του συστήματος.

Μειώνει το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση.





# Σχεδίαση αντισταθμιστών ολοκλήρωσης με ΓΤΡ

Ελεγκτής PI.

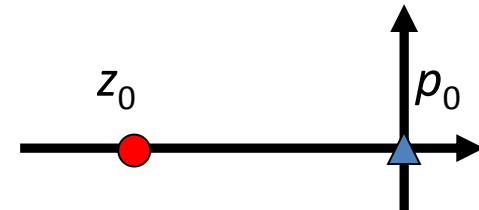
$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) = K_c \left( \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right)$$

Πόλος στην αρχή των αξόνων  
μηδενικό στο  $-1/\tau_I$ .

Bishop & Dorf, κεφ. 10.6

Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου

Εκδ. Τζιόλα, 2005.



Μεθοδολογία.

Ορίζουμε την επιθυμητή θέση των πόλων με βάση τις προδιαγραφές.

Προσδιορίζουμε τη θέση του μηδενικού έτσι ώστε το κριτήριο του ορίσματος να ισχύει για την επιθυμητή ρίζα.



# Σχεδίαση αντισταθμιστών ολοκλήρωσης με ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$GH(s) = \frac{K}{(2s + 1)(0.5s + 1)}$$

Προδιαγραφές:

- Ποσοστό υπερύψωσης < 10%.
- Μηδενικό σφάλμα σε βηματική μεταβολή.

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) = K_c \left( \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right) = \frac{K_c}{\tau_I} \left( \frac{s + 1/\tau_I}{s} \right)$$

Από το επιθυμητό ποσοστό υπερύψωσης  $\zeta > 0.6$  επιλέγουμε το πραγματικό μέρος των ριζών να είναι  $\zeta\omega_n = 0.75$  που οδηγεί σε χρόνο αποκατάστασης  $T_s = 4/(\zeta\omega_n) = 5.3$  s.

Επιλέγουμε ως πόλους του αντισταθμισμένου συστήματος τις

$$r_{1,2} = \zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \mathbf{-0.75 \pm j}$$

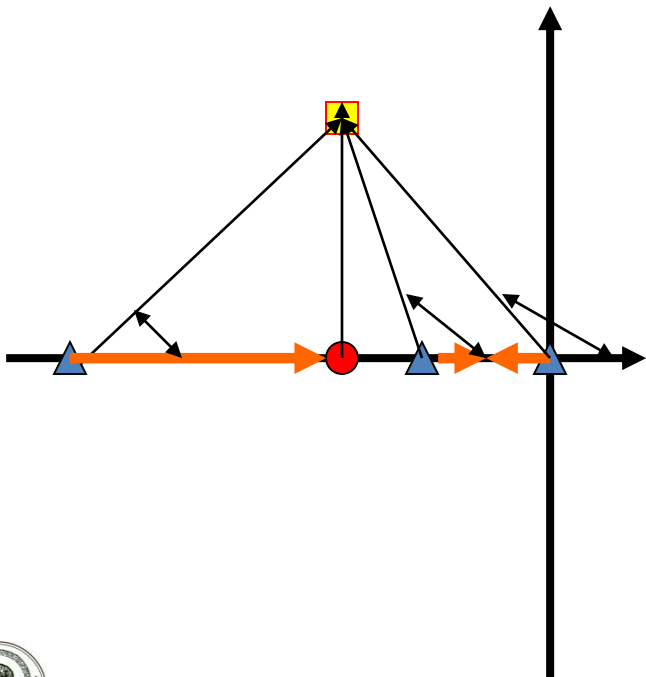


# Σχεδίαση αντισταθμιστών ολοκλήρωσης με ΓΤΡ

Χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου:

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K}{(2s + 1)(0.5s + 1)} \frac{K_c}{\tau_i} \left( \frac{s + 1/\tau_i}{s} \right)$$

Επιλέγεται μια ρίζα στη γραμμή για  $\zeta=0.6$  στη θέση  $s=-0.75 \pm j$ .



Υπολογίζουμε τη θέση του μηδενικού με βάση το κριτήριο του ορίσματος.

$$\vartheta_z - (125 + 104 + 38.67) = -180$$
$$\vartheta_z = 87.68^\circ$$

Θέση μηδενικού  $z_0 = -0.71$ .

Κέρδος στην επιθυμητή ρίζα.

$$K = 1.25 (1.03) 1.6 / 1.0 = 2.08$$

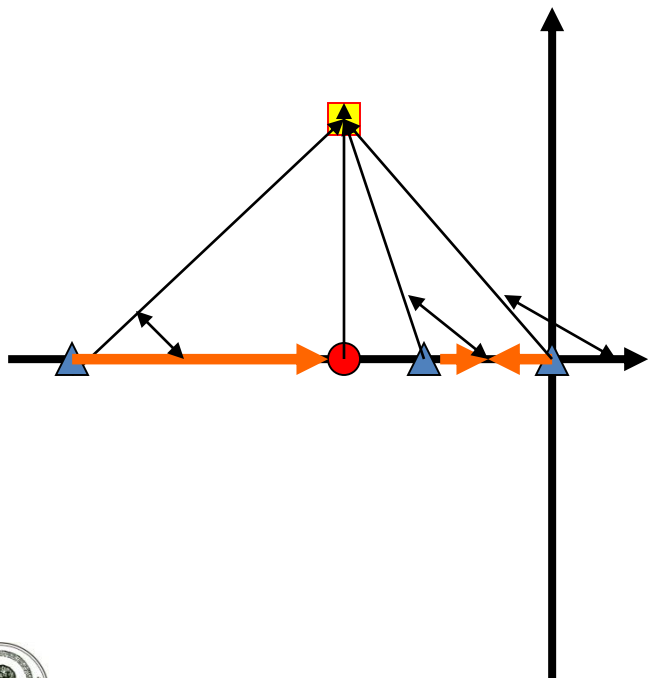


# Σχεδίαση αντισταθμιστών ολοκλήρωσης με ΓΤΡ

Αντισταθμισμένο σύστημα.

$$G_c(s)GH(s) = \frac{KK_c}{\tau_I} \frac{(s+0.71)}{s(2s+1)(0.5s+1)}$$

Επιλέγεται μια ρίζα στη γραμμή για  $\zeta=0.6$  στη θέση  $s=-0.75\pm j$ .



Υπολογίζουμε τη θέση του μηδενικού με βάση το κριτήριο του ορίσματος.

$$\theta_z - (125 + 104 + 38.67) = -180$$

$$\theta_z = 87.68^\circ$$

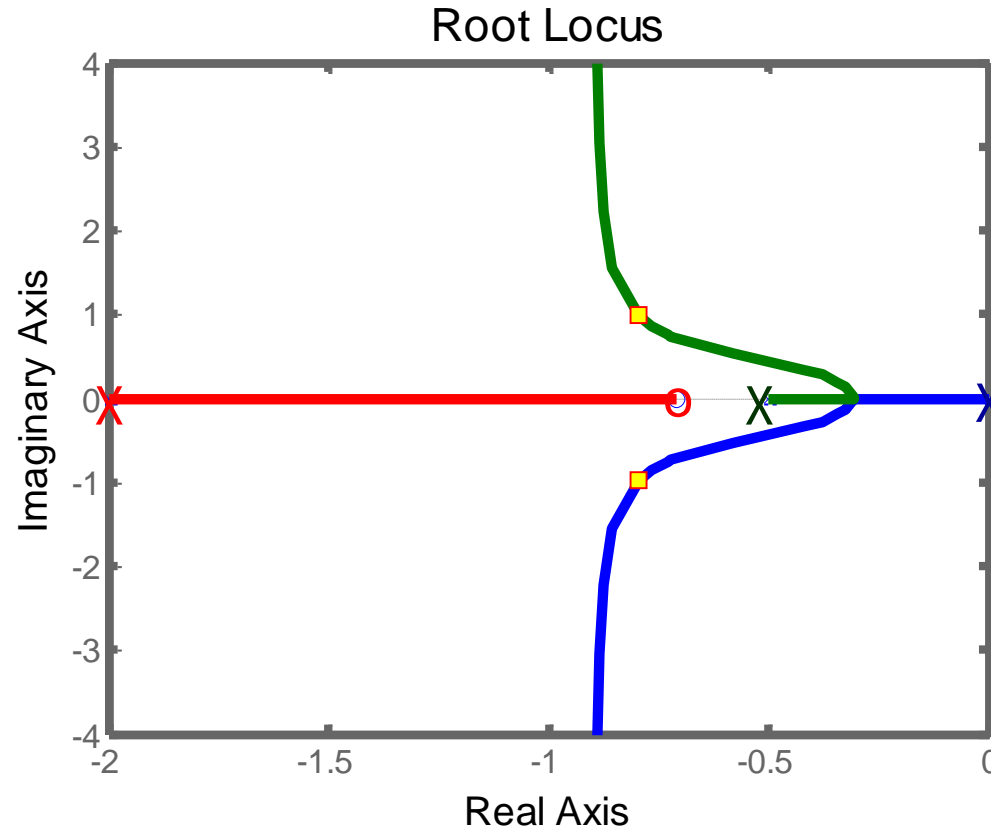
Θέση μηδενικού  $z_0 = -0.71$ .

Κέρδος στην επιθυμητή ρίζα.

$$K = 1.25 (1.03) 1.6 / 1.0 = 2.08$$



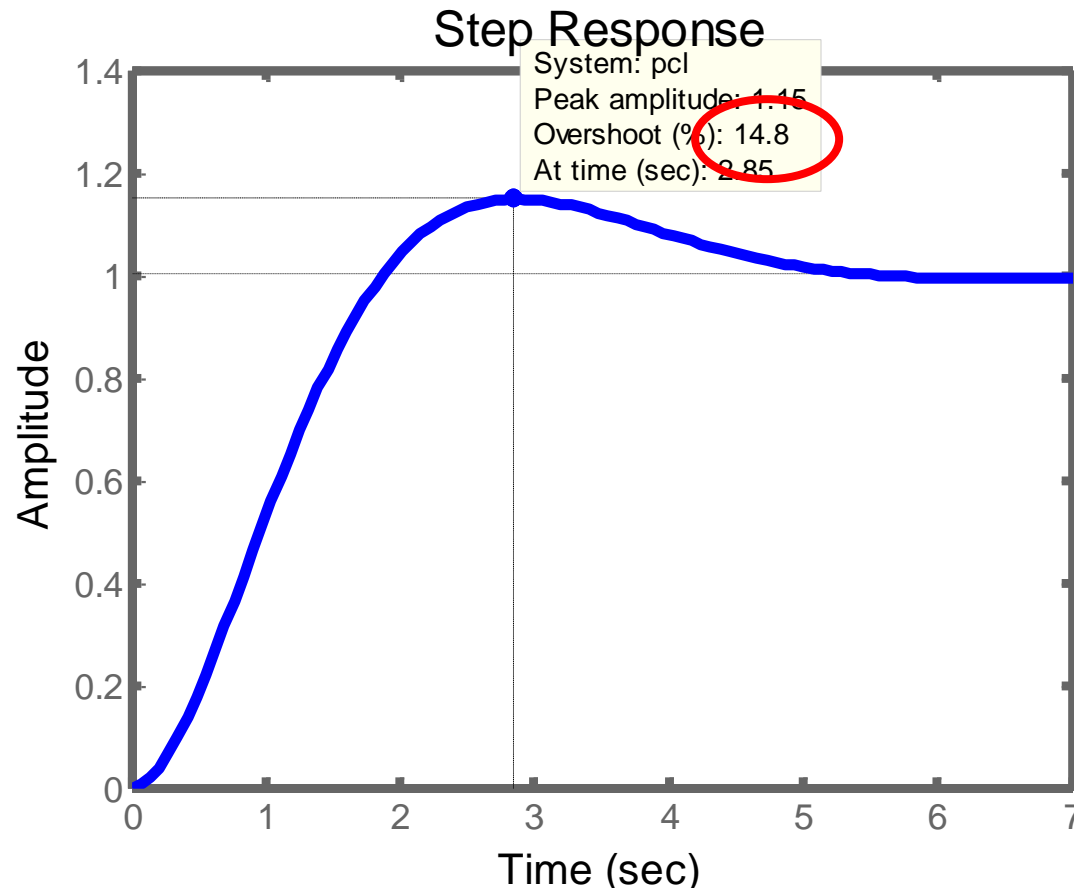
# Σχεδίαση αντισταθμιστών ολοκλήρωσης με ΓΤΡ



ΓΤΡ αντισταθμισμένου συστήματος.



# Σχεδίαση αντισταθμιστών ολοκλήρωσης με ΓΤΡ



Απόκριση σε βηματική μεταβολή του αντισταθμισμένου συστήματος.

Επιλέχθηκε  $\zeta=0.6$  (οριακά για την προδιαγραφή του ΠΥ).

Το σύστημα κλειστού βρόχου δεν είναι αμιγώς 2<sup>ης</sup> τάξης.

Επανάληψη διεργασίας με επιλογή επιθυμητών ριζών με  $\zeta > 0.6$ .



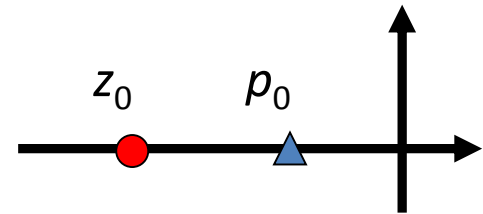
# Σχεδίαση αντισταθμιστών με το ΓΤΡ

Αντισταθμιστές καθυστέρησης φάσης.

$$G_c(s) = K_c \frac{(s - z_0)}{(s - p_0)}$$

Το μέτρο του πόλου είναι μικρότερο από το μέτρο του μηδενικού.

$$|z_0| > |p_0|$$



Μετακινεί το ΓΤΡ προς τα δεξιά με αποτέλεσμα να:

- Μειώνει το περιθώριο ευστάθειας.
- Επιβραδύνει την απόκριση του συστήματος.

Μειώνει το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση (αυξάνονται οι σταθερές σφάλματος κατά  $z_0/p_0 > 1$ ).



# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης ΓΤΡ

## Μεθοδολογία

Bishop & Dorf, κεφ. 10.7  
Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου, Εκδ. Τζιόλα, 2005.

Βήμα 1. Σχεδίαση του ΓΤΡ του μη-αντισταθμισμένου συστήματος.

Βήμα 2. Καθορισμός των προδιαγραφών της μεταβατικής συμπεριφοράς και επισήμανση των κατάλληλων θέσεων των κυρίαρχων ριζών στον ΓΤΡ του μη αντισταθμισμένου συστήματος.

Βήμα 3. Υπολογισμός του κέρδους βρόχου στη θέση της επιθυμητής ρίζας και επομένως και της σταθεράς σφάλματος.

Βήμα 4. Σύγκριση της σταθεράς σφάλματος του μη-αντισταθμισμένου συστήματος με την επιθυμητή και υπολογισμός της απαραίτητης αύξησης που επιβάλλεται να προκύψει από το λόγο μέτρου,  $\alpha$ , πόλου-μηδενικού του αντισταθμιστή.





# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης ΓΤΡ

Βήμα 5. Γνωρίζοντας το λόγο μέτρου πόλου-μηδενικού του αντισταθμιστή υπολογίζουμε την κατάλληλη θέση του πόλου και του μηδενικού ώστε ο ΓΤΡ του αντισταθμισμένου συστήματος να συνεχίζει να διέρχεται από την επιθυμητή ρίζα. Τοποθέτηση του πόλου και του μηδενικού κοντά στην αρχή των αξόνων σε σύγκριση με το  $\omega_n$ .

Συνίσταται όπως η διαφορά της γωνίας του πόλου και του μηδενικού με την επιθυμητή ρίζα να μην υπερβαίνει τις  $2^\circ$ .



# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης ΓΤΡ

Παράδειγμα

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Προδιαγραφές:

- Συντελεστής απόσβεσης κύριων ριζών,  $\zeta=0.45$ .
- Σταθερά σφάλματος ταχύτητας  $K_v=20$ .



# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης ΓΤΡ

Χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου:  $1 + GH(s) = 1 + \frac{K}{s(s+2)}$

Σχεδιάζεται ο ΓΤΡ του μη αντισταθμισμένου συστήματος.

Επιλέγεται μια ρίζα στη γραμμή για  $\zeta=0.45$  στη θέση  $s=-1\pm 2j$ .

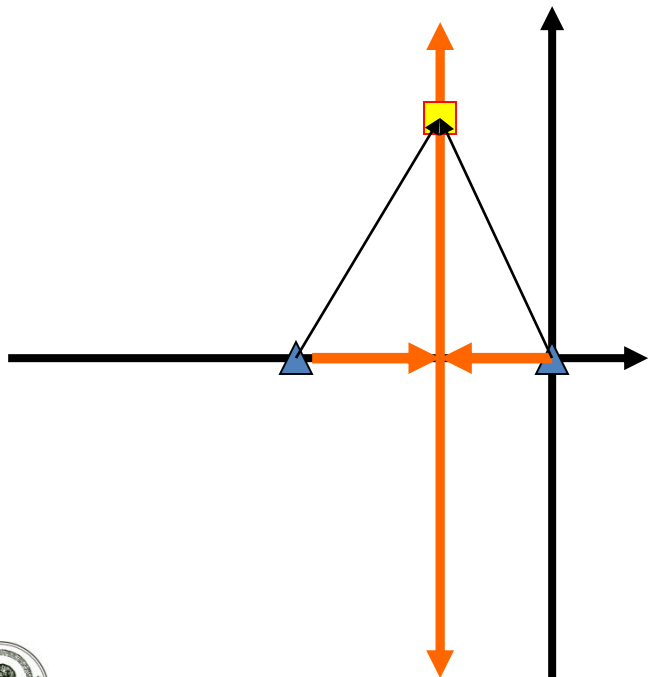
Υπολογίζουμε το κέρδος στην επιθυμητή ρίζα.  $K=(2.24)^2=5$ .

Επομένως  $K_v=K/2=2.5$ .

Άρα ο απαιτούμενος λόγος ενίσχυσης της σταθεράς σφάλματος ταχύτητας είναι:

$(z/p)=a \quad K_v=\lim s 5/(s(s+2)) \quad a=20 \Leftrightarrow a=8$ .

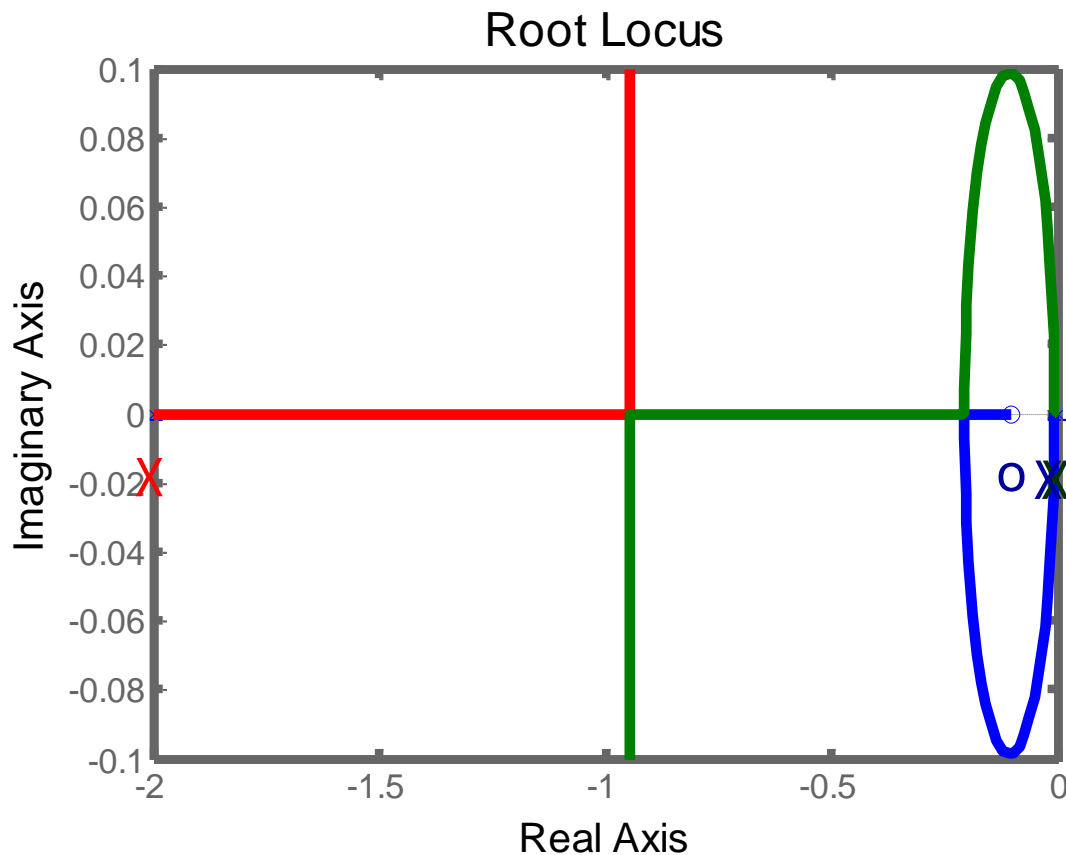
Επιλέγεται  $z=-0.1$  και  $p=-0.1/8$ .



# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης ΓΤΡ

Συνάρτηση μεταφοράς αντισταθμισμένου συστήματος:

$$G_c(s)GH(s) = \frac{5(s + 0.1)}{s(s + 2)(s + 0.0125)}$$



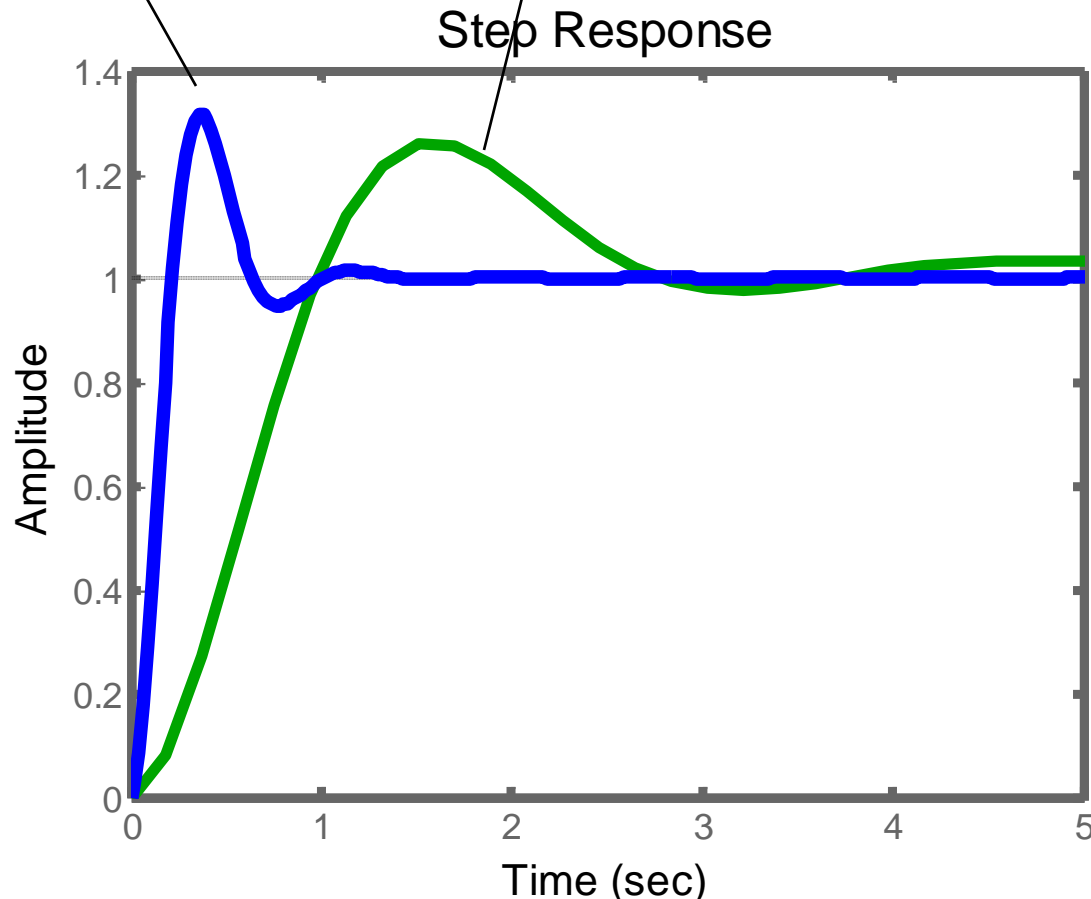
# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης ΓΤΡ

$$GH(s)G_c(s) = \frac{96.5(s+4)}{s(s+2)(s+10.6)}$$

$$G_c(s)GH(s) = \frac{5(s+0.1)}{s(s+2)(s+0.0125)}$$

Αντισταθμιστής προήγησης.

Αντισταθμιστής καθυστέρησης.



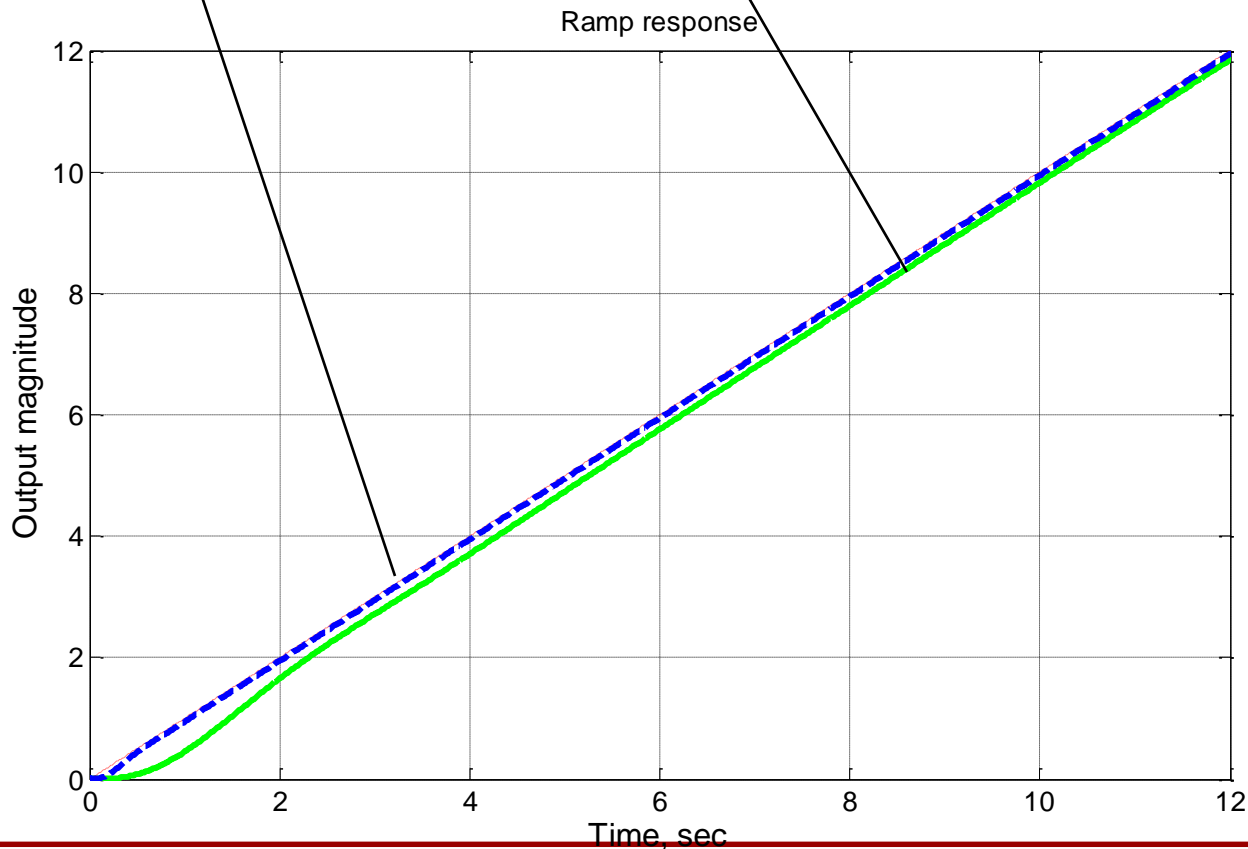
# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης ΓΤΡ

$$GH(s)G_c(s) = \frac{96.5(s+4)}{s(s+2)(s+10.6)}$$

$$G_c(s)GH(s) = \frac{5(s+0.1)}{s(s+2)(s+0.0125)}$$

Αντισταθμιστής προήγησης.

Αντισταθμιστής καθυστέρησης.



# Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Κατανοεί τις ιδιότητες του γεωμετρικού τόπου ριζών ενός συστήματος κλειστού βρόχου.
- Αναγνωρίζει από το γεωμετρικό τόπο ριζών το εύρος των τιμών του κέρδους για τις οποίες το σύστημα κλειστού βρόχου παρουσιάζει συγκεκριμένη δυναμική συμπεριφορά.
- Σχεδιάζει το γεωμετρικό τόπο ριζών με χρήση του MATLAB.



# Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Σχεδιάζει ένα αντισταθμιστή προήγησης φάσης με το γεωμετρικό τόπο ριζών.
- Σχεδιάζει ένα αντισταθμιστή καθυστέρησης φάσης με το γεωμετρικό τόπο ριζών.







# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δρ Παπαδόπουλος Αθανάσιος  
Δρ Αγγελική Μονέδα  
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ