



# Αυτόματος Έλεγχος

Ενότητα 10<sup>η</sup>: Σχεδίαση αντισταθμιστών στο πεδίο της συχνότητας

Παναγιώτης Σεφερλής



Εργαστήριο Δυναμικής Μηχανών  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



## Στόχοι της ενότητας

- Προσδιορισμός επιθυμητής δυναμικής συμπεριφοράς στο πεδίο της συχνότητας.
- Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης και καθυστέρησης φάσης στο πεδίο της συχνότητας.



## Περίληψη της ενότητας

- Ορισμός προδιαγραφών δυναμικής συμπεριφοράς στο πεδίο της συχνότητας.
- Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης και καθυστέρησης φάσης στο πεδίο της συχνότητας.



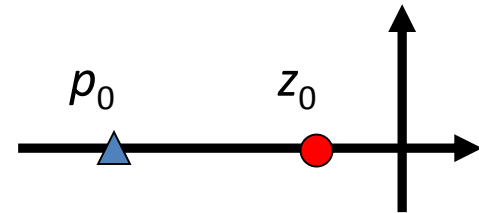
# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

Αντισταθμιστές προήγησης 1ης τάξης.

$$G_c(s) = K_c \frac{(s - z_0)}{(s - p_0)}$$

Το μέτρο του μηδενικού είναι μικρότερο από το μέτρο του πόλου.

$$|z_0| < |p_0|$$



Μετακινεί το ΓΤΡ προς τα αριστερά με αποτέλεσμα να:

- Βελτιώνει το περιθώριο ευστάθειας του συστήματος.
- Επιταχύνει την απόκριση του συστήματος.

Ενδεχομένως να αυξάνει το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση.



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

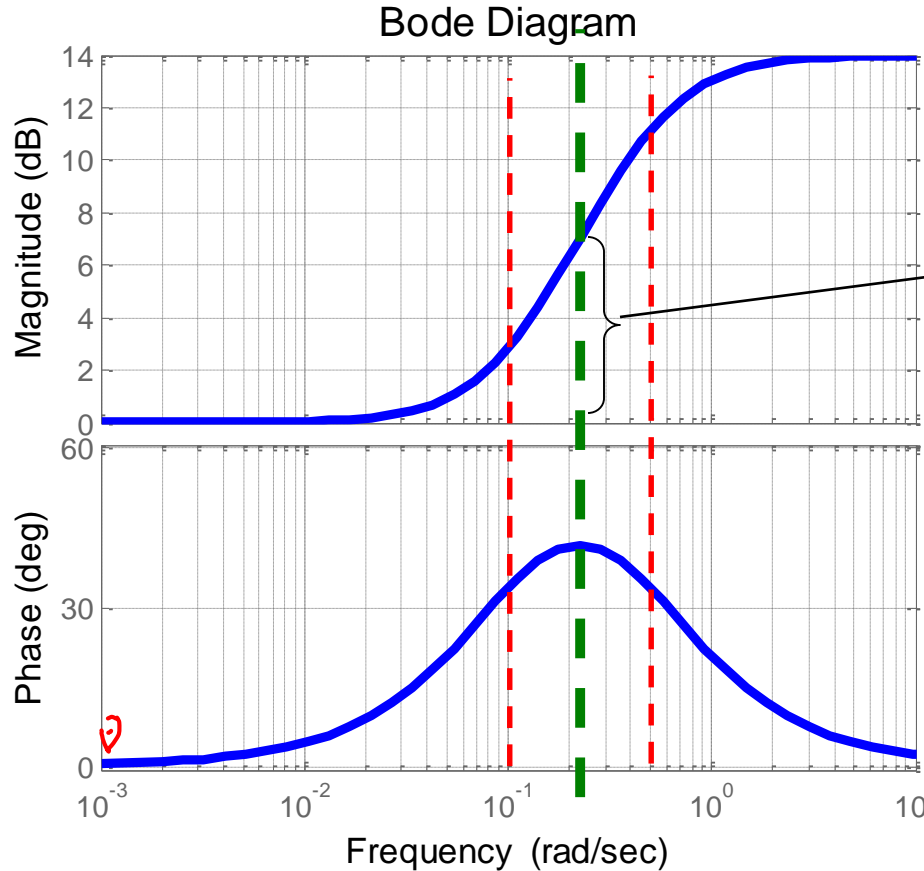
Αν ο πόλος είναι  $|p_0| \gg |z_0|$  και το μηδενικό,  $z_0$ , κοντά στην αρχή των αξόνων.

$$G_c(s) = \frac{K_c}{p} s$$

Ο αντισταθμιστής ομοιάζει με διαφορικό ελεγκτή.



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης



$$10 \log(a)$$

$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Μέγιστο φάσης:

$$\omega_m = \sqrt{z\rho}$$

Εισαγωγή προήγησης φάσης  
αλλά και ενίσχυση σήματος.

$$a = p/z$$

$$G(s) = \frac{5(s + 0.1)}{(s + 0.5)}$$

Αυτόματος Έλεγχος

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

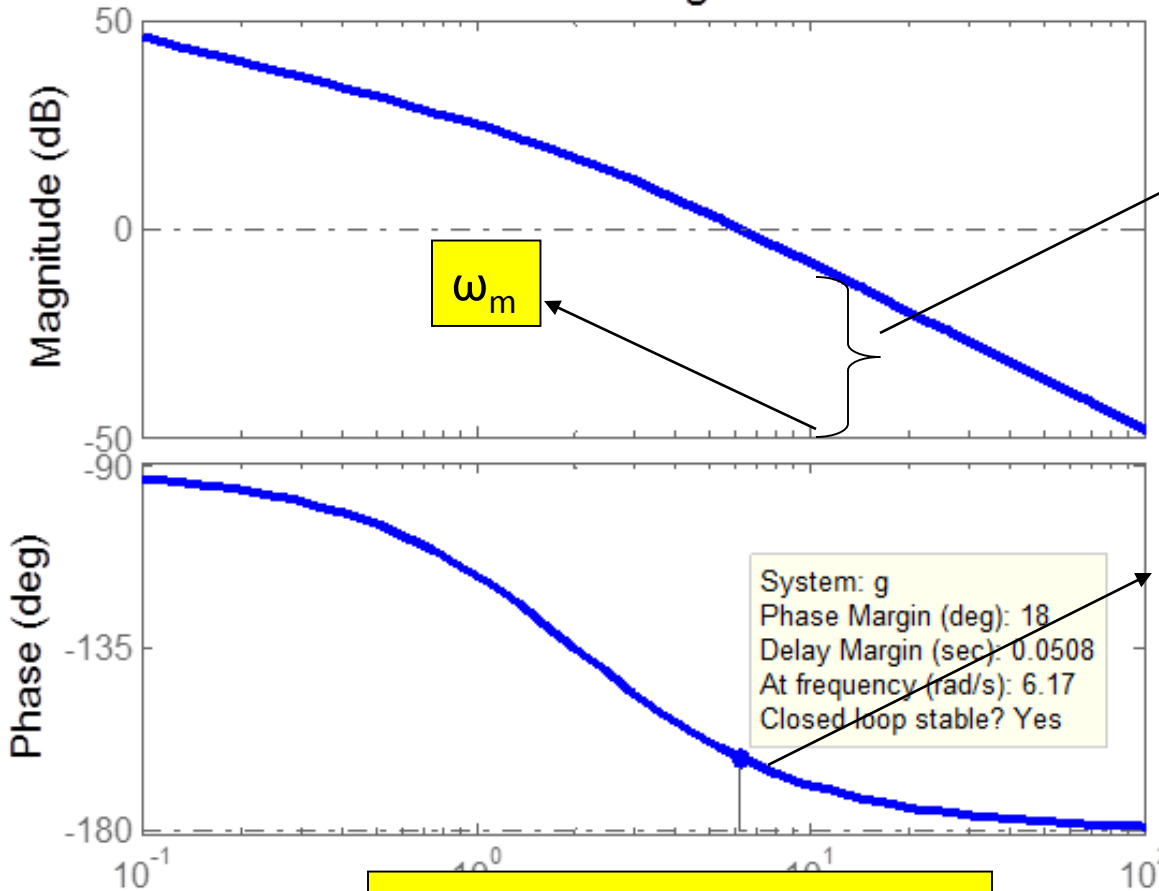


# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

## Μεθοδολογία

Bishop & Dorf, Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου, Εκδ. Τζιόλα, 2005

Bode Diagram



Λόγω επικείμενης ενίσχυσης σήματος κατά  $10 \log(a)$  επιλέγουμε συχνότητα  $\omega_m$  όπου το πλάτος =  $-10 \log(a)$

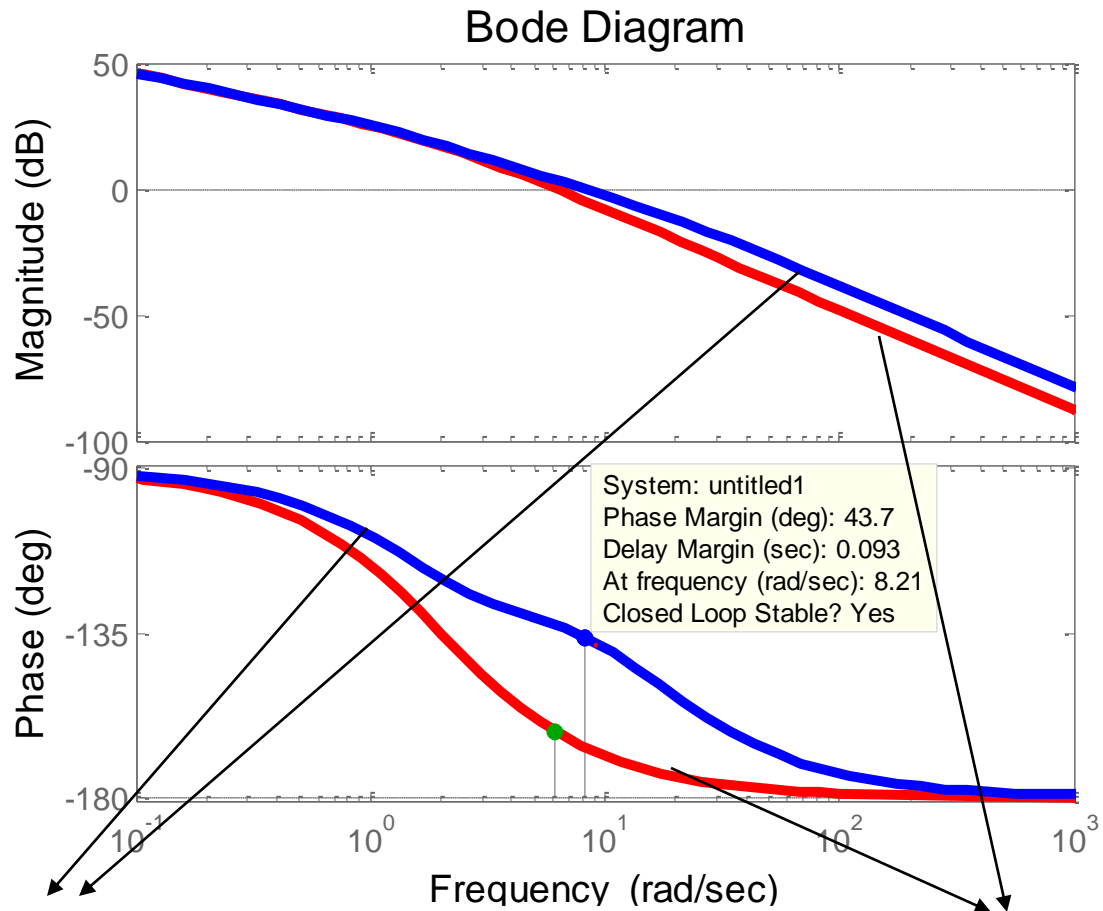
υπολογισμός ΠΦ  
καθορισμός επιθυμητής προήγησης φάσης  
 $\sin(\phi_m) = (a-1)/(a+1)$

Υπολογισμός μηδενικού και πόλου αντισταθμιστή  
 $p = \omega_m \sqrt{a}$  και  $z = p/a$ .



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

## Μεθοδολογία



Αντισταθμισμένο σύστημα.

Μη αντισταθμισμένο σύστημα.

# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

## Μεθοδολογία

Bishop & Dorf, *Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου*, Εκδ. Τζιόλα, 2005

**Βήμα 1.** Υπολογισμός του περιθωρίου φάσης του μη αντισταθμισμένου συστήματος όταν ικανοποιούνται οι αντίστοιχες προδιαγραφές των σταθερών σφάλματος.

**Βήμα 2.** Καθορισμός της απαραίτητης προήγησης φάσης,  $\varphi_m$ , με τα απαραίτητα περιθώρια ασφαλείας.

**Βήμα 3.** Υπολογισμός της σταθεράς  $\alpha$ ,  $\sin(\varphi_m) = (\alpha - 1) / (\alpha + 1)$

**Βήμα 4.** Υπολογισμός της ποσότητας  $10\log(\alpha)$  και προσδιορισμός της συχνότητας όπου η καμπύλη του μέτρου για το μη-αντισταθμισμένο σύστημα συμπίπτει με  $-10\log(\alpha)$  dB. Επειδή ο αντισταθμιστής παρουσιάζει κέρδος ίσο με  $10\log(\alpha)$  στη συχνότητα  $\omega_m$  αυτή είναι και η νέα κρίσιμη συχνότητα για το αντισταθμισμένο σύστημα (δηλαδή στη συχνότητα όπου το κέρδος είναι 0 dB).



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

**Βήμα 5.** Υπολογισμός του πόλου  $p = \omega_m \nu a$  και του μηδενικού  $z = p/a$ .

**Βήμα 6.** Υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας του αντισταθμισμένου συστήματος και έλεγχος του περιθωρίου φάσης που προκύπτει.

**Βήμα 7.** Επανάληψη των βημάτων 3-6 εφόσον είναι αναγκαίο (δεν έχει επιτευχθεί ο στόχος του περιθωρίου φάσης).

**Βήμα 8.** Συνήθως αυξάνεται το κέρδος του αντισταθμιστή για την κάλυψη της εξασθένησης του κέρδους του βρόχου κατά  $1/a$ .



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

Παράδειγμα

$$GH(s) = \frac{K}{s^2}$$

Δίνεται:  $K=10$

Προδιαγραφές δυναμικής συμπεριφοράς:

- Χρόνος αποκατάστασης,  $T_s \leq 4$  s.
- $\zeta \geq 0.45$

$$T_s = 4/(\zeta\omega_n) \leq 4 \Leftrightarrow \zeta\omega_n \geq 1$$

$$\omega_n = 1/\zeta = 1/0.45 = 2.22$$

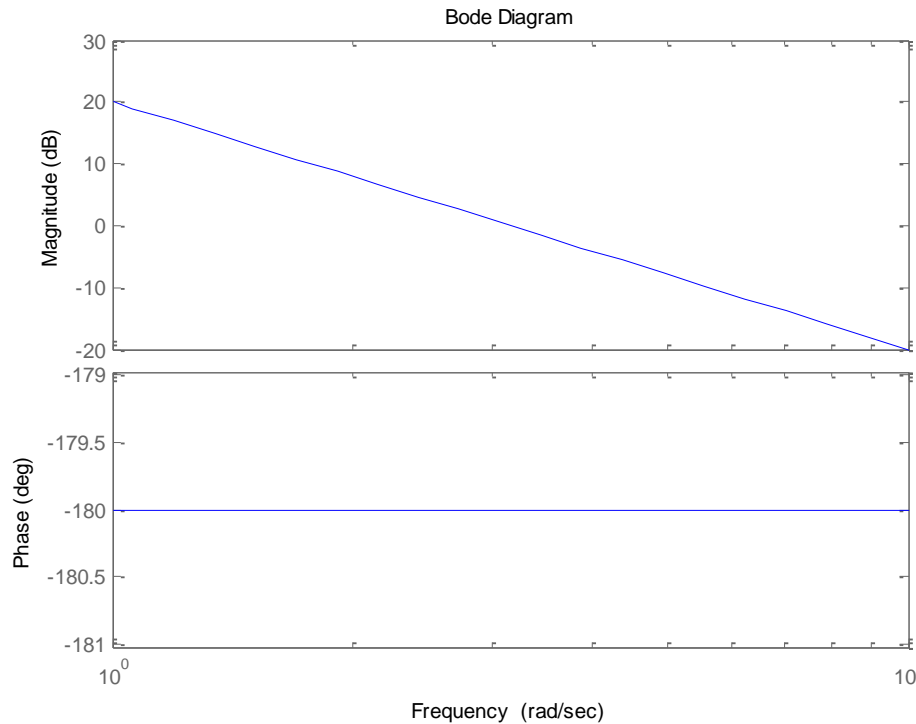
$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$\omega_{BW}/\omega_n = -1.19\zeta + 1.85$$

$$\text{ΠΦ} = \zeta/0.01$$



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης



Για περιθώριο φάσης  $45^\circ$  πρέπει να προστεθεί η κατάλληλη προήγηση φάσης ( $45^\circ$ ).

Από τη σχέση:  
 $\sin(\varphi_m) = \sin(45^\circ) = (\alpha - 1) / (\alpha + 1)$   
υπολογίζουμε  $\alpha = 5.8$

Επιλέγουμε  $\alpha = 6$  που επιφέρει αύξηση του κέρδους  $10 \log(6) = 7.78 \text{ dB}$   
Εισάγουμε την προήγηση φάσης στη συχνότητα που αντιστοιχεί σε  $-7.78 \text{ dB}$  ( $\omega = \omega_m = 4.95 \text{ rad/s}$ ).

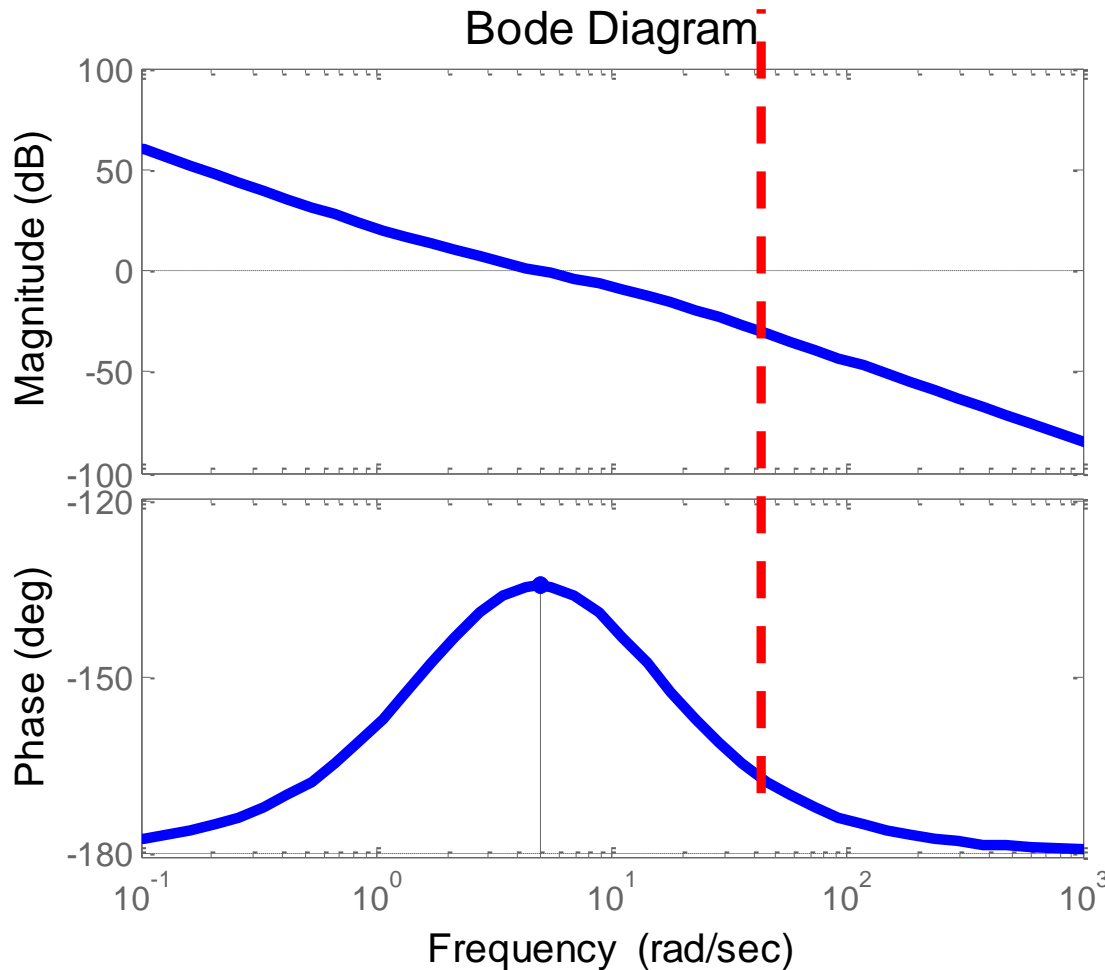
Υπολογίζουμε τον πόλο  $p = \omega_m \sqrt{\alpha} = 12.0$  και το μηδενικό  $z = p / \alpha = 2.0$ .

$$G_c(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 12)}$$

Τμήμα Μηχανολογών Μηχανικών



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

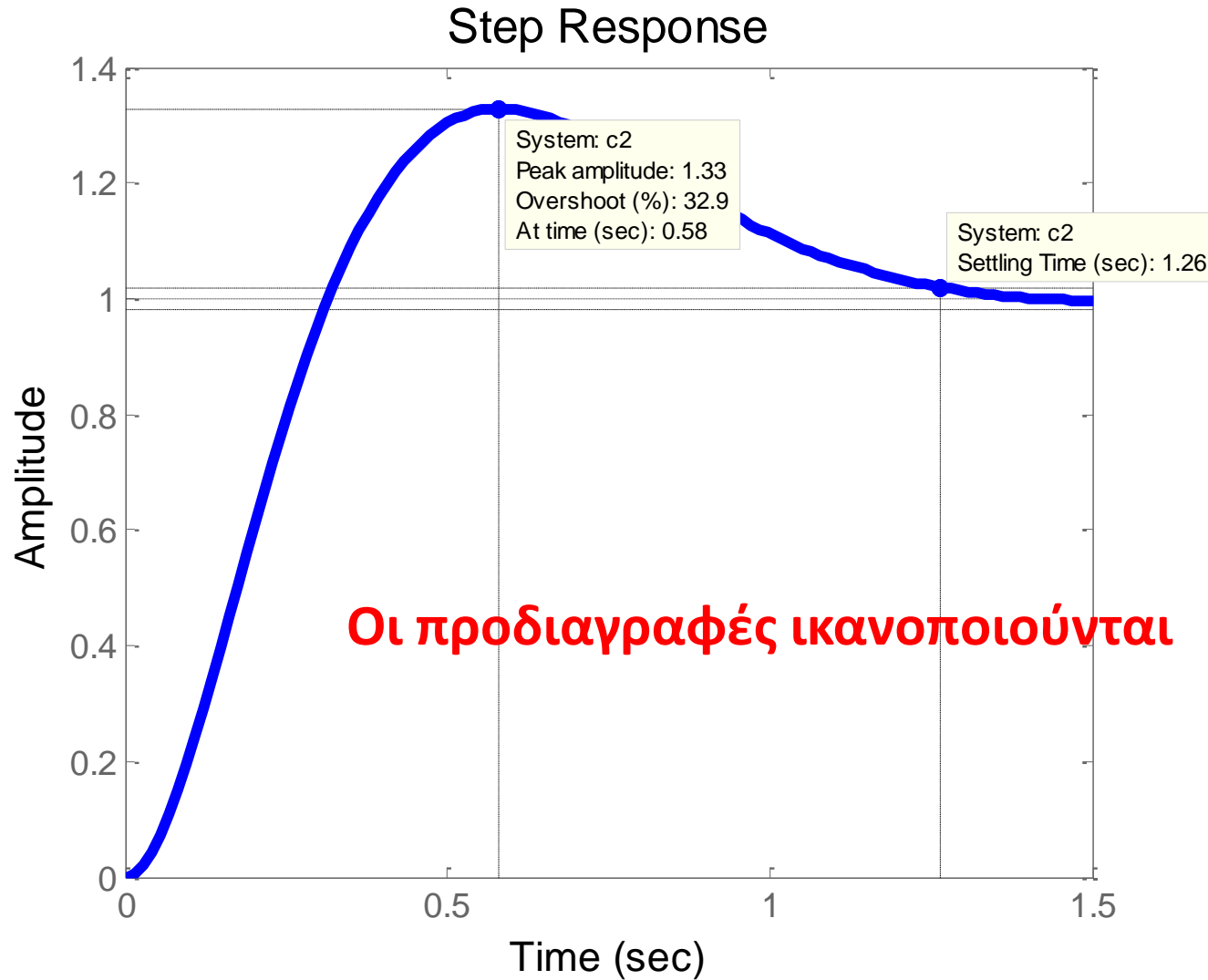


Εξασθένιση  
κέρδους βρόχου  
λόγω  
αντισταθμιστή.  
Ενίσχυση ελεγκτή  
κατά  $K=6$ .

$$G(s)G_c(s) = 6 \frac{10(s+2)}{s^2(s+12)}$$



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης





# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

Παράδειγμα

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Προδιαγραφές:

- Σφάλμα μόνιμης κατάστασης σε μεταβολή κλίσης = 5%.
- Περιθώριο φάσης 45°.

$$K_v = A/e_{ss} = A/(0.05A) = 20$$

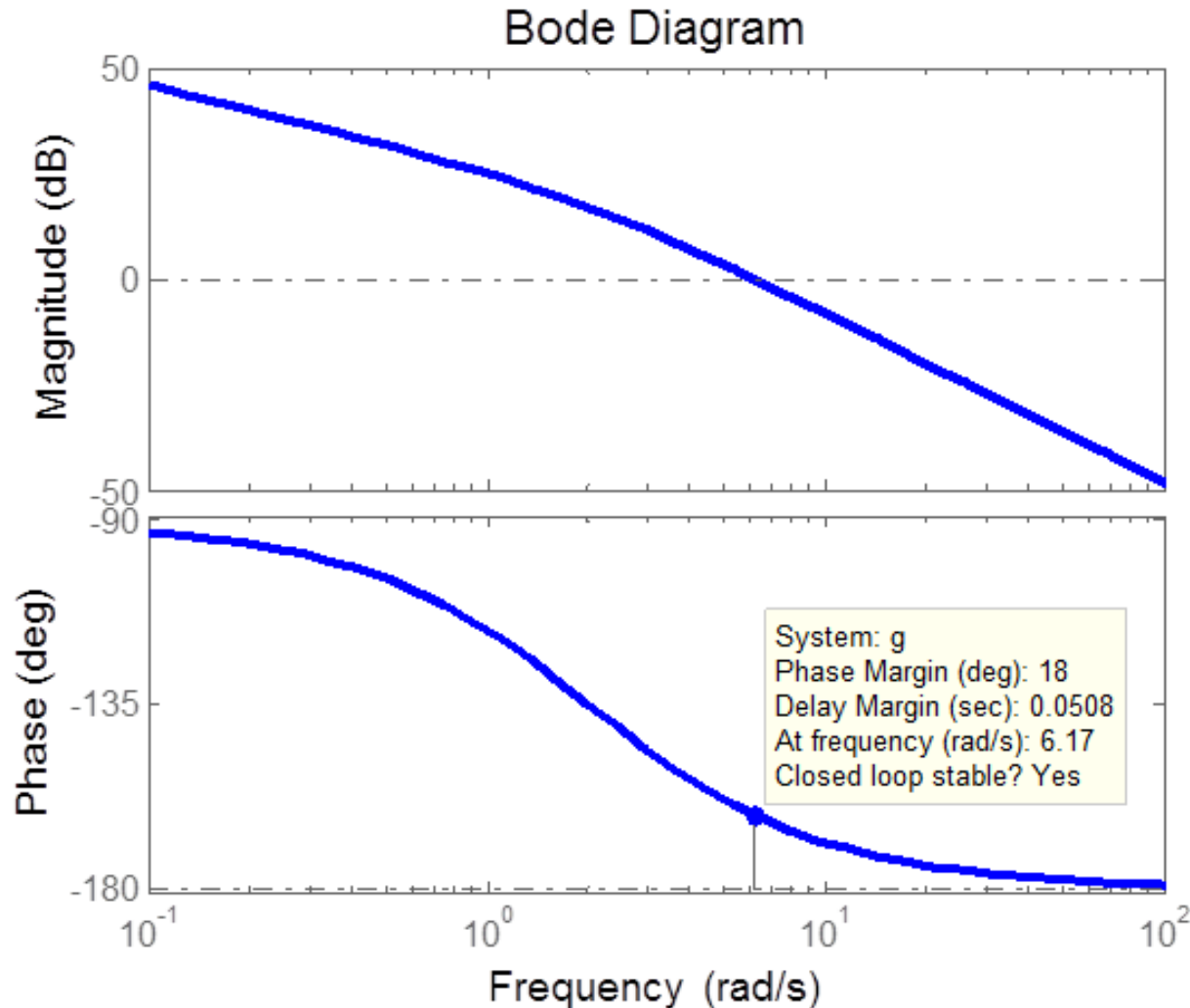
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{2} = 20 \Leftrightarrow K = 40$$

$$\text{Μέτρο: } \frac{K}{\omega \sqrt{(0.5\omega)^2 + 1}}$$

$$\text{Γωνία φάσης: } \varphi = -90 - \tan^{-1}(0.5\omega)$$



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης



Η συχνότητα στην οποία το διάγραμμα μέτρου τέμνει τη γραμμή των 0 dB είναι 6.2 rad/s. Το περιθώριο φάσης είναι  $18^\circ$  ( $\varphi = -90 - \tan^{-1}(0.5\omega)$ ).

# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

Επομένως πρέπει να προστεθεί ένας αντισταθμιστής προήγησης που να συνεισφέρει την απαραίτητη φάση για την αύξηση του ΠΦ στις  $45^\circ$ . Αυτή η προήγηση είναι  $45-18=27^\circ$ .

Έστω ότι επιλέγεται προήγηση φάσης αντισταθμιστή  $30^\circ$ .

$\sin 30^\circ = (a-1)/(a+1) = 0.5$ . Επομένως  $a=3$ . Η μέγιστη προήγηση εμφανίζεται στην  $\omega_m$  και η συχνότητα αυτή επιλέγεται ως η νέα κρίσιμη συχνότητα. Η ενίσχυση του σήματος στη συχνότητα  $\omega_m$  είναι  $10\log(a)=10\log(3)=4.8$  dB.

Η συχνότητα στην οποία ο λόγος πλάτους είναι  $-4.8$  db ορίζεται ως η νέα κρίσιμη συχνότητα ( $\omega_m = \omega_c = 8.2$  rad/s).

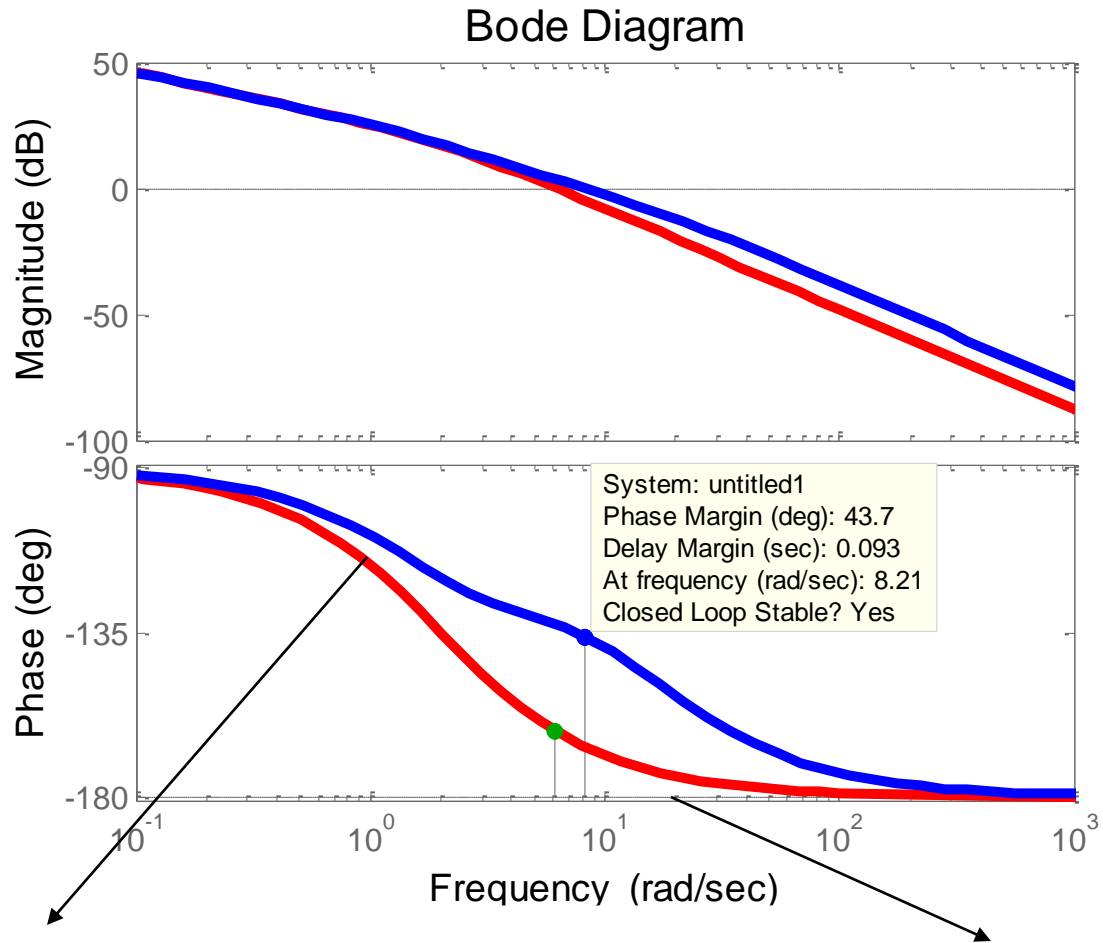
Υπολογισμός του πόλου  $p=\omega_m \sqrt{a}=14.2$

Υπολογισμός του μηδενικού  $z=p/a=4.73$

$$G_c(s) = 3 \frac{(s + 4.73)}{(s + 14.2)}$$



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης



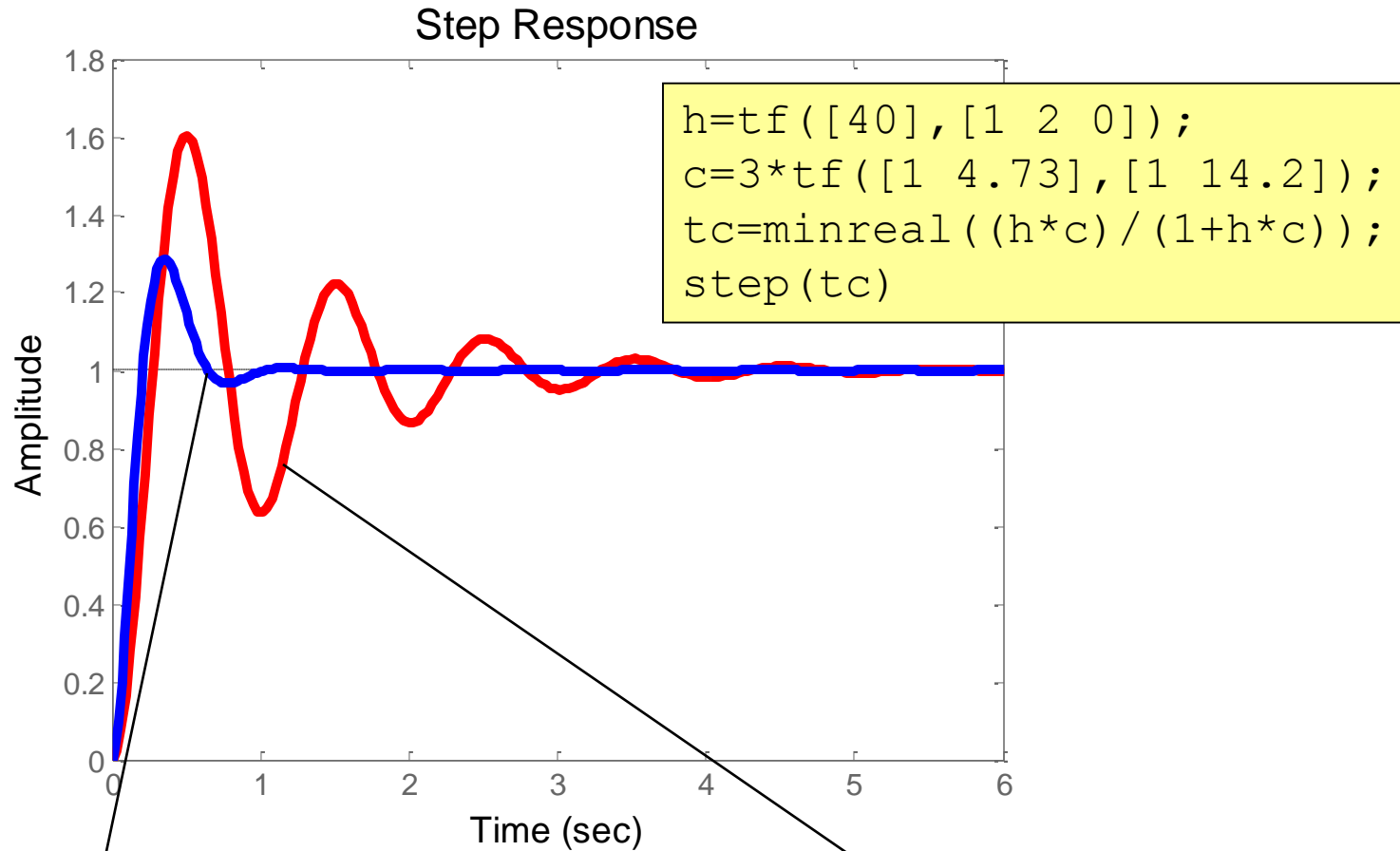
**Αντισταθμισμένο σύστημα**

$$G(s)G_c(s) = \frac{120(s + 4.73)}{s(s + 2)(s + 14.2)}$$

**Μη αντισταθμισμένο σύστημα**

ΠΦ αντισταθμισμένου συστήματος:  $43.7^\circ$

# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης



**Αντισταθμισμένο σύστημα**

**Μη αντισταθμισμένο σύστημα**

$$G(s)G_c(s) = \frac{120(s + 4.73)}{s(s + 2)(s + 14.2)}$$

$$G(s) = \frac{40}{s(s + 2)}$$

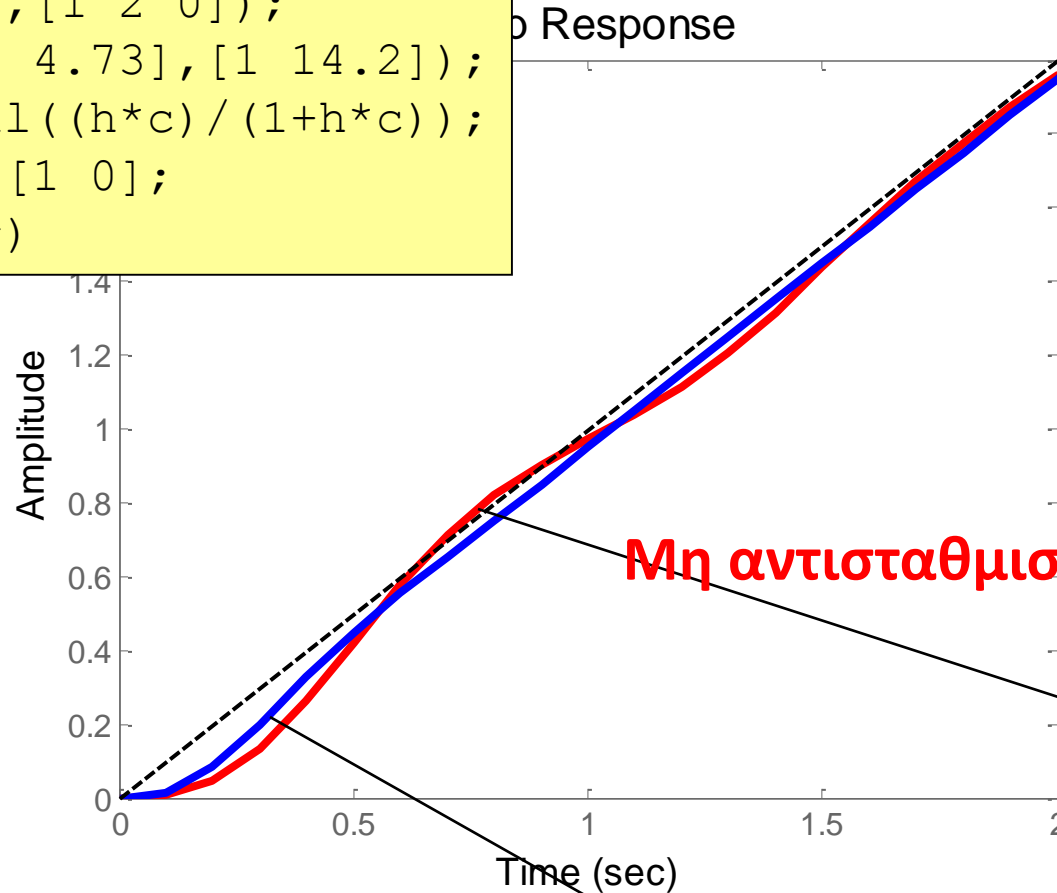
Αυτόματος Έλεγχος

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



# Σχεδίαση αντισταθμιστών προήγησης φάσης

```
h=tf([40],[1 2 0]);  
c=3*tf([1 4.73],[1 14.2]);  
tc=minreal((h*c)/(1+h*c));  
r=tf([1],[1 0]);  
step(tc*r)
```



$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$

Αντισταθμισμένο σύστημα

$$G(s)G_c(s) = \frac{120(s+4.73)}{s(s+2)(s+14.2)}$$



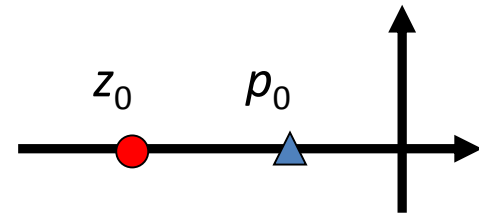
# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης

Αντισταθμιστές καθυστέρησης φάσης

$$G_c(s) = K_c \frac{(s - z_0)}{(s - p_0)}$$

Το μέτρο του πόλου είναι μικρότερο από το μέτρο του μηδενικού

$$|z_0| > |p_0|$$



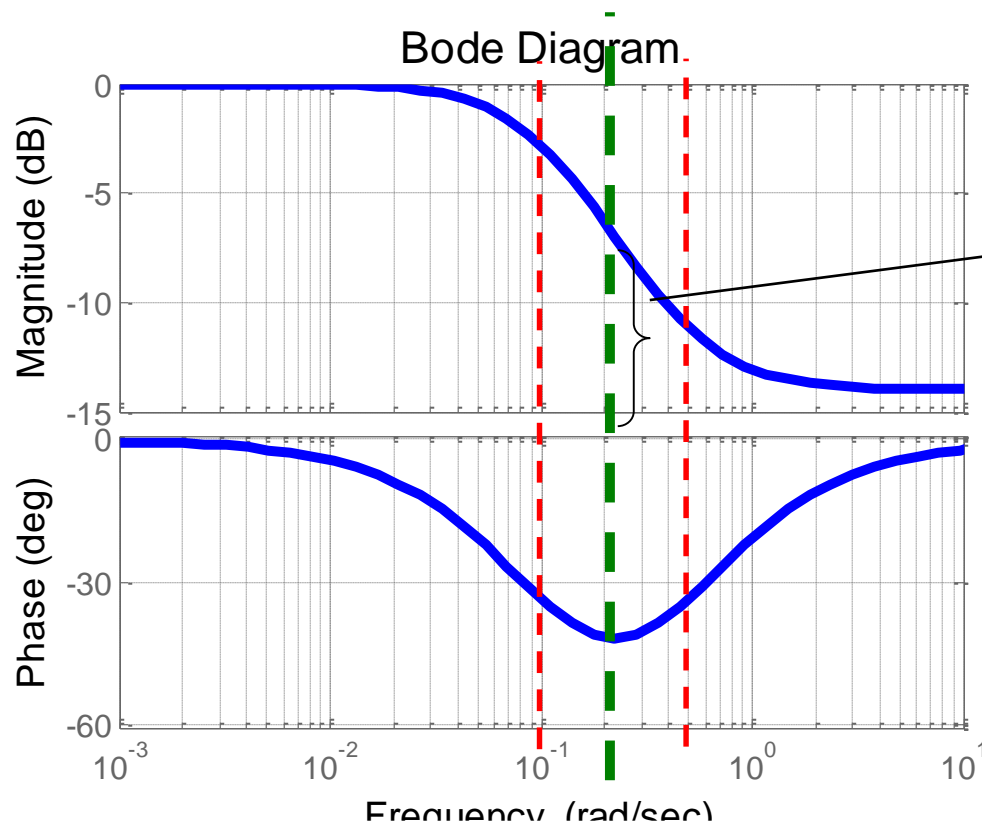
Μετακινεί το ΓΤΡ προς τα δεξιά με αποτέλεσμα να

- μειώνει το περιθώριο ευστάθειας,
- επιβραδύνει την απόκριση του συστήματος,

Μειώνει το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση  
(αυξάνονται οι σταθερές σφάλματος κατά  $z_0/p_0 > 1$ ),



# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης



$$10 \log(a)$$

$$\omega_m = \sqrt{z p}$$

$$a = p/z$$

$$G(s) = \frac{(s + 0.5)}{5(s + 0.1)}$$



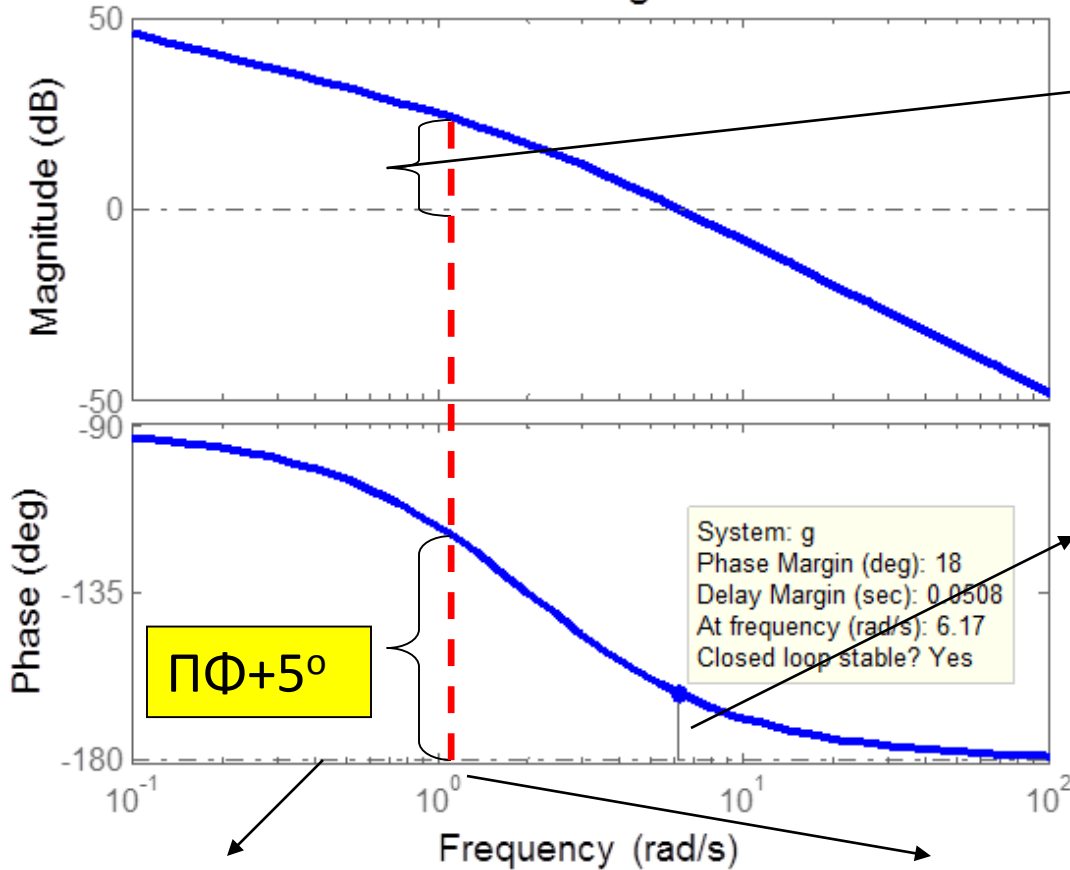


# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης

## Μεθοδολογία

Bishop & Dorf,

Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου, Εκδ. Τζιόλα, 2005  
Bode Diagram



Απαραίτητη εξασθένιση για ικανοποίηση ΠΦ.

Μέγιστη δυνατή εξασθένιση αντισταθμιστή  $20\log(a)$   
Υπολογισμός του  $a$ .

Υπολογισμός ΠΦ

Τοποθέτηση μηδενικού μια δεκάδα χαμηλότερα από  $\omega_c'$

Συχνότητα  $\omega_c'$  που ικανοποιείται το ΠΦ+5°

# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης

## Μεθοδολογία

Bishop & Dorf,

*Σύγχρονα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου*, Εκδ. Τζιόλα, 2005

**Βήμα 1.** Κατασκευή των διαγραμμάτων Bode του μη-αντισταθμισμένου συστήματος όταν ικανοποιούνται οι αντίστοιχες προδιαγραφές των σταθερών σφάλματος.

**Βήμα 2.** Καθορισμός του ΠΦ του μη-αντισταθμισμένου συστήματος. Αν είναι ικανοποιητικό τότε δεν συνεχίζουμε.

**Βήμα 3.** Καθορισμός της συχνότητας,  $\omega_c'$ , στην οποία θα ικανοποιούνταν η απαίτηση της ΠΦ.

**Βήμα 4.** Τοποθέτηση του μηδενικού του αντισταθμιστή μια δεκάδα κάτω από τη νέα κρίσιμη συχνότητα  $\omega_c'$  ώστε να εξασφαλίζεται μόνο 5° επιπλέον καθυστέρηση φάσης στη συχνότητα  $\omega_c'$  λόγω του αντισταθμιστή καθυστέρησης.



# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης

**Βήμα 5.** Μέτρηση της απαραίτητης εξασθένισης στη συχνότητα  $\omega_c'$  ώστε να εξασφαλίζεται ότι η καμπύλη του λόγου πλάτους τέμνει τη γραμμή των 0 dB στη συχνότητα αυτή.

**Βήμα 6.** Υπολογισμός του  $\alpha$ .

**Βήμα 7.** Υπολογισμός του πόλου  $p=z/a$ .



# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης

Παράδειγμα

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Προδιαγραφές:

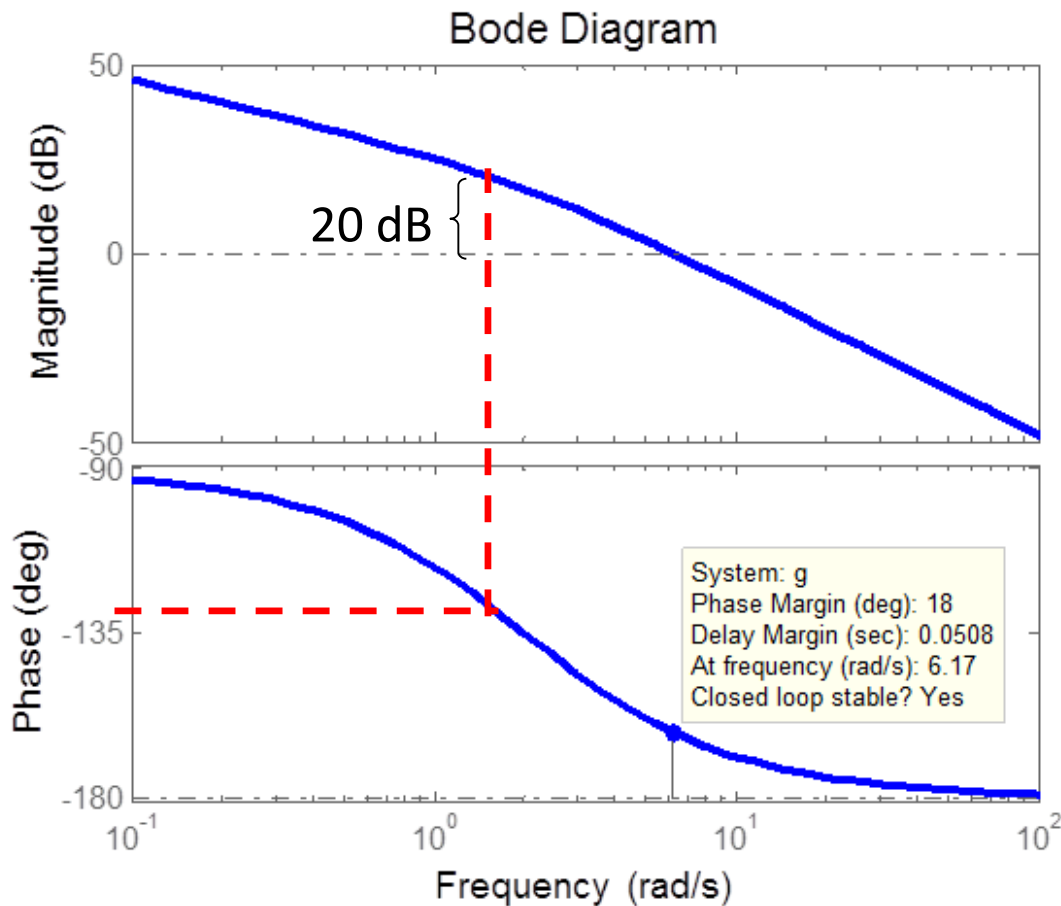
- Σφάλμα μόνιμης κατάστασης σε μεταβολή κλίσης = 5%.
- Ποσοστό υπερύψωσης < 35%.
- Περιθώριο φάσης 45°.

$$K_v = A/e_{ss} = A/(0.05A) = 20$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{2} = 20 \Leftrightarrow K = 40$$



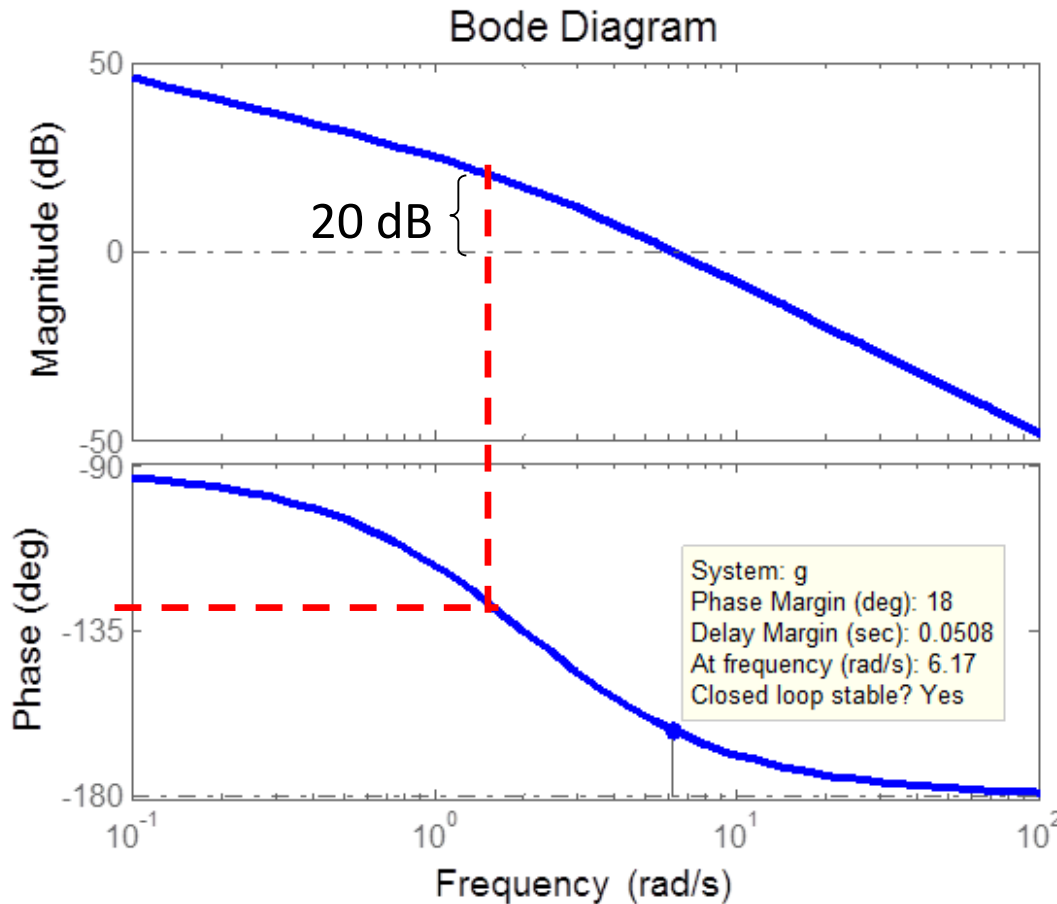
# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης



Η συχνότητα στην οποία το διάγραμμα μέτρου τέμνει τη γραμμή των 0dB είναι 6.2 rad/s. Το περιθώριο φάσης είναι  $18^\circ$  ( $\varphi = -90^\circ - \tan^{-1}(0.5\omega)$ ).

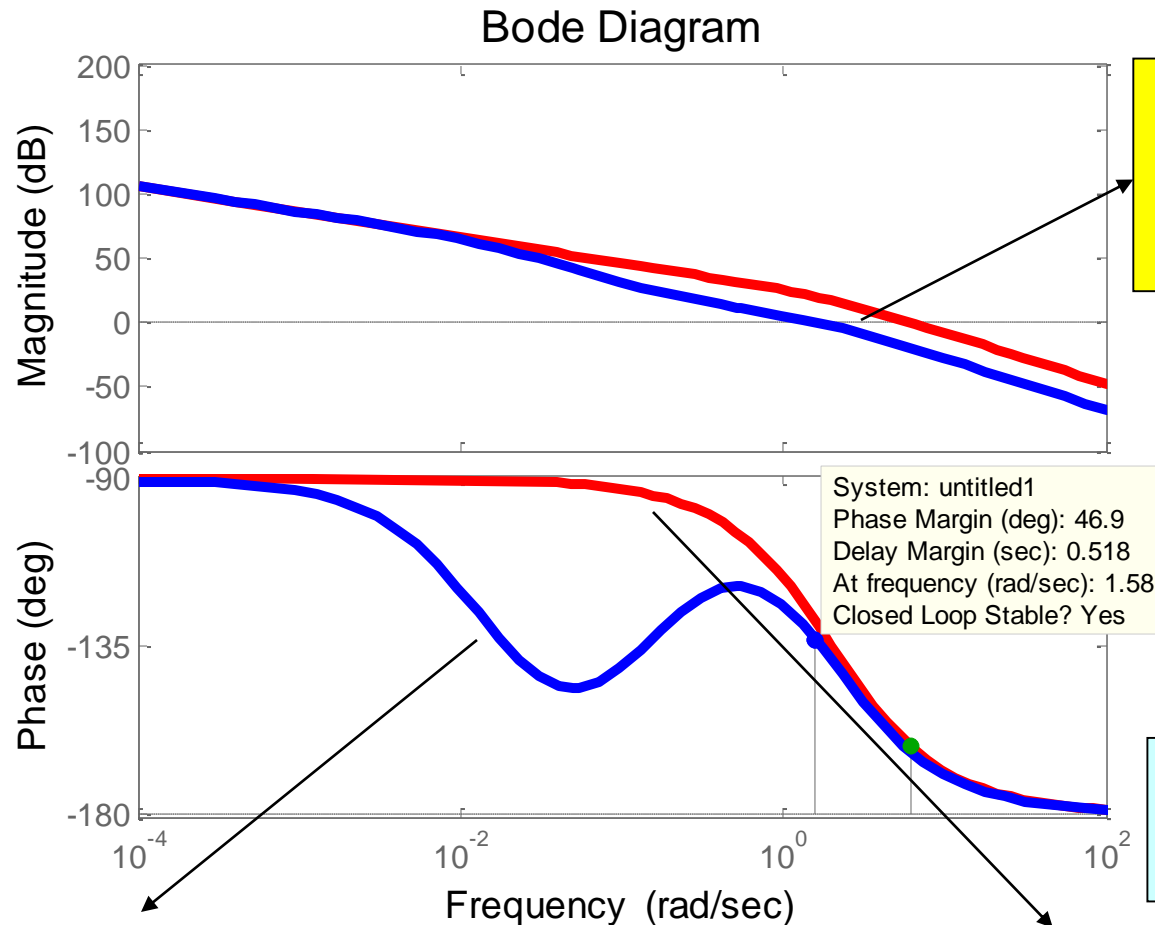
Η απαίτηση στην ΠΦ (δηλ.  $130^\circ$  – με επιπλέον  $5^\circ$  φάση) ικανοποιείται στη συχνότητα  $\omega c' = 1.5$  rad/s. Η εξασθένιση του μέτρου που απαιτείται ισούται με 20 dB.

# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης



Εξασθένιση φάσης  
 $20\text{dB} = 20\log(a) \Leftrightarrow a=10$   
Επομένως το μηδενικό  
ορίζεται μια δεκάδα κάτω  
από την  $\omega_c'=1.5 \text{ rad/s}$   
δηλ.  $\omega_z=0.15 \text{ rad/s}$  ( $z=-0.15$ ).  
Άρα  $\omega_p = \omega_z / 10 = 0.015$   
 $\text{rad/s}$  ( $p=-0.015$ ).

# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης



Εξασθένηση  
κατά 20 dB  
στην  $\omega_c' = 1.5$  Hz

$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$

**Αντισταθμισμένο σύστημα**

$$G(s)G_c(s) = \frac{4(s+0.15)}{s(s+2)(s+0.015)}$$

**Μη αντισταθμισμένο σύστημα**

κόματος Έλεγχος

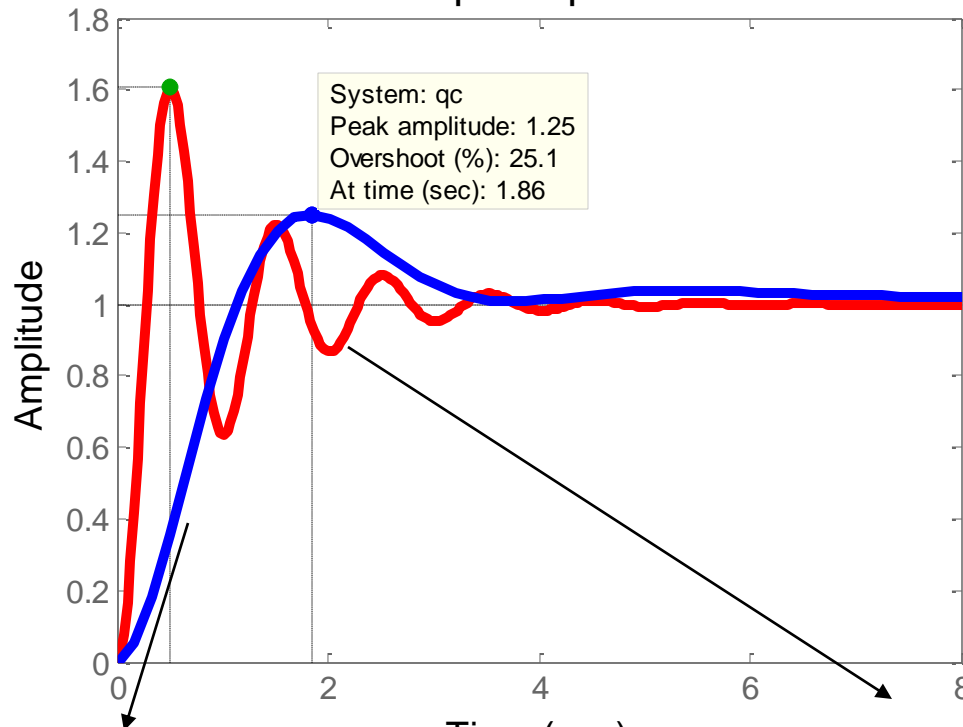
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

# Σχεδίαση αντισταθμιστών καθυστέρησης φάσης

Συνάρτηση μεταφοράς αντισταθμιστή

$$G_c(s) = \frac{(s + 0.15)}{10(s + 0.015)}$$

Step Response



**Αντισταθμισμένο σύστημα**

**Μη αντισταθμισμένο σύστημα**

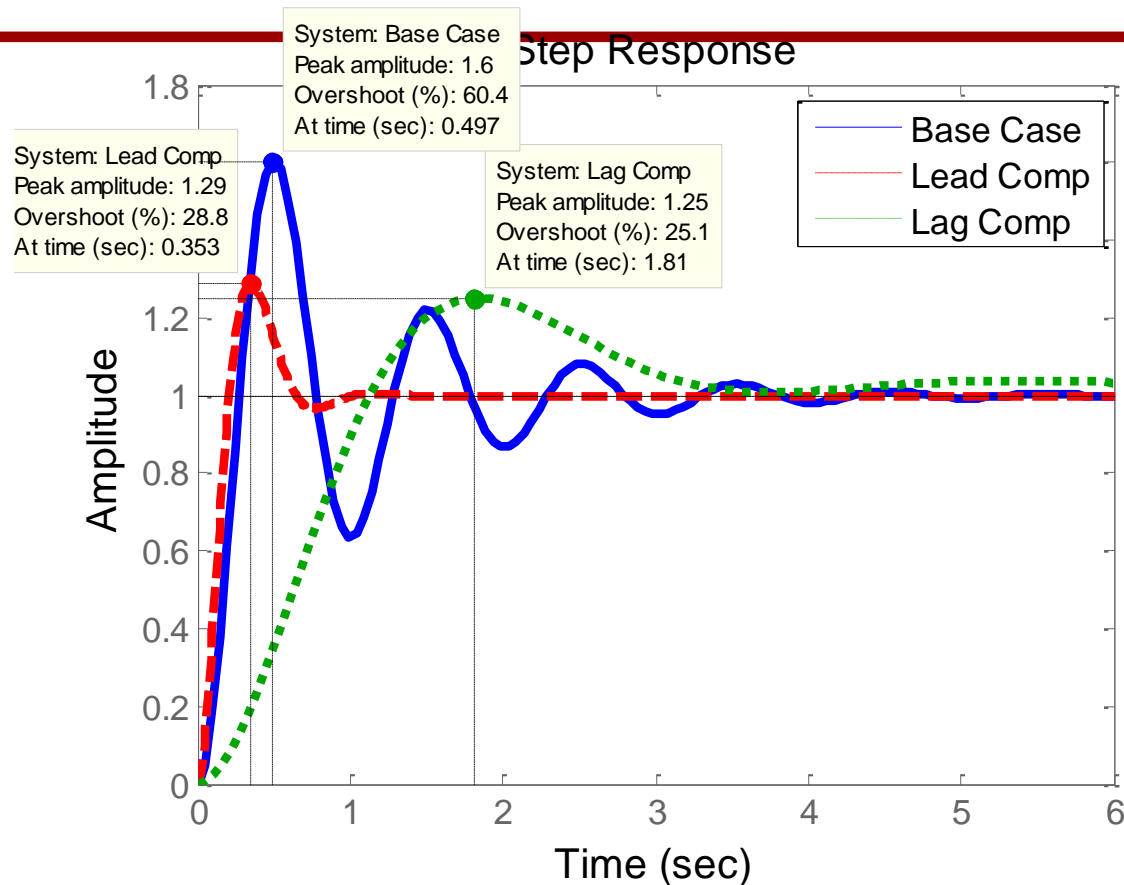
$$G(s)G_c(s) = \frac{4(s + 0.15)}{s(s + 2)(s + 0.015)}$$

$$G(s) = \frac{40}{s(s + 2)}$$

ματος Έλεγχος



# Σχεδίαση αντισταθμιστών στο πεδίο συχνότητας



**Αντισταθμισμένο σύστημα με αντισταθμιστή καθυστέρησης φάσης (lag compensator)**

**Αντισταθμισμένο σύστημα με αντισταθμιστή προήγησης φάσης (lead compensator)**

**Μη αντισταθμισμένο σύστημα**

$$G(s)G_c(s) = \frac{4(s + 0.15)}{s(s + 2)(s + 0.015)}$$

$$G(s)G_c(s) = \frac{120(s + 4.73)}{s(s + 2)(s + 14.2)}$$

$$G(s) = \frac{40}{s(s + 2)}$$

# Επίτευξη μαθησιακών στόχων

Στο τέλος αυτής της ενότητας ο/η εκπαιδευόμενος/η θα πρέπει να μπορεί να:

- Σχεδιάζει ένα αντισταθμιστή προήγησης φάσης στο πεδίο της συχνότητας για επιθυμητή δυναμική και στατική συμπεριφορά.
- Σχεδιάζει ένα αντισταθμιστή καθυστέρησης φάσης στο πεδίο της συχνότητας για επιθυμητή δυναμική και στατική συμπεριφορά.





# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δρ Παπαδόπουλος Αθανάσιος  
Δρ Αγγελική Μονέδα  
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ