



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Αυτόματος Έλεγχος

Ασκήσεις

Παναγιώτης Σεφερλής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Α.Π.Θ.

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα

Άδειες Χρήσης.....	2
Χρηματοδότηση.....	2
Ενότητα 1η: Εισαγωγή στα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου	4
Ενότητα 2η: Ανάλυση δυναμικών συστημάτων με το μετασχηματισμό Laplace.....	6
Ενότητα 3η: Ευστάθεια δυναμικών συστημάτων – Χαρακτηριστικά τυπικών δυναμικών συστημάτων	9
Ενότητα 4η: Μοντέλα μεταβλητών κατάστασης	13
Ενότητα 5η: Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων.....	15
Ενότητα 6η: Δυναμικά χαρακτηριστικά κλειστού βρόχου	21
Ενότητα 7η: Σχεδίαση ελεγκτή PID.....	24
Ενότητα 8η: Βελτίωση επίδοσης απλού βρόχου ανάδρασης.....	33
Ενότητα 9η: Σχεδίαση αντισταθμιστών με το γεωμετρικό τόπο ριζών	41
Ενότητα 10η: Σχεδίαση αντισταθμιστών στο πεδίο της συχνότητας	44
Ενότητα 11η: Σχεδίαση αντισταθμιστών στο πεδίο μεταβλητών κατάστασης.....	47

Ενότητα 1η: Εισαγωγή στα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου

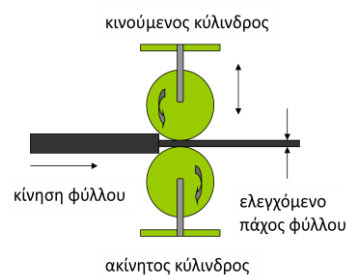
Άσκηση 1.1: Να περιγραφεί η αρχή λειτουργίας ενός συστήματος αυτόματου ελέγχου ανάδρασης του πάχους του χαλυβδόφυλλου για το σύστημα που εικονίζεται στο Σχήμα 1.1.

Να εντοπιστούν οι ρυθμιζόμενες και οι ρυθμιζουσες (χειραγωγούμενες) μεταβλητές.

Να εξηγηθεί πώς επηρεάζει ο ενεργοποιητής τη ρυθμιζόμενη μεταβλητή.

Να εξηγηθεί ποια είναι η σωστή δράση του ενεργοποιητή αν χρειάζεται να αυξηθεί το πάχος του φύλλου.

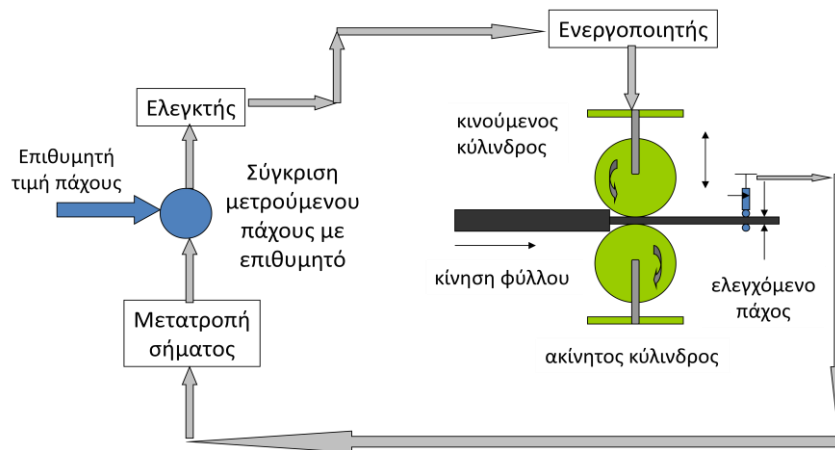
Να προσδιοριστούν πιθανές πηγές διαταραχών που μπορεί να επηρεάσουν τη λειτουργία του συστήματος.



Σχήμα 1.1: Σύστημα παραγωγής χαλυβδόφυλλων.

Λύση

Ένα σύστημα αυτόματου ελέγχου ανάδρασης πρέπει να διαθέτει ένα αισθητήρα για τη μέτρηση της ρυθμιζόμενης μεταβλητής και ένα ενεργοποιητή για την επιβολή μιας επιθυμητής μεταβολής ώστε να γίνει η ρύθμιση της διεργασίας. Στο συγκεκριμένο σύστημα ρυθμιζόμενη μεταβλητή είναι το πάχος του χαλυβδόφυλλου, ενώ χειραγωγούμενη μεταβλητή είναι η κατακόρυφη θέση του κινούμενου κυλίνδρου. Επομένως, για να είναι εφικτός ο έλεγχος του πάχους του χαλυβδόφυλλου πρέπει να εγκατασταθεί ένας αισθητήρας του πάχους του φύλλου ο οποίος θα τροφοδοτεί το σύστημα με πληροφορίες για την πραγματική κατάσταση του παραγόμενου χαλυβδόφυλλου. Η μέτρηση του πάχους θα συγκρίνεται με την επιθυμητή τιμή του πάχους που θα εισάγεται στο σύστημα από το χειριστή. Η διαφορά ανάμεσα στην επιθυμητή τιμή και τη μετρούμενη τιμή θα είναι η είσοδος στον ελεγκτή. Ο ελεγκτής με βάση τη διαφορά από την επιθυμητή τιμή της ρυθμιζόμενης μεταβλητής υπολογίζει τη δράση του ενεργοποιητή. Το ρόλο του ενεργοποιητή τον έχει η θέση του κινούμενου άνω κυλίνδρου με την οποία αυξάνεται ή μειώνεται η πίεση που ασκείται στο χαλυβδόφυλλο και κατ' επέκταση το πάχος του. Η διαδικασία εμφανίζεται σχηματικά στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Σύστημα ελέγχου πάχους χαλυβδόφυλλων.

Ενότητα 2η: Ανάλυση δυναμικών συστημάτων με το μετασχηματισμό Laplace

Άσκηση 2.1: Η ακόλουθη διαφορική εξίσωση περιγράφει τη συμπεριφορά της θερμοκρασίας, T , του ζεστού νερού που προέρχεται από ένα δοχείο θέρμανσης νερού:

$$dT/dt = 30.2F(T_0 - T) + 405Q \quad (1)$$

όπου F είναι η παροχή του νερού μέσω του θερμαντήρα σε L/min, T_0 , είναι η θερμοκρασία του ψυχρού νερού που εισέρχεται στο θερμαντήρα σε °C, Q είναι η ηλεκτρική ισχύς που παρέχεται στο θερμαντήρα σε kW, και t είναι ο χρόνος σε ώρες.

(α) Να προσδιορισθεί η τιμή του Q που απαιτείται για να επιτευχθεί σε μόνιμες συνθήκες θερμοκρασία 85 °C, όταν η παροχή είναι 10 L/min και το εισερχόμενο νερό έχει θερμοκρασία 5 °C.

(β) Να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς ανάμεσα στην T_0 και T και ανάμεσα στα Q και T .

(γ) Να προσδιορισθούν το κέρδος και η σταθερά χρόνου για τη σχέση ανάμεσα στα Q και T .

(δ) Να σχεδιασθεί η δυναμική απόκριση της T ως προς το χρόνο για βηματική μεταβολή κατά -10 kW στο Q , θεωρώντας ότι η T_0 παραμένει σταθερή κατά το πείραμα.

Λύση

(α) Σε μόνιμη κατάσταση ισχύει $dT/dt = 0 = 30.2F(T_0 - T) + 405Q$ όπου προκύπτει η τιμή της ηλεκτρικής ισχύος σε μόνιμη κατάσταση για επίτευξη θερμοκρασίας 85°C
 $0 = 30.2 \cdot 10(5 - 85) + 405Q \Leftrightarrow Q = 59.65 \text{ kW}$

(β) Εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Taylor για την εξίσωση (1) γύρω από το σημείο ισορροπίας και διατηρώντας μόνο τους όρους 1^{ης} τάξης προκύπτει η ακόλουθη γραμμικοποιημένη διαφορική εξίσωση:

$$dT/dt = 30.2[F_s(T_0 - T_{0s}) - F_s(T - T_s) + (T_{0s} - T_s)(F - F_s)] + 405Q \quad (2)$$

Επισημαίνεται ότι ισχύει η σχέση σε μόνιμη κατάσταση $0 = 30.2F_s(T_{0s} - T_s) + 405Q_s$ (3)

Αφαιρώντας την εξίσωση (3) από την εξίσωση (2) και ορίζοντας ως μεταβλητές απόκλισης τις $T'_0 = (T_0 - 5)$, $F' = (F - 5)$ και $T' = (T - 85)$ λαμβάνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση: $dT'/dt = 30.2[10T'_0 - 10T' - 80F'] + 405Q'$

Συλλέγοντας τους κοινούς όρους προκύπτει: $dT'/dt = 30.2[10T'_0 - 10T' - 80F'] + 405Q'$

(4).

Η διαφορική εξίσωση (4) έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες και επομένως με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace λαμβάνεται:

$$sT'(s) = 302T'_0(s) - 302T'(s) - 2416F'(s) + 405Q'(s)$$

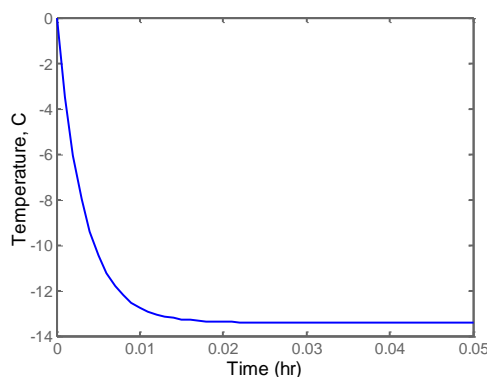
$$T'(s) = \frac{302}{(s+302)}T'_0(s) + \frac{-2416}{(s+302)}F'(s) + \frac{405}{(s+302)}Q'(s)$$

$$\frac{T'(s)}{T_0'(s)} = \frac{302}{(s+302)}, \quad \frac{T'(s)}{Q'(s)} = \frac{405}{(s+302)}$$

(γ) Το κέρδος μιας συνάρτησης μεταφοράς υπολογίζεται θέτοντας $s=0$ στη συνάρτηση μεταφοράς (προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος της τελικής τιμής στο πεδίο Laplace με την προϋπόθεση το όριο να υπάρχει). Οπότε το κέρδος της συνάρτησης μεταφοράς ανάμεσα στη θερμοκρασία εξόδου και την ηλεκτρική ισχύ είναι $K=405/302=1.34$ °C/kW (μονάδες μεταβλητής εξόδου/μονάδες μεταβλητής εισόδου). Η σταθερά χρόνου ισούται με $\tau=1/302=0.0033$ h.

(δ) Η βηματική μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος κατά -10 kW προκαλεί τη μείωση της θερμοκρασίας εξόδου κατά $-10 \times 1.34 = -13.4$ °C. Η απόκριση παρουσιάζει εκθετική μορφή επειδή η συνάρτηση μεταφοράς είναι 1^{ης} τάξης. Η απόκριση εμφανίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα. Οι εντολές στο MATLAB που οδηγούν στη σχεδίαση της απόκρισης είναι οι ακόλουθες:

```
g=tf([405],[1 302]);
step(g*(-10))
```



Σχήμα 2.1: Βηματική απόκριση θερμοκρασίας.

Σημείωση: Η θερμοκρασία εκφράζεται ως μεταβλητή απόκλισης από το σημείο ισορροπίας.

Άσκηση 2.2: Να υπολογιστεί αναλυτικά η απόκριση ενός συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8}{(s^2 + 2s + 8)}$ σε περιοδική μεταβολή της μεταβλητής εισόδου $u(t) = \cos(3t)$.

Λύση

Η απόκριση στο πεδίο Laplace λαμβάνει τη μορφή:

$$Y(s) = \frac{8}{(s^2 + 2s + 8)} U(s) = \frac{8}{(s^2 + 2s + 8)} \frac{s}{(s^2 + 9)}$$

Η σχέση της απόκρισης στο πεδίο Laplace εκφράζεται ως άθροισμα μερικών κλασμάτων. Ο παρονομαστής παρουσιάζει δύο ζεύγη συζυγών μιγαδικών ριζών.

$$\begin{aligned} \frac{8}{(s^2 + 2s + 8)} \frac{s}{(s^2 + 9)} &= \frac{As + B}{(s + 1)^2 + 7} + \frac{Cs + D}{s^2 + 3^2} = \\ &= \frac{(A + C)s^3 + (B + D + 2C)s^2 + (9A + 8C + 2D)s + (9B + 8D)}{[(s + 1)^2 + 7][s^2 + 3^2]} \end{aligned}$$

Οι παράμετροι A , B , C και D υπολογίζονται από την εξίσωση των συντελεστών των ομοίων δυνάμεων των πολυωνύμων του αριθμητή ως $A=8/37$, $B=-128/37$, $C=-8/37$, $D=144/37$.

Η συνάρτηση μεταφοράς μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη μορφή τεσσάρων όρων.

$$\begin{aligned} \frac{8/37s - 128/37}{(s + 1)^2 + 7} + \frac{-8/37s + 144/37}{s^2 + 3^2} &= \\ &= \frac{8}{37} \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 7} - \frac{8}{37} \frac{17}{\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}}{(s + 1)^2 + 7} - \frac{8/37s}{s^2 + 3^2} + \frac{144/37}{s^2 + 3^2} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις του μετασχηματισμού Laplace.

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \rightarrow \sin(\omega t) \quad \frac{144}{37} \frac{1}{3} \frac{3}{s^2 + 9} \rightarrow \frac{48}{37} \sin(3t)$$

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \rightarrow \cos(\omega t) \quad -\frac{8}{37} \frac{s}{s^2 + 9} \rightarrow -\frac{8}{37} \cos(3t)$$

$$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{-at} \sin(\omega t) \quad -\frac{8}{37} \frac{17}{\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}}{(s + 1)^2 + 7} \rightarrow -\frac{8}{37} \frac{17\sqrt{7}}{7} e^{-t} \sin(\sqrt{7}t)$$

$$\frac{(s + a)}{(s + a)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{-at} \cos(\omega t) \quad \frac{8}{37} \frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + 7} \rightarrow \frac{8}{37} e^{-t} \cos(\sqrt{7}t)$$

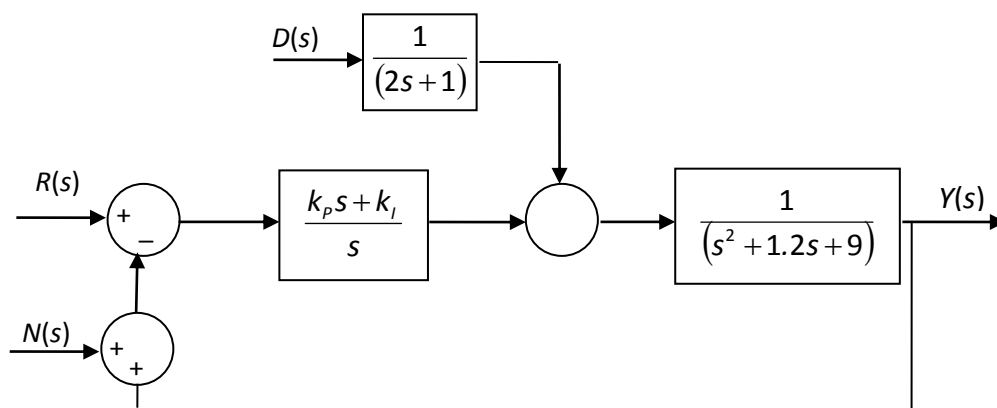
Η χρονική απόκριση προκύπτει από τη σύνθεση των τεσσάρων όρων.

$$y(t) = -\frac{8}{37} \frac{17\sqrt{7}}{7} e^{-t} \sin(\sqrt{7}t) + \frac{8}{37} e^{-t} \cos(\sqrt{7}t) + \frac{48}{37} \sin(3t) - \frac{8}{37} \cos(3t).$$

Ενότητα 3η: Ευστάθεια δυναμικών συστημάτων – Χαρακτηριστικά τυπικών δυναμικών συστημάτων

Άσκηση 3.1: Για το σύστημα ελέγχου που περιγράφεται από το διάγραμμα βαθμίδων του Σχήματος 3.1:

- (α) Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις μεταφοράς $Y(s)/R(s)$, $Y(s)/D(s)$ και $Y(s)/N(s)$.
 (β) Να υπολογιστεί το εύρος τιμών για τις παραμέτρους k_p και k_i για τις οποίες το σύστημα παραμένει ευσταθές.



Σχήμα 3.1

Λύση

(α) Οι συναρτήσεις μεταφοράς έχουν ως εξής:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_p s + k_i}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + 1.2s + 9)}}{1 + \frac{k_p s + k_i}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + 1.2s + 9)}} = \frac{k_p s + k_i}{s(s^2 + 1.2s + 9) + k_p s + k_i} = \frac{k_p s + k_i}{s^3 + 1.2s^2 + (9 + k_p)s + k_i}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{(2s+1)} \cdot \frac{1}{(s^2 + 1.2s + 9)}}{1 + \frac{k_p s + k_i}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + 1.2s + 9)}} = \frac{s}{(2s+1)[s^3 + 1.2s^2 + (9 + k_p)s + k_i]}$$

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{\frac{k_p s + k_i}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + 1.2s + 9)}}{1 + \frac{k_p s + k_i}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + 1.2s + 9)}} = -\frac{k_p s + k_i}{s(s^2 + 1.2s + 9) + k_p s + k_i} = -\frac{k_p s + k_i}{s^3 + 1.2s^2 + (9 + k_p)s + k_i}$$

(β) Για τη μελέτη της ευστάθειας του συστήματος εφαρμόζεται το κριτήριο Routh-Hurwitz στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου $s^3 + 1.2s^2 + (9 + k_p)s + k_i$.

Καταστρώνεται ο πίνακας Routh-Hurwitz.

s^3	1	$(9+k_p)$
s^2	1.2	k_I
s^1	$[1.2(9+k_p)-k_I]/1.2$	
s^0	k_I	

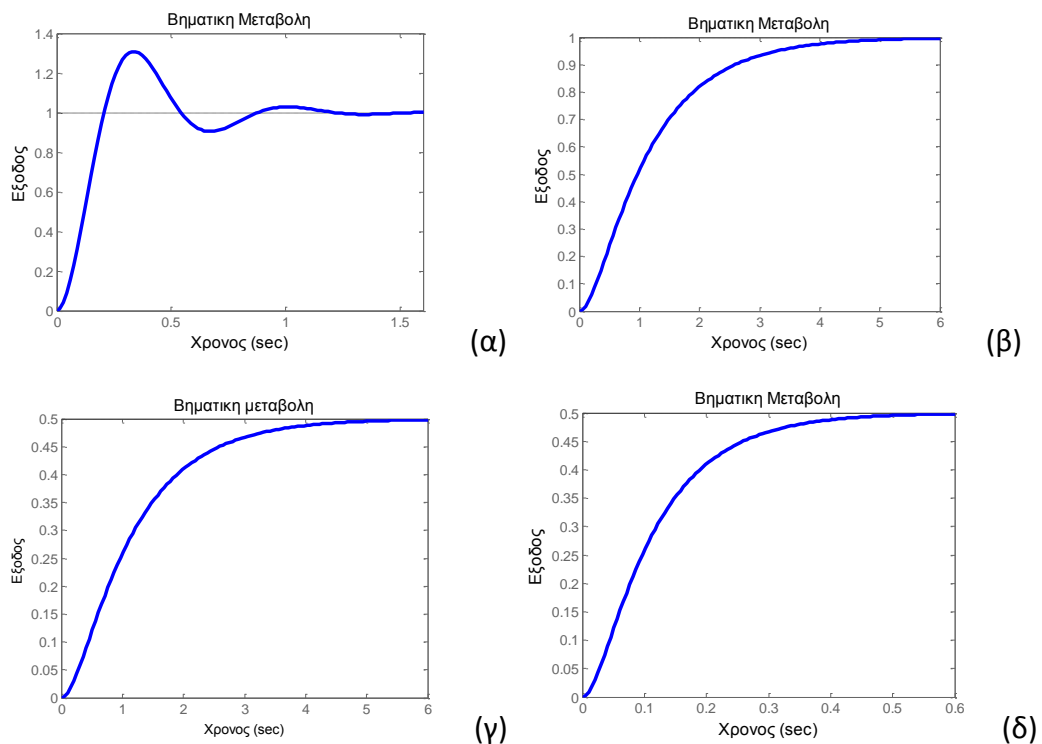
Για ευστάθεια (δηλαδή για να είναι όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου με αρνητικό πραγματικό μέρος) πρέπει η πρώτη στήλη του πίνακα Routh-Hurwitz να έχει όλα τα στοιχεία της θετικά. Επομένως, πρέπει να ισχύει $k_I > 0$ και $1.2(9+k_p) - k_I > 0 \Leftrightarrow k_p > k_I/1.2 - 10.8$ ή $k_I < 1.2k_p + 10.8$.

Με την αυθαίρετη επιλογή της τιμής μιας εκ των δύο παραμέτρων οι εξαγόμενες σχέσεις επιτρέπουν την επιλογή της δεύτερης έτσι ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές.

Άσκηση 3.2: Θεωρείστε τις ακόλουθες συναρτήσεις μεταφοράς $Y(s)/U(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)}, \quad G_2(s) = \frac{200}{(s+10)(s+40)}, \quad G_3(s) = \frac{100}{(s^2 + 7s + 100)}, \quad G_4(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

Στο Σχήμα 3.2 δίνονται οι δυναμικές αποκρίσεις σε βηματική μεταβολή της εισόδου $U(s)$. Να γίνει αντιστοίχιση των αποκρίσεων με τις συναρτήσεις μεταφοράς. Να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.



Σχήμα 3.2 Δυναμική απόκριση συστημάτων.

Λύση

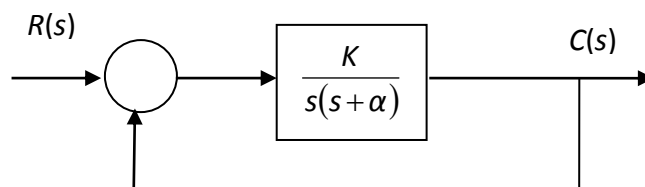
Το γράφημα (α) προέρχεται από τη συνάρτηση μεταφοράς $G_3(s)$ λόγω των παρατηρούμενων ταλαντώσεων εξ' αιτίας των μιγαδικών πόλων στα $s=-3.5\pm 9.3675i$.

Το γράφημα (β) αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς $G_4(s)$ λόγω των πραγματικών πόλων $s=-1$ και $s=-4$ και του κέρδους της συνάρτησης $K=1$ (το κέρδος της συνάρτησης μεταφοράς $G_4(0)=1$ ταυτίζεται με την τελική τιμή της απόκρισης).

Το γράφημα (γ) αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς $G_1(s)$ λόγω των πραγματικών πόλων στα $s=-1$ και $s=-4$ που αντιστοιχούν σε σταθερές χρόνου $\tau_1=1$ s και $\tau_2=0.25$ s, αντίστοιχα και του κέρδους $K=0.5$ (τελική τιμή της απόκρισης). Με βάση το γράφημα η μόνιμη κατάσταση επέρχεται μετά από 6 s.

Το γράφημα (δ) αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς $G_2(s)$ λόγω των πραγματικών πόλων $s=-10$ και $s=-40$ που αντιστοιχούν σε σταθερές χρόνου $\tau_1=0.1$ s και $\tau_2=0.025$ s και του κέρδους $K=0.5$. Με βάση το γράφημα η μόνιμη κατάσταση επέρχεται μετά από 0.6 s.

Άσκηση 3.3: Να υπολογιστούν τιμές για τις παραμέτρους K και α ώστε το σύστημα που περιγράφεται από το διάγραμμα βαθμίδων του Σχήματος 3.3 να εμφανίζει χρόνο αποκατάστασης 0.4 s και ποσοστό υπερύψωσης 35 %.



Σχήμα 3.3

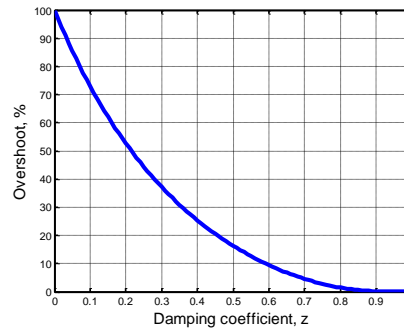
Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου υπολογίζεται ως:

$$T(s) = \frac{K}{s(s+\alpha) + K} = \frac{K}{s^2 + \alpha s + K} \text{ που είναι ένα σύστημα 2ης τάξης με φυσική}$$

συχνότητα \sqrt{K} και συντελεστή απόσβεσης $\zeta = \alpha / (2\sqrt{K})$.

Οι προδιαγραφές απαιτούν ποσοστό υπερύψωσης μικρότερο από 35% που αντιστοιχεί με βάση το ακόλουθο διάγραμμα σε συντελεστή $\zeta > 0.3$. Ο χρόνος αποκατάστασης $T_s = 4 / (\zeta \omega_n) = 0.4$ s οπότε $\zeta \omega_n = 10$. Για $\zeta = 0.30 \rightarrow \omega_n = 33.33$. Με εξίσωση των αντίστοιχων όρων του συστήματος με αυτούς των προδιαγραφών προκύπτει $K=1111.11$ και $\alpha=20$.



Σχήμα 3.4: Επίδραση συντελεστή απόσβεσης στο ποσοστό υπερύψωσης ενός συστήματος 2^{ης} τάξης.

Ενότητα 4η: Μοντέλα μεταβλητών κατάστασης

Άσκηση 4.1: Η δυναμική συμπεριφορά της κατακόρυφης γωνίας μετατόπισης, x_1 , ενός πλοίου κατά την εφαρμογή ροπής, u , από πλευρικά σταθεροποιητικά πτερύγια καθώς και σε κυματισμό, w , δίνεται από το ακόλουθο σύστημα μεταβλητών κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} w \text{ με } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

- (α) Να προσδιοριστεί η ευστάθεια του συστήματος ανοικτού βρόχου.
 (β) Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις μεταφοράς $Y(s)/U(s)$ και $Y(s)/W(s)$.
 (γ) Να υπολογιστεί ο πίνακας μεταφοράς $\Phi(s)$.
 (δ) Να προσδιοριστεί η αναλυτική έκφραση της απόκρισης στο πεδίο του χρόνου, $x(t)$, για μοναδιαία βηματική μεταβολή των σταθεροποιητικών πτερυγίων, $u(t)$.
 (ε) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί στο MATLAB η απόκριση του συστήματος σε μεταβολή του κυματισμού $w(t)=0.1*t$ για $0<t<10$ s, $w(t)=2-0.1*t$ για $10<t<20$ s και $w(t)=0$ $t>20$ s.

Λύση

(α) Η ευστάθεια προσδιορίζεται από τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -1.5 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 9 & \lambda + 1.5 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.5\lambda + 9 = 0$$

Οι ιδιοτιμές υπολογίζονται $\lambda_{1,2} = -0.75 \pm 2.9i$ που αντιστοιχούν σε συντελεστή απόσβεσης $\zeta = 0.25$ και φυσική συχνότητα $\omega_n = 3.0$ rad/s. Οι ιδιοτιμές του συστήματος έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και επομένως το σύστημα είναι ευσταθές.

(β) Με μετασχηματισμό Laplace του μοντέλου μεταβλητών κατάστασης χρησιμοποιώντας κάθε φορά τη ζητούμενη μεταβλητή εξόδου υπολογίζονται οι συναρτήσεις μεταφοράς $Y(s)/U(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1$ και $Y(s)/W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_2$ με

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας μεταφοράς $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ υπολογίζεται ως:

$$\Phi(s) = \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -1.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 9 & s + 1.5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 9} \begin{bmatrix} s + 1.5 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix}$$

Επομένως εξάγονται οι συναρτήσεις μεταφοράς:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 9} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1.5 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 9} \begin{bmatrix} s + 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{9}{s^2 + 1.5s + 9}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 9} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1.5 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 1.5s + 9} \begin{bmatrix} s + 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{8}{s^2 + 1.5s + 9}.$$

(γ) Από το ερώτημα (β) προκύπτει ο πίνακας μεταφοράς $\Phi(s)$.

$$(\delta) Y(s) = \frac{9}{s^2 + 1.5s + 9} U(s) = \frac{9}{s^2 + 1.5s + 9} \frac{1}{s}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνει:

$$Y(s) = \frac{9}{s^2 + 1.5s + 9} \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s + 0.75)^2 + 8.4375} = \frac{1}{s} - \frac{s + 1.5}{(s + 0.75)^2 + 8.4375}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 0.75}{(s + 0.75)^2 + 8.4375} - \frac{0.75}{(s + 0.75)^2 + 8.4375}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 0.75}{(s + 0.75)^2 + 2.9047^2} - 0.2582 \frac{2.9047}{(s + 0.75)^2 + 2.9047^2}$$

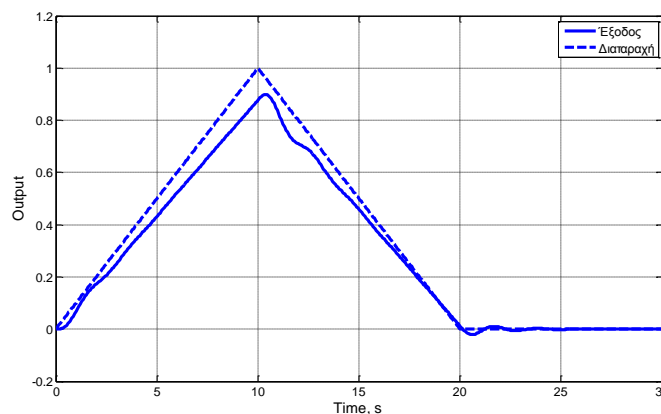
$$y(t) = 1 - e^{-0.75t} \cos(2.9047t) - 0.2582 e^{-0.75t} \sin(2.9047t)$$

Οι εντολές στο MATLAB® έχουν ως εξής:

```
syms s
ilaplace(9/(s*(s^2+1.5*s+9)))
1 - (cos((3*15^(1/2)*t)/4) +
(15^(1/2)*sin((3*15^(1/2)*t)/4))/15)/exp((3*t)/4)
```

(ε) Η προσομοίωση γίνεται με τις ακόλουθες εντολές στο MATLAB®.

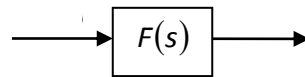
```
a=[0 1;-9 -1.2]; b2=[0 8]'; c=[1 0];
sysa=ss(a,b2,c,0);
t=[0:0.05:50];
w=[0.1*t(1:201) 2-0.1*t(202:401) zeros(1,600)];
[y,t,x]=lsim(sysa,w,t);
plot(t,y)
hold on
plot(t,w,'--')
legend('Έξοδος','Διαταραχή')
```



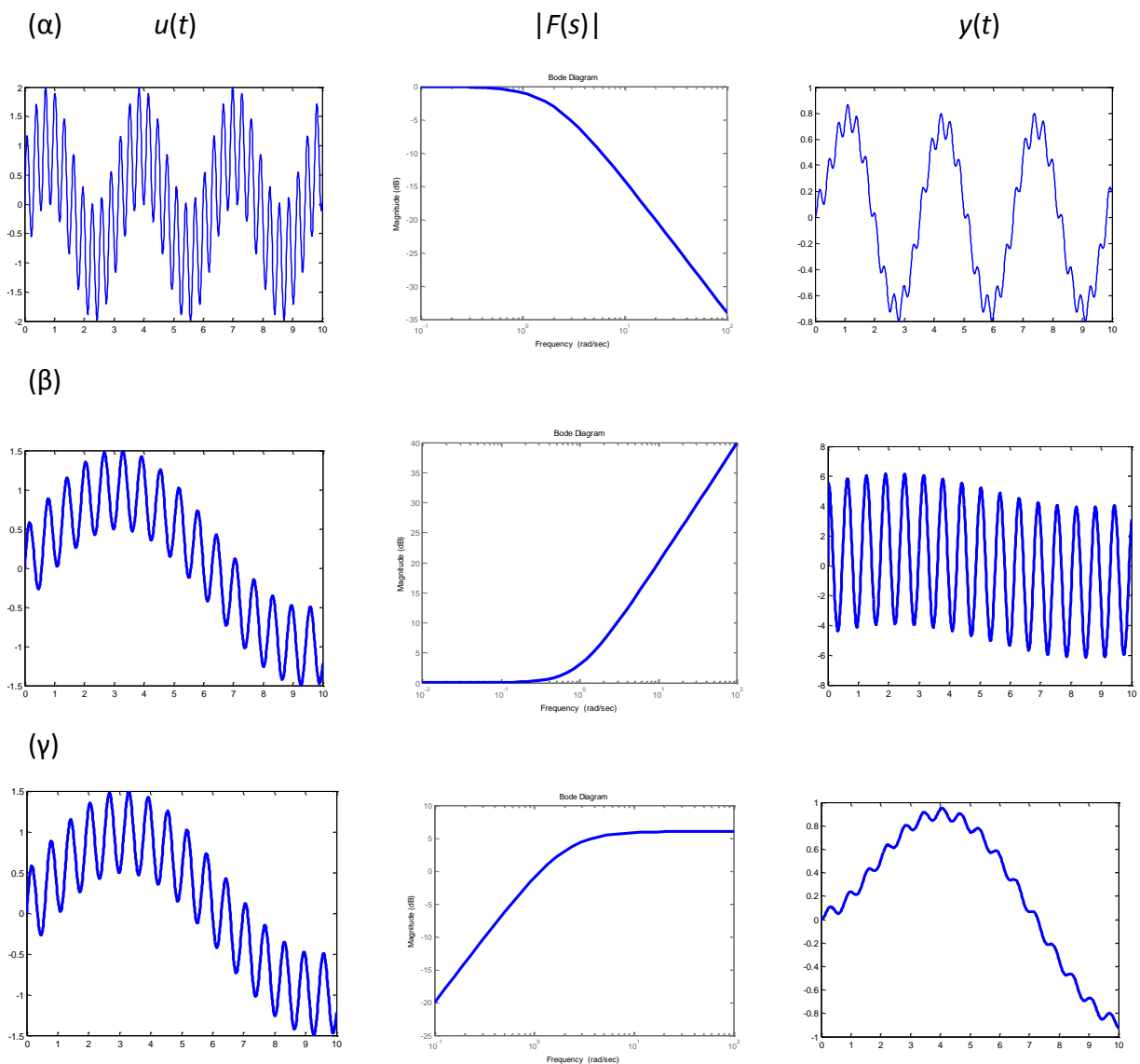
Σχήμα 4.1: Χρονική απόκριση συστήματος σε μεταβολή του κυματισμού.

Ενότητα 5η: Απόκριση συχνότητας δυναμικών συστημάτων

Άσκηση 5.1: Να θεωρηθεί το φίλτρο $F(s)$ που εικονίζεται στο Σχήμα 5.1. Να ελεγχθεί ποιοτικά αν αντιστοιχούν τα δεδομένα εισόδου-εξόδου στο διάγραμμα λόγου πλάτους του φίλτρου όπως εικονίζονται στο Σχήμα 5.2. Να παρατεθεί σύντομη αιτιολόγηση.



Σχήμα 5.1



Σχήμα 5.2: Δυναμική χρονική απόκριση σημάτων εισόδου και εξόδου (1^η και 3^η στήλη) για το σύστημα που περιγράφεται από την απόκριση συχνότητας (γράφημα λόγου πλάτους) της 2^{ης} στήλης.

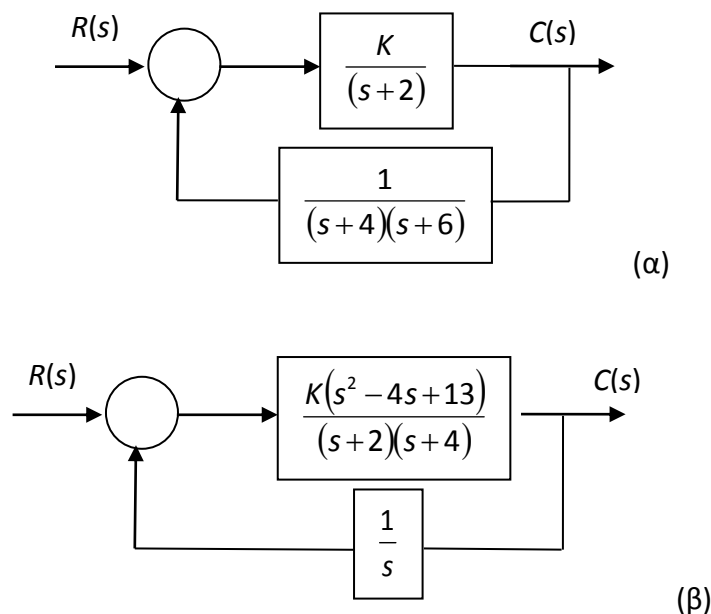
Λύση

(α) Το σύστημα φαίνεται ότι αποσβένει την υψηλή συχνότητα στη σήμα εισόδου, ενώ αντίθετα η χαμηλή συχνότητα του σήματος εισόδου διέρχεται χωρίς σημαντική εξασθένηση του πλάτους ταλάντωσης. Οι παρατηρήσεις αυτές συνάδουν με το διάγραμμα λόγου πλάτους (Bode) της διεργασίας (χαμηλοπερατό φίλτρο).

(β) Το πλάτος ταλάντωσης της συνιστώσας υψηλής συχνότητας ενισχύεται από τη διεργασία που συμφωνεί με το διάγραμμα λόγου πλάτους (Bode) της διεργασίας.

(γ) Το σύστημα φαίνεται ότι αποσβένει την υψηλή συχνότητα στη σήμα εισόδου ενώ αντίθετα η χαμηλή συχνότητα του σήματος εισόδου διέρχεται χωρίς σημαντική εξασθένηση του πλάτους ταλάντωσης. Ωστόσο η συμπεριφορά αυτή δε συμφωνεί με το διάγραμμα λόγου πλάτους (Bode) το οποίο δείχνει την ενίσχυση του πλάτους ταλάντωσης σε υψηλές συχνότητες.

Άσκηση 5.2: Χρησιμοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας Nyquist, να υπολογιστεί το εύρος τιμών για την παράμετρο K για το οποίο τα ακόλουθα δυναμικά συστήματα να παραμένουν ευσταθή.



Σχήμα 5.3: Διάγραμμα βαθμίδων συστημάτων ανάδρασης.

Λύση

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου $G(s) = \frac{K}{(s+2)} \frac{1}{(s+4)(s+6)}$ μετασχηματίζεται στο πεδίο συχνότητας θέτοντας $s=j\omega$.

$$G(j\omega) = \frac{K}{(-12\omega^2 + 48) + (-\omega^3 + 44\omega)j} = \frac{K(-12\omega^2 + 48) - K(-\omega^3 + 44\omega)j}{(-12\omega^2 + 48)^2 + (-\omega^3 + 44\omega)^2}$$

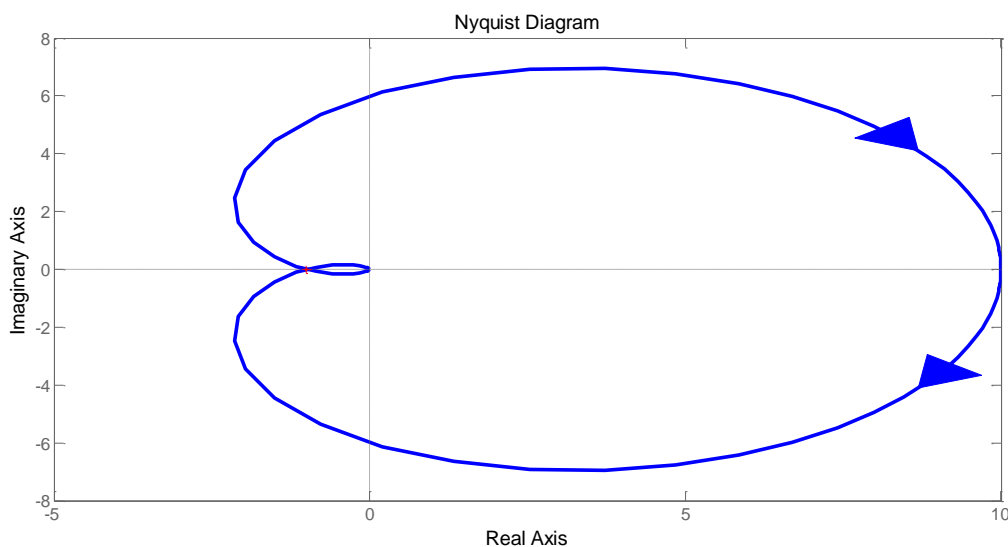
$$= \frac{K(-12\omega^2 + 48) - K(-\omega^3 + 44\omega)j}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 36)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς δεν έχει πόλο στο δεξί ημιεπίπεδο και άρα $P=0$. Η κύκλωση του σημείου $(-1,0)$ συμβαίνει όταν το φανταστικό μέρος της $G(j\omega)$ ισούται με μηδέν $K\omega(-\omega^2 + 44) = 0$. Ο μηδενισμός του φανταστικού μέρους συμβαίνει στη συχνότητα $\omega = 6.633$ rad/s. Το πραγματικό μέρος στη συχνότητα αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$Re[G(j\omega)]_{\omega=6.633} = \left. \frac{K(-12\omega^2 + 48)}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 36)} \right|_{\omega=6.633} = -2.0833 \cdot 10^{-3} K$$

Για να υπάρχει οριακή κύκλωση του κρίσιμου σημείου $(-1,0)$ το πραγματικό μέρος λαμβάνει την τιμή -1 για $K=480$. Επομένως το σύστημα είναι ευσταθές όταν $K < 480$.

Το διάγραμμα Nyquist στο Σχήμα 5.4 επιβεβαιώνει την οριακή ευστάθεια στο σημείο $K=480$.



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα Nyquist για $K=480$.

(β) Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου $G(s) = \frac{K(s^2 - 4s + 13)}{s(s+2)(s+4)}$ μετασχηματίζεται στο

πεδίο συχνότητας θέτοντας $s=j\omega$.

$$G(j\omega) = \frac{-K(4\omega + (13 - \omega^2)j)}{\omega(-\omega^2 + 8 + 44\omega j)} = \frac{-K[(-10\omega^3 + 110\omega) + (\omega^4 - 45\omega^2 + 104)j]}{\omega(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)}$$

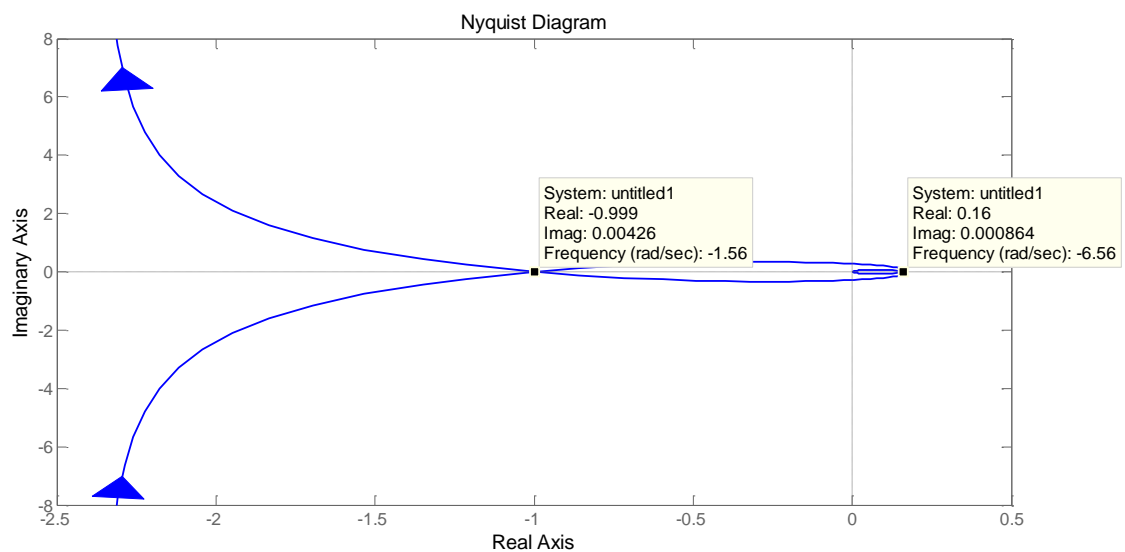
Η συνάρτηση μεταφοράς δεν έχει πόλο στο δεξί ημιεπίπεδο και άρα $P=0$. Η κύκλωση του σημείου $(-1,0)$ συμβαίνει όταν το φανταστικό μέρος της $G(j\omega)$ ισούται με μηδέν $-K(\omega^4 - 45\omega^2 + 104) = 0$. Ο μηδενισμός του φανταστικού μέρους συμβαίνει στη συχνότητα $\omega = 1.56$

rad/s (υπάρχει και δεύτερη συχνότητα που μηδενίζεται το φανταστικό μέρος 6.5235 rad/s, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα Nyquist που ακολουθεί, αλλά η κύκλωση αυτή βρίσκεται μακριά από το κρίσιμο σημείο και αγνοείται). Το πραγματικό μέρος στη συχνότητα αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)]_{\omega=1.56} = \frac{-K(-10\omega^3 + 110\omega)}{\omega(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 16)} \Big|_{\omega=1.56} = -0.72233K. \text{ Για να υπάρχει οριακή κύκλωση του}$$

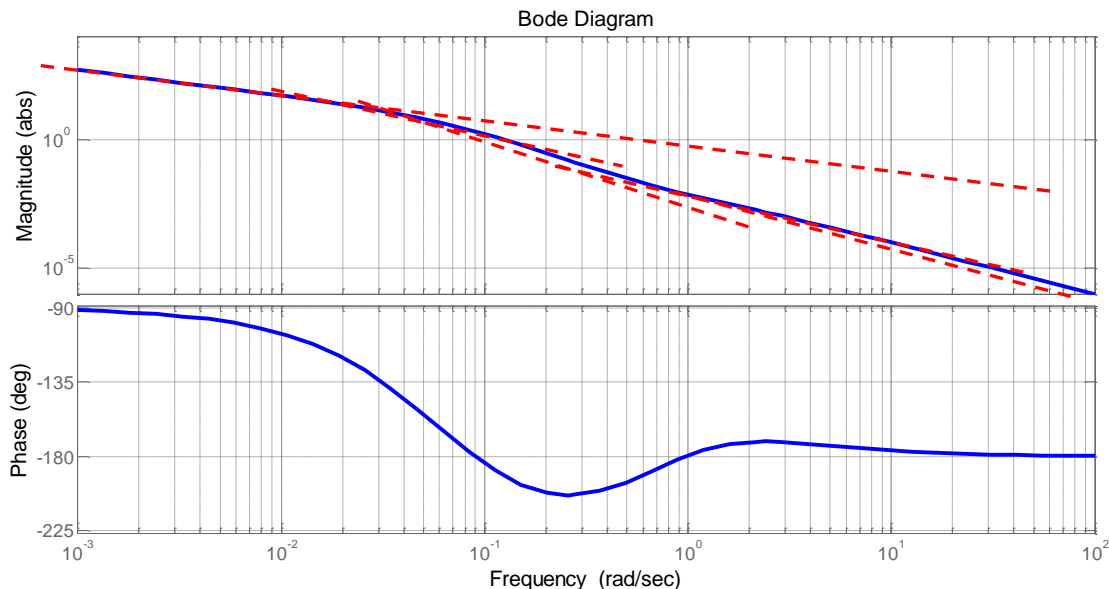
κρίσιμου σημείου $(-1,0)$ το πραγματικό μέρος λαμβάνει την τιμή -1 για $K=1.384$. Επομένως το σύστημα είναι ευσταθές όταν $K < 1.384$.

Το διάγραμμα Nyquist στο Σχήμα 5.5 επιβεβαιώνει την οριακή ευστάθεια στο σημείο $K=1.384$.



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα Nyquist για $K=1.384$.

Άσκηση 5.3: Από το ακόλουθο διάγραμμα Bode να εκτιμηθεί προσεγγιστικά η συνάρτηση μεταφοράς. Οι διακεκομμένες ευθείες είναι βοηθητικές που επισημαίνουν την αλλαγή στην κλίση του διαγράμματος του λόγου πλάτους.



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα Bode.

Λύση

Από την κλίση (-1) του λόγου πλάτους καθώς και από τη σύγκλιση της γωνίας φάσης στις -90° σε χαμηλές συχνότητες συμπεραίνεται ότι το σύστημα έχει ένα ολοκληρωτικό πόλο (s=0).

Η σύγκλιση της γωνίας φάσης στις -180° για υψηλές συχνότητες σημαίνει ότι δεν υπάρχει καθυστέρηση χρόνου και ότι (πλήθος πόλων) + (πλήθος μηδενικών στο δεξί ημι-επίπεδο (ΔΗΕ)) - (πλήθος μηδενικών στο αριστερό ΗΕ) = 1.

Επίσης από τη μεταβολή της κλίσης του λόγου πλάτους (μικρότερη κλίση) στις συχνότητες 0.05 rad/s και 0.1 rad/s σημαίνει ότι υπάρχουν δυο πόλοι στις συχνότητες αυτές. Σε αυτό συνηγορεί και το διάγραμμα γωνίας φάσης καθώς η καθυστέρηση φάσης μειώνεται πέρα από τις 180°.

Η μικρή σταδιακή ενίσχυση του λόγου πλάτους καθώς και η προήγηση φάσης υποδηλώνουν την ύπαρξη μηδενικών στο ΑΗΕ κοντά στη συχνότητα 0.5 rad/s και 1 rad/s.

Τελικά, η κλίση σε υψηλές συχνότητες λαμβάνει κλίση -2 ενδεικτικό της ύπαρξης πόλου στο -2 rad/s. Η συνάρτηση μεταφοράς έχει λοιπόν τη μορφή: $G(s) = \frac{K(s+1)(s+0.5)}{(s+2)(s+0.1)(s+0.05)}$.

Εκφράζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς χρησιμοποιώντας σταθερές χρόνου αυτή γίνεται

$$G(s) = \frac{K'(s+1)(2s+1)}{(20s+1)(10s+1)(0.5s+1)}$$

Το κέρδος υπολογίζεται από την τεταγμένη για $\omega=0.001$

rad/s η οποία είναι 500 και επομένως $K'=0.5$.

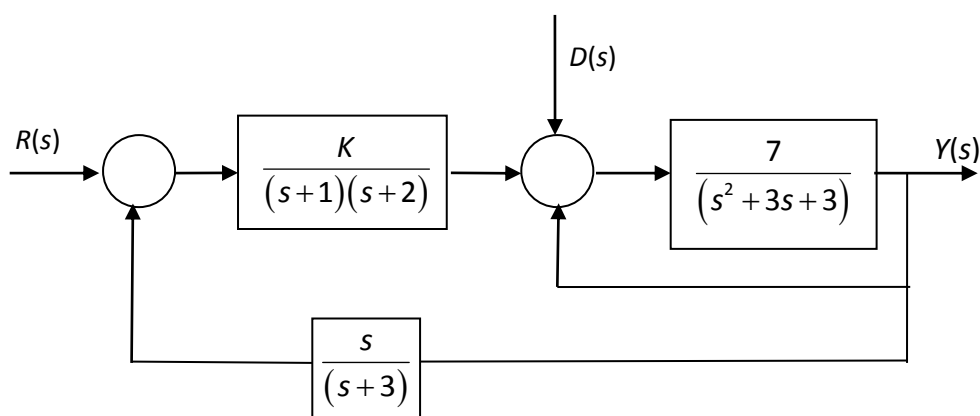
Η σχεδίαση του διαγράμματος Bode στο MATLAB® γίνεται με τις ακόλουθες εντολές.

```
d1=tf([1 1.5 0.5],[1 0]);  
d2=tf([1],conv([20 1],conv([10 1],[0.5 1])))  
bode(d1*d2)
```

Ενότητα 6η: Δυναμικά χαρακτηριστικά κλειστού βρόχου

Άσκηση 6.1: Για το σύστημα ελέγχου που περιγράφεται από το διάγραμμα βαθμίδων του Σχήματος 6.1:

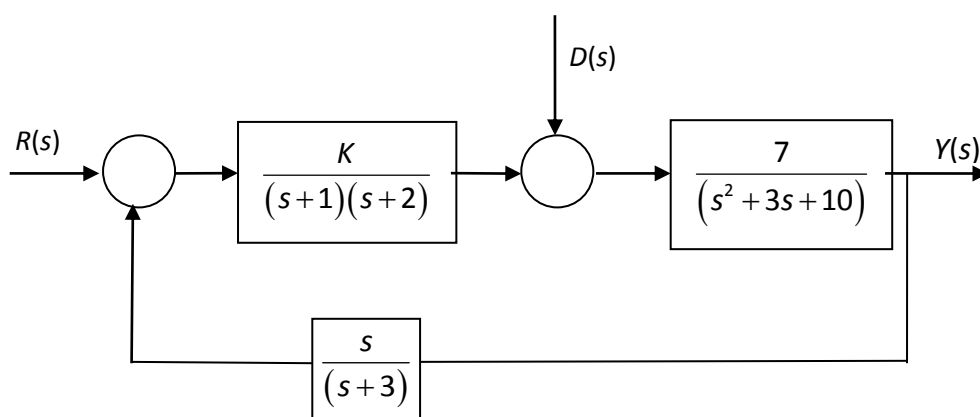
- (α) Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις μεταφοράς $Y(s)/R(s)$ και $Y(s)/D(s)$.
- (β) Να υπολογιστεί το εύρος τιμών για την παράμετρο K για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές.
- (γ) Να υπολογιστούν τα σφάλματα σε μόνιμη κατάσταση για βηματική μεταβολή του σημείου αναφοράς, $R(s)=2/s$, και βηματική μεταβολή της διαταραχής, $D(s)=1/s$.
- (δ) Να προταθεί μια τιμή για την παράμετρο K ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο της ευστάθειας και να επιτυγχάνεται το ελάχιστο σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση για τις περιπτώσεις του ερωτήματος (γ).



Σχήμα 6.1: Διάγραμμα βαθμίδων συστήματος κλειστού βρόχου.

Λύση

(α) Αρχικά ο εσωτερικός βρόχος ανάδρασης εκφράζεται με την ισοδύναμη έκφρασή του.



Σχήμα 6.2: Ισοδύναμο διάγραμμα βαθμίδων συστήματος κλειστού βρόχου.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{(s+1)(s+2)} \frac{7}{(s^2+3s+10)}}{1 + \frac{K}{(s+1)(s+2)} \frac{7}{(s^2+3s+10)} \frac{s}{(s+3)}} = \frac{7K(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{-\frac{7}{(s^2+3s+10)}}{1 + \frac{K}{(s+1)(s+2)} \frac{7}{(s^2+3s+10)} \frac{s}{(s+3)}} = -\frac{7(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks}$$

(β) Η ευστάθεια εξαρτάται από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της συνάρτησης μεταφοράς $(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks = 0$ ή $s^5 + 9s^4 + 39s^3 + 99s^2 + (128 + 7K)s + 60 = 0$

Καταστρώνεται ο πίνακας Routh και εφαρμόζεται το κριτήριο ευστάθειας Routh-Hurwitz.

1	39	128+7K
9	99	60
28	7K+364/3	0
60-9K/4	60	
$-(63K^2)/4 + 147K + 5600 / ((9K)/4 - 60)$	0	

$$60 - 9K/4 > 0 \Leftrightarrow K < 26.667$$

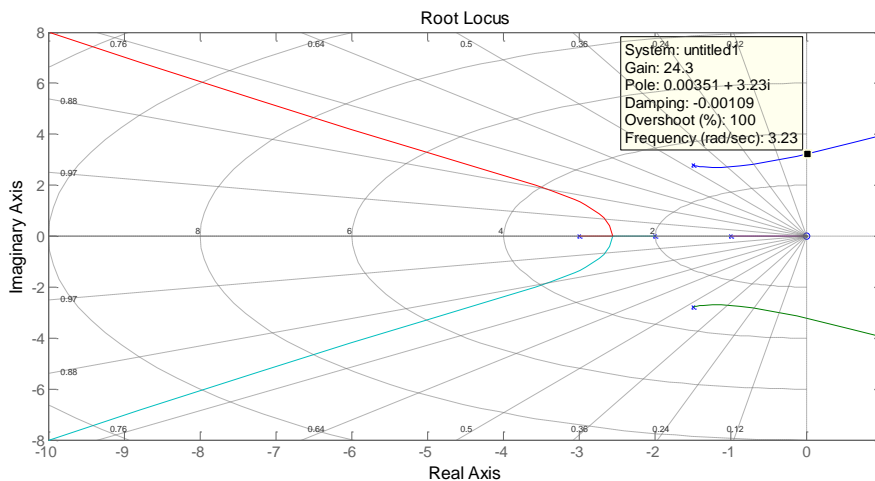
$$-(63K^2)/4 + 147K + 5600 > 0 \Leftrightarrow -(63K^2)/4 + 147K + 5600 > 0$$

Οι ρίζες υπολογίζονται ως $K=24.09$ και $K=-14.75$. Επομένως ο όρος είναι θετικός για $K < 24.09$.

Επομένως, το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές για $K < 24.09$.

Εναλλακτικά, η ευστάθεια μπορεί να εξετασθεί από το γεωμετρικό τόπο ριζών (Σχήμα 6.3).

```
g1=tf([1],conv([1 1],[1 2]));
g2=tf([7],[1 3 10]);
g3=tf([1 0],[1 3]);
rlocus(g1*g2*g3)
```



Σχήμα 6.3: Γεωμετρικός τόπος ριζών συστήματος.

(γ) Το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση για μεταβολή του σημείου αναφοράς υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{7K(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks} \right] R(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks - 7K(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks} \right] \left(\frac{2}{s} \right) =$$

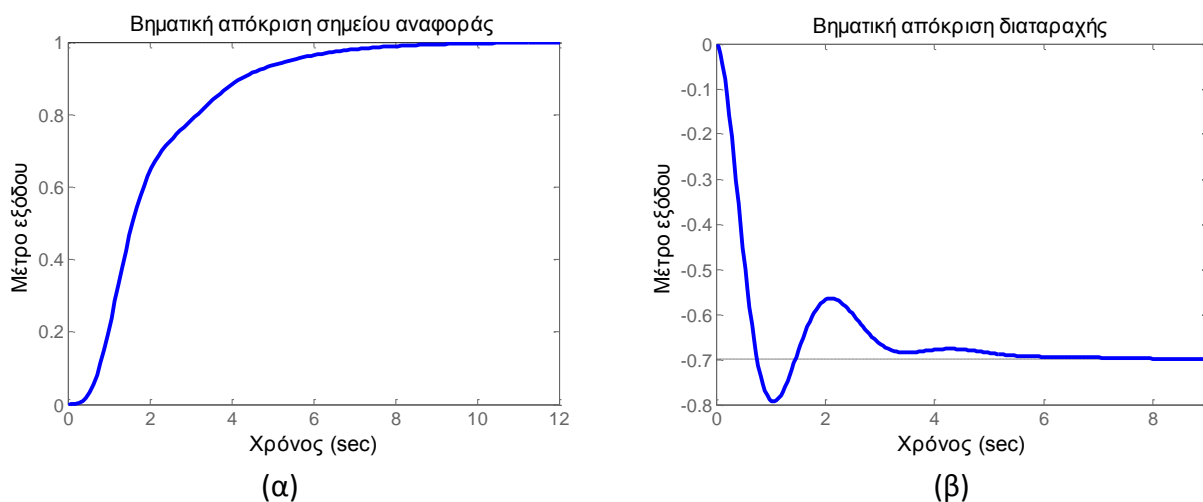
$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) - 21K}{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks} \right] (2) = 2 \left[\frac{60 - 21K}{60} \right]$$

Το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση για μεταβολή της διαταραχής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{7(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks} \right] D(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{7(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2+3s+10) + 7Ks} \right] \left(\frac{1}{s} \right) = \left[\frac{42}{60} \right] = 0.7$$

(δ) Για $K=2.8571$ το σφάλμα για μεταβολή του σημείου αναφοράς μηδενίζεται. Ωστόσο το σφάλμα για μεταβολή της διαταραχής παραμένει 0.7.



Σχήμα 6.4: Απόκριση συστήματος σε βηματική μεταβολή του σημείου αναφοράς (α) και της διαταραχής (β) για $K=2.8571$.

Ενότητα 7η: Σχεδίαση ελεγκτή PID

Άσκηση 7.1: Δίνεται το δυναμικό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.

(α) Να σχεδιαστεί ένας αναλογικός-ολοκληρωτικός (PI) ελεγκτής, $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$, ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να εμφανίζει περιθώριο φάσης 45° στη συχνότητα 1 rad/s . Να προσδιοριστούν οι παράμετροι του ελεγκτή k_p και k_i .

(β) Κατά τη διάρκεια εφαρμογής του ελεγκτή παρατηρήθηκε ότι το σύστημα εμφανίζει καθυστέρηση χρόνου θ ίση με $\pi/6 \text{ s}$. Πώς και πόσο μεταβάλλεται το περιθώριο φάσης του κλειστού βρόχου στην περίπτωση αυτή; (Σημείωση: Οι παράμετροι του ελεγκτή να διατηρηθούν στις τιμές που υπολογίστηκαν στο ερώτημα (α))

(γ) Προστίθεται ένα μηδενικό στη συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή $C_z(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right)(a + bs)$,

ενώ οι παράμετροι του τμήματος του ελεγκτή που αντιστοιχούν στον PI παραμένουν σταθεροί. Να προσδιοριστούν οι παράμετροι a και b ώστε να ικανοποιούνται οι προδιαγραφές του ερωτήματος (α).

Λύση

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι:

$$G(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_i}{2} \frac{\left(\frac{k_p}{k_i} s + 1\right)}{s(s+1)\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}$$

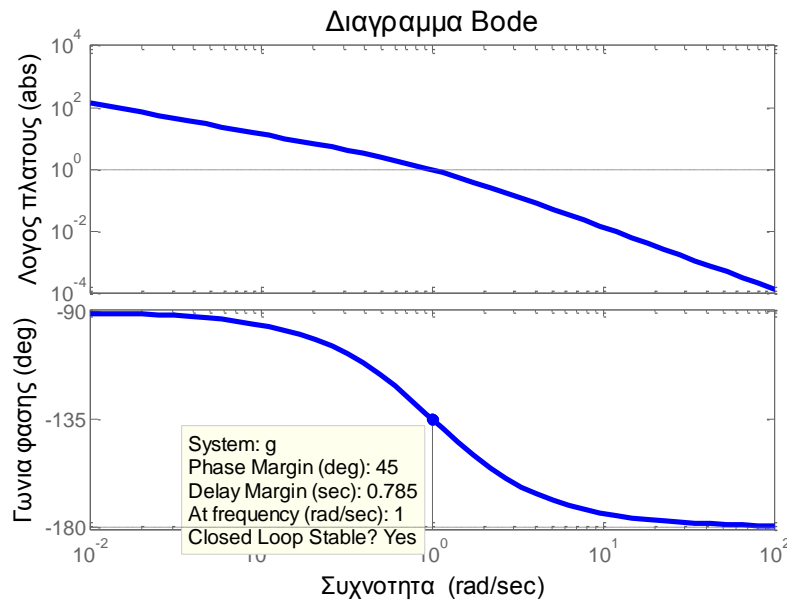
$$AR|_{\omega_c=1} = \frac{k_i}{2\omega} \frac{\sqrt{\left(\frac{k_p}{k_i} \omega\right)^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{(0.5\omega)^2 + 1}} \Bigg|_{\omega_c=1} = 1 \quad (1)$$

$$\varphi|_{\omega_c=1} = -\pi + \text{PM} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\omega\right) + \tan^{-1}\left(\frac{k_p}{k_i} \omega\right) \Bigg|_{\omega_c=1} \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $k_p/k_i=0.5$ και από την (1) υπολογίζονται τα $k_i=2.8284$ και $k_p=1.4142$.

Η λύση επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού

$$\text{βρόχου: } G(s) = \frac{2.8284}{2} \frac{(0.5s+1)}{s(s+1)(0.5s+1)} = \frac{1.4142}{s(s+1)}$$

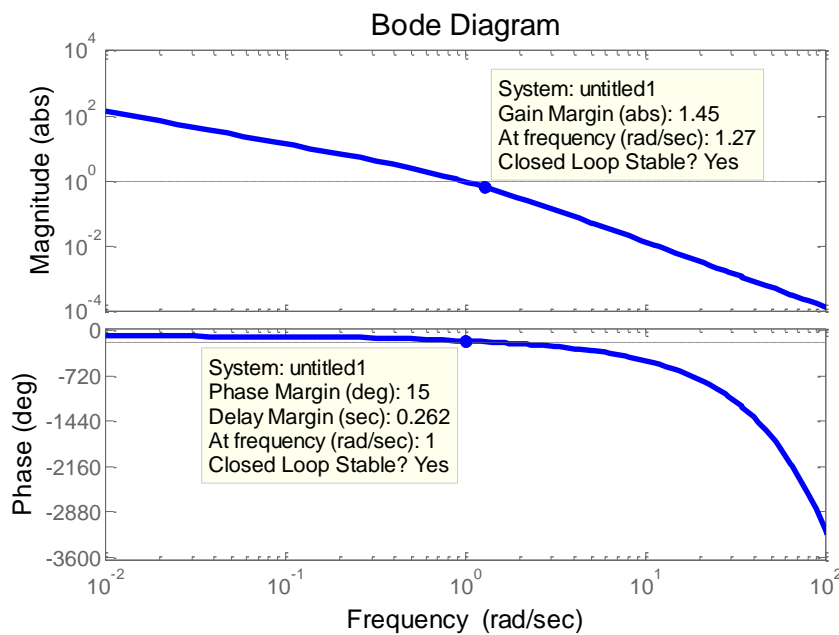


Σχήμα 7.1: Διάγραμμα Bode ανοικτού βρόχου για $k_I=2.8284$ και $k_P=1.4142$.

(β) Με την εισαγωγή της καθυστέρησης χρόνου το περιθώριο φάσης μειώνεται κατά $\theta\omega|_{\omega_c=1} = \text{PM} - \frac{\pi}{6} = 15^\circ$. Το διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G_d(s) = \frac{1.4142e^{-0.524s}}{s(s+1)}$$

δίνεται στο Σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2: Διάγραμμα Bode συστήματος ανοικτού βρόχου με αυξημένη καθυστέρηση χρόνου.

$$(\gamma) C_z(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right)(a + bs)$$

Η προήγηση φάσης του μηδενικού πρέπει να αντισταθμίζει την αντίστοιχη φάση από την καθυστέρηση χρόνου.

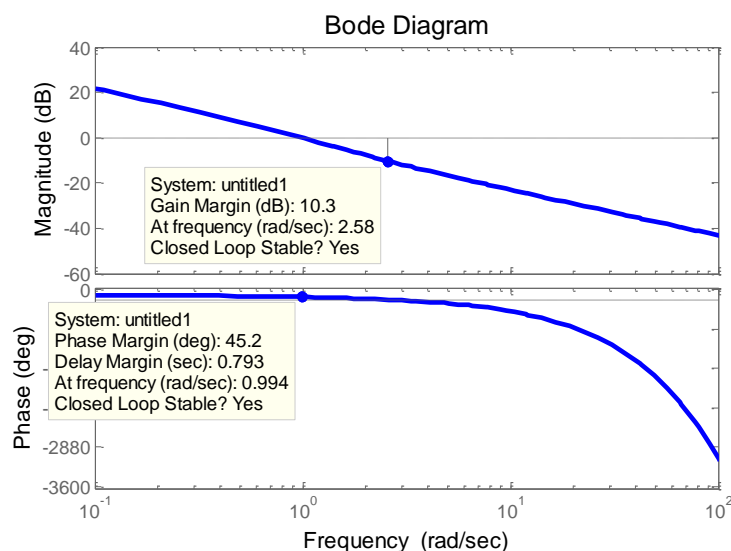
$$G(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} \frac{(a + bs)e^{-0.524s}}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_i a}{2} \frac{\left(\frac{k_p}{k_i} s + 1\right) \left(\frac{b}{a} s + 1\right) e^{-0.524s}}{s(s+1) \left(\frac{1}{2} s + 1\right)}$$

$$AR|_{\omega_c=1} = \frac{k_i a}{2\omega} \frac{\sqrt{\left(\frac{k_p}{k_i} \omega\right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{b}{a} \omega\right)^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{(0.5\omega)^2 + 1}} \Bigg|_{\omega_c=1} = 1 \tag{3}$$

$$\varphi|_{\omega_c=1} = -\pi + \text{PM} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\omega\right) + \tan^{-1}\left(\frac{k_p}{k_i}\omega\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\omega\right) \Bigg|_{\omega_c=1} \tag{4}$$

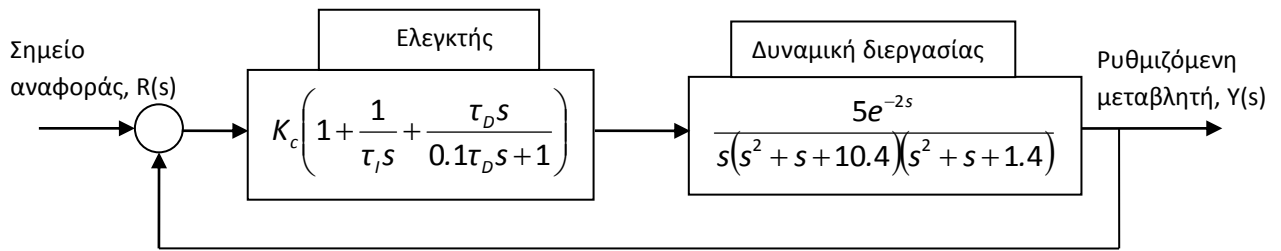
Ωστόσο πρέπει να ισχύει: $\frac{\pi}{6} = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\omega\right) \Bigg|_{\omega_c=1}$ που δίνει $b/a=0.57735$.

Από την (3) υπολογίζονται $a=0.86$ και $b=0.4965$. Η επίτευξη του επιθυμητού περιθωρίου φάσης επιβεβαιώνεται από το διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου στο Σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3: Διάγραμμα Bode συστήματος ανοικτού βρόχου με αυξημένη καθυστέρηση χρόνου και διαφορικό όρο.

Άσκηση 7.2: Ζητείται ο σχεδιασμός ενός ελεγκτή PID για τον έλεγχο της ακόλουθης διεργασίας:



- (α) Να υπολογιστούν το κρίσιμο κέρδος του ελεγκτή και η κρίσιμη περίοδος ταλάντωσης μέσω της διαδικασίας Ziegler-Nichols.
- (β) Να προσδιοριστούν οι τιμές K_c , τ_I και τ_D με βάση τις συσχετίσεις Ziegler-Nichols.
- (γ) Να προσομοιωθεί η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου σε βηματική μεταβολή του σημείου αναφοράς.

Λύση

(α) Διατηρώντας μόνο τον αναλογικό όρο, η γωνία φάσης στην κρίσιμη (απόλυτη κατά Ziegler-Nichols) συχνότητα θα πρέπει να εμφανίζει κέρδος ίσο με τη μονάδα. Επομένως από τη συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού βρόχου $\frac{5e^{-2s}}{s(s^2 + s + 10.4)(s^2 + s + 1.4)}$.

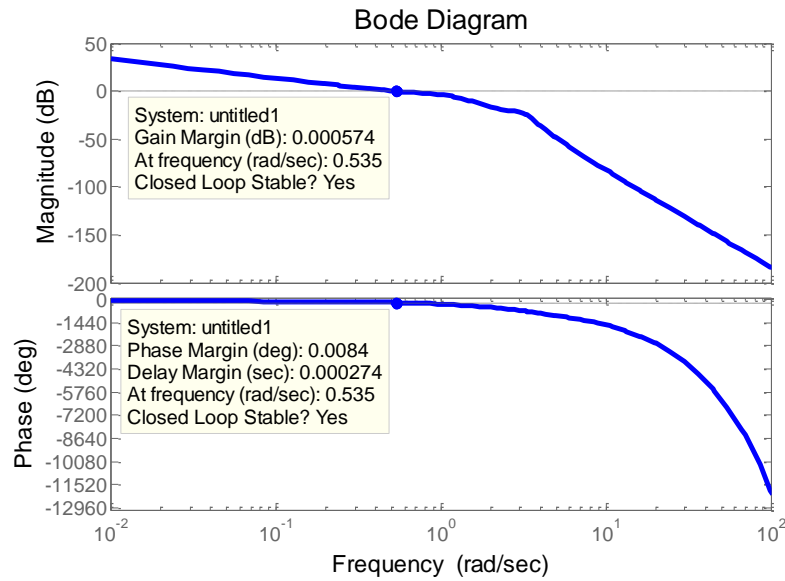
$$\angle \frac{1}{s^2 + s + 1.4} = -\tan^{-1} \left[\frac{2 \cdot 0.423 \frac{\omega}{1.18}}{1 - \left(\frac{\omega}{1.18} \right)^2} \right] \quad \angle \frac{1}{s^2 + s + 10.4} = -\tan^{-1} \left[\frac{2 \cdot 0.115 \frac{\omega}{3.22}}{1 - \left(\frac{\omega}{3.22} \right)^2} \right]$$

$$\varphi = -\pi = -\frac{\pi}{2} - 2\omega - \tan^{-1} \left[\frac{2 \cdot 0.423 \frac{\omega}{1.18}}{1 - \left(\frac{\omega}{1.18} \right)^2} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{2 \cdot 0.115 \frac{\omega}{3.22}}{1 - \left(\frac{\omega}{3.22} \right)^2} \right] \quad (1)$$

Από την (1) υπολογίζεται η απόλυτη συχνότητα $\omega_u=0.535$ rad/s και η απόλυτη περίοδος $T_u=2\pi/\omega_u=11.7443$

$$1 = \frac{5K_{cu}}{\omega} \frac{3.22}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{10.4}\right)^2 + \left(2 \cdot 0.115 \frac{\omega}{3.22}\right)^2}} \frac{1.18}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{1.4}\right)^2 + \left(2 \cdot 0.423 \frac{\omega}{1.18}\right)^2}} \quad (2)$$

Από τη (2) για $\omega=0.535$ υπολογίζεται το απόλυτο κέρδος $K_{cu}=1.339$. Οι τιμές αυτές επιβεβαιώνονται από το διάγραμμα Bode.



Σχήμα 7.4: Διάγραμμα Bode ανοικτού βρόχου για $k_I=2.8284$ και $k_P=1.4142$.

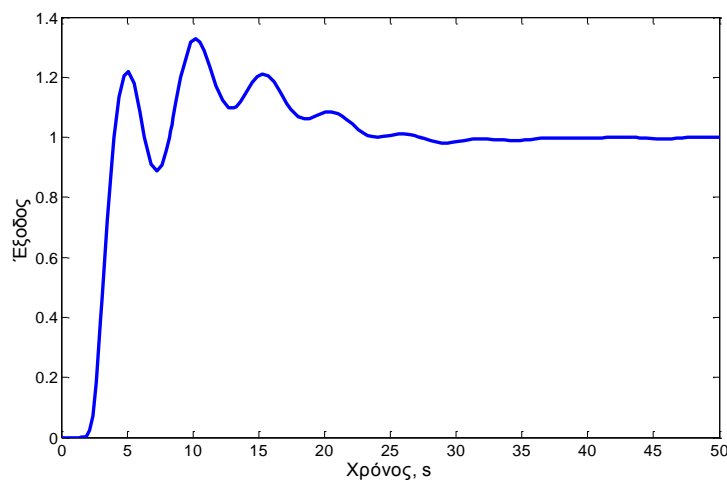
(β) Οι τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή PID με τις συσχετίσεις Ziegler-Nichols (ZN) είναι: $K'_c=K_{cu}/1.7=0.79$, $\tau'_I=T_u/2=5.87$, $\tau'_D=T_u/8=1.47$.

$$G_{PID}^*(s) = K'_c \left[1 + \frac{1}{\tau'_I s} \right] \left[\frac{\tau'_D s + 1}{\sigma \tau'_D s + 1} \right] \quad G_{PID}(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{\tau_D s}{\sigma \tau_D s + 1} \right]$$

$$K_c = K'_c \left(1 + \tau'_D / \tau'_I \right), \tau_I = \tau'_I + \tau'_D, \tau_D = \tau'_I \tau'_D / (\tau'_I + \tau'_D)$$

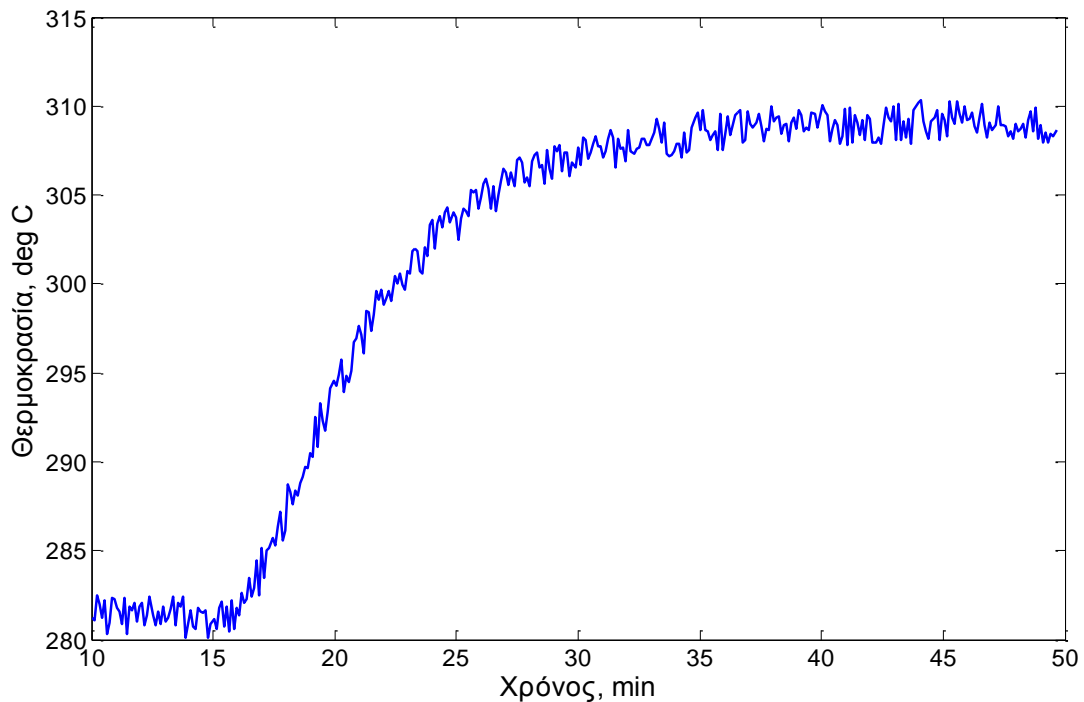
$K_c=0.99$, $\tau_I=7.34$, $\tau_D=1.18$.

(γ) Η απόκριση του ελεγκτή PID με παραμέτρους από τις σχέσεις ZN δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

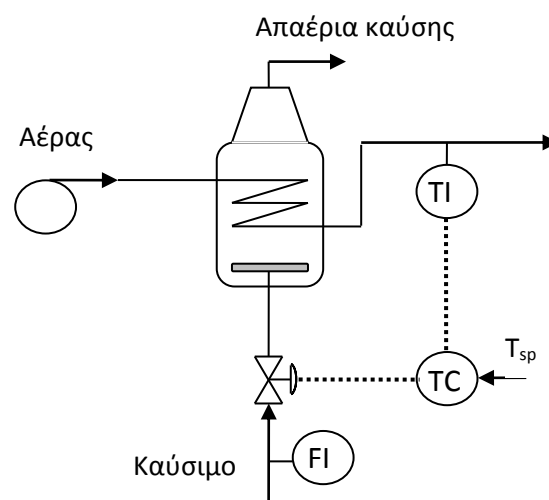


Σχήμα 7.5: Απόκριση συστήματος κλειστού βρόχου με ελεγκτή PID σε βηματική μεταβολή του σημείου αναφοράς.

Άσκηση 7.3: Θεωρείστε το φούρνο του Σχήματος 7.6 που χρησιμοποιείται για τη θέρμανση ρεύματος αέρα που τροφοδοτεί ένα καταλυτικό αντιδραστήρα. Ο αισθητήρας θερμοκρασίας (TI) έχει βαθμονομηθεί για εύρος θερμοκρασιών 250-350 °C. Τα ακόλουθα δεδομένα απόκρισης του φούρνου έχουν καταγραφεί για μια βηματική μεταβολή +12% στην έξοδο του ελεγκτή (παροχή καυσίμου). Η βηματική μεταβολή εκτελέστηκε τη χρονική στιγμή 10 min.



Σχήμα 7.6: Δυναμική απόκριση θερμοκρασίας αέρα.

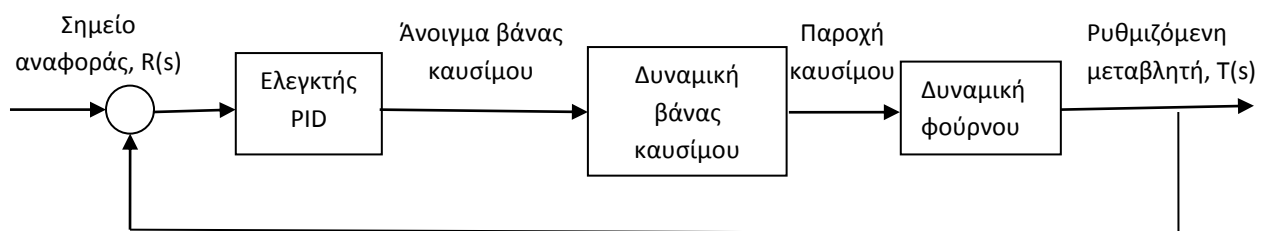


Σχήμα 7.7: Διάγραμμα διεργασίας θέρμανσης αέρα σε φούρνο.

- (α) Να σχεδιαστεί το πλήρες διάγραμμα βαθμίδων με τον προσδιορισμό των βαθμίδων και των σημάτων μεταξύ των βαθμίδων.
- (β) Να προσδιοριστεί ένα μοντέλο πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου βασισμένο στα δεδομένα της διεργασίας.
- (γ) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραμέτρων ενός PID ελεγκτή χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Cohen-Coon και Ciancone-Marlin.
- (δ) Να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου σε βηματική μεταβολή του σημείου αναφοράς για τις τιμές των παραμέτρων που υπολογίστηκαν στο ερώτημα (γ). Να υπολογιστεί ο δείκτης IAE για κάθε περίπτωση. Να σχολιαστεί η επίδοση των ελεγκτών.
- (ε) Η καθυστέρηση χρόνου στη διεργασία μεταβάλλεται κατά +25%. Να επαναληφθούν οι προσομοιώσεις του ερωτήματος (δ) χωρίς αλλαγή των παραμέτρων του ελεγκτή. Ποια τα συμπεράσματά σας;

Λύση

- (α) Το διάγραμμα βαθμίδων δίνεται στο Σχήμα 7.8.



Σχήμα 7.8: Διάγραμμα βαθμίδων διεργασίας.

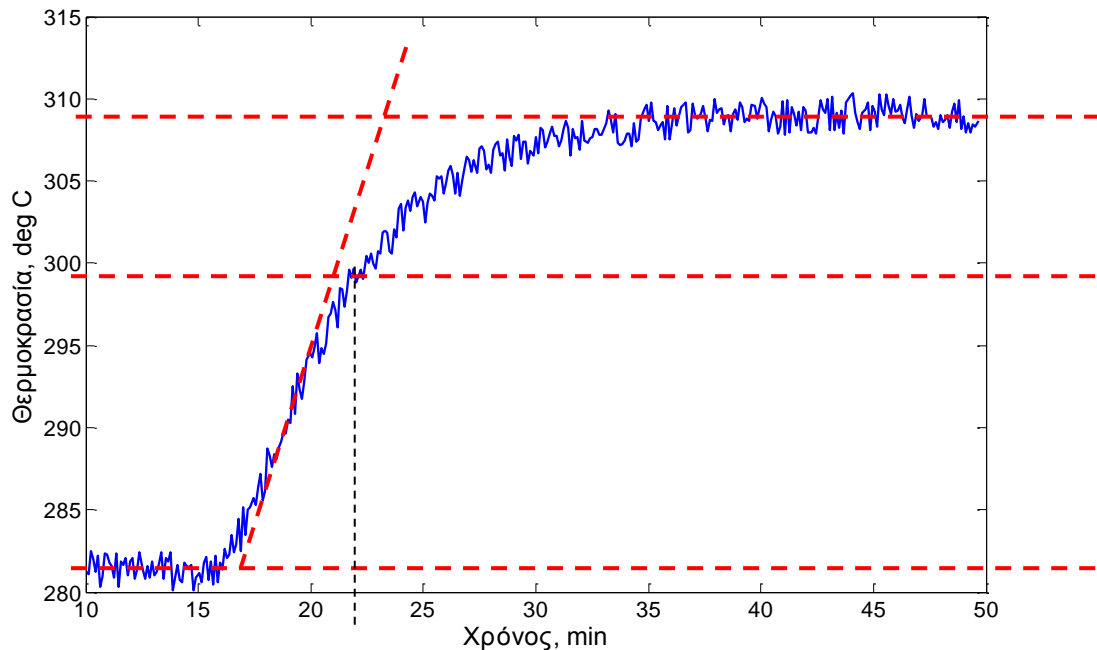
(β) Η απόκριση της θερμοκρασίας του αέρα (Σχήμα 7.6) ομοιάζει σε απόκριση ενός δυναμικού συστήματος 1^{ης} τάξης με καθυστέρηση χρόνου. Από το γράφημα της δυναμικής απόκρισης μπορούν να εκτιμηθούν γραφικά οι παράμετροι του δυναμικού πρότυπου.

Συγκεκριμένα, το κέρδος υπολογίζεται ως $K = \Delta \text{Εξόδου} / \Delta \text{Εισόδου} = (309 - 281.5) / 12 = 2.29 \text{ K}/\% \text{ άνοιγμα}$

Η καθυστέρηση χρόνου υπολογίζεται από την τομή του άξονα του χρόνου με την εφαιπτομένη στο σημείο καμπής της σιγμοειδούς καμπύλης απόκρισης ως $\theta = 7 \text{ min}$.

Η σταθερά χρόνου υπολογίζεται από το χρόνο που το σύστημα προσεγγίζει το 63.2% της τελικής τιμής. Η αύξηση της θερμοκρασίας κατά 63.2% είναι $(309 - 281.5) \cdot 0.632 = 17.38 \text{ }^\circ\text{C}$. Επομένως $281.5 + 17.38 = 298.88 \text{ }^\circ\text{C}$. Αυτή η θερμοκρασία επιτυγχάνεται τη χρονική στιγμή 22 min και αντιστοιχεί σε σταθερά χρόνου $22 - 17 = 5 \text{ min}$.

Επομένως το προσεγγιστικό μοντέλο έχει ως συνάρτηση μεταφοράς: $G(s) = \frac{2.29e^{-7s}}{(5s + 1)}$.



Σχήμα 7.8: Γραφική μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων συστήματος 1^{ης} τάξης με καθυστέρηση χρόνου.

(γ) Ο λόγος σταθεράς χρόνου προς καθυστέρηση χρόνου είναι: $\tau/\theta=5/7=0.713$ ή $\theta/\tau=1.4$. Οι συσχετίσεις Cohen-Coon (CC) δίνουν τις ακόλουθες τιμές,

$$K_c=1/K [\tau/\theta] [16\tau+3\theta]/12\tau=0.5251$$

$$\tau_i=\theta[32+6\theta/\tau]/[13+8\theta/\tau]=11.69$$

$$\tau_D=4\theta/[11+2\theta/\tau]=2.03$$

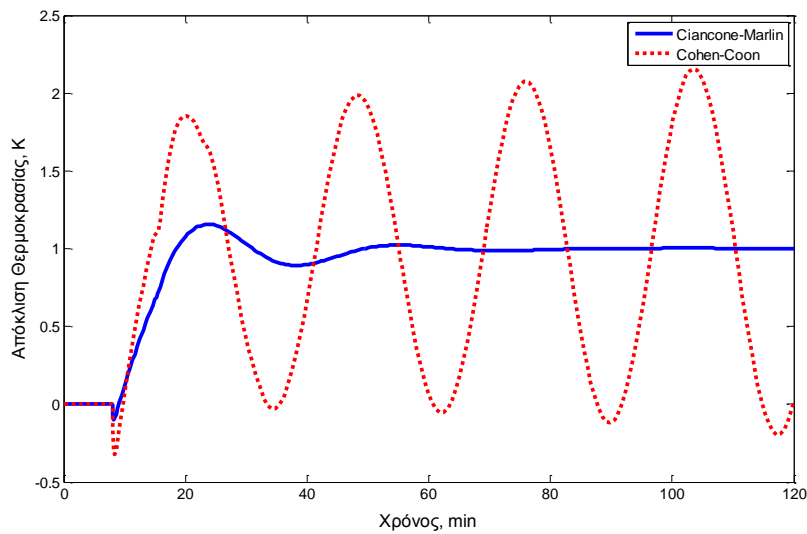
Για χρήση των συσχετίσεων Ciancone-Marlin (CM) υπολογίζεται η τετμημένη $\theta/(\tau+\theta)=0.58$. Από τους πίνακες στην 7^η Ενότητα υπολογίζονται οι τεταγμένες και κατά επέκταση οι τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή PID.

$$K_c K=0.6 \Leftrightarrow K_c=0.262$$

$$\tau_i/(\tau+\theta)=0.62 \Leftrightarrow \tau_i=7.44$$

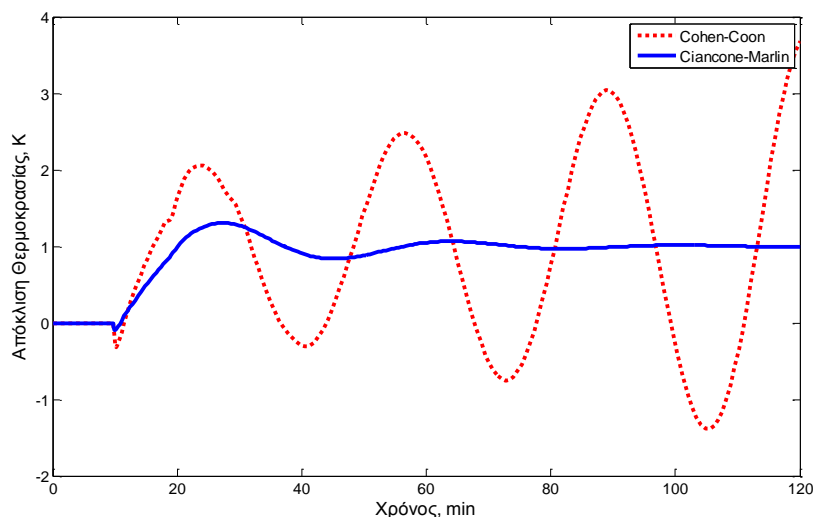
$$\tau_D/(\tau+\theta)=0.105 \Leftrightarrow \tau_D=1.26$$

Συγκρίνοντας τις αποκρίσεις του συστήματος κλειστού βρόχου (Σχήμα 7.9) παρατηρείται ότι ο ελεγκτής με παραμέτρους από τη μέθοδο Ciancone-Marlin εμφανίζει πολύ καλύτερη απόκριση με μικρό ποσοστό υπερύψωσης και ικανοποιητικούς χρόνους αποκατάστασης και ανόδου. Ο ελεγκτής με παραμέτρους υπολογισμένες από τη μέθοδο Cohen-Coon οδηγεί σε μη ευσταθή συμπεριφορά. Ενδεικτικά αναφέρονται και οι τιμές του δείκτη IAE για τις δυο περιπτώσεις που επιβεβαιώνει το συμπέρασμα (IAE-CC=82.96, IAE-CM=15.38). Προφανώς για την απόκτηση της ευστάθειας στην περίπτωση του ελεγκτή CC απαιτείται η μείωση του κέρδους του ελεγκτή.



Σχήμα 7.9: Χρονική απόκριση σε βηματική μεταβολή του σημείου αναφοράς.

(δ) Η καθυστέρηση χρόνου αυξάνεται σε 8.75 min διατηρώντας σταθερές τις παραμέτρους του ελεγκτή. Ο ελεγκτής με τις παραμέτρους από τη συσχέτιση CM παρουσιάζει μεγαλύτερη σθεναρότητα στη μεταβολή της καθυστέρησης χρόνου (Σχήμα 7.10). Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη καθώς η μέθοδος επιλογής παραμέτρων ελεγκτή PID CM λαμβάνει υπόψη πιθανό σφάλμα στις τιμές των παραμέτρων του δυναμικού πρότυπου.



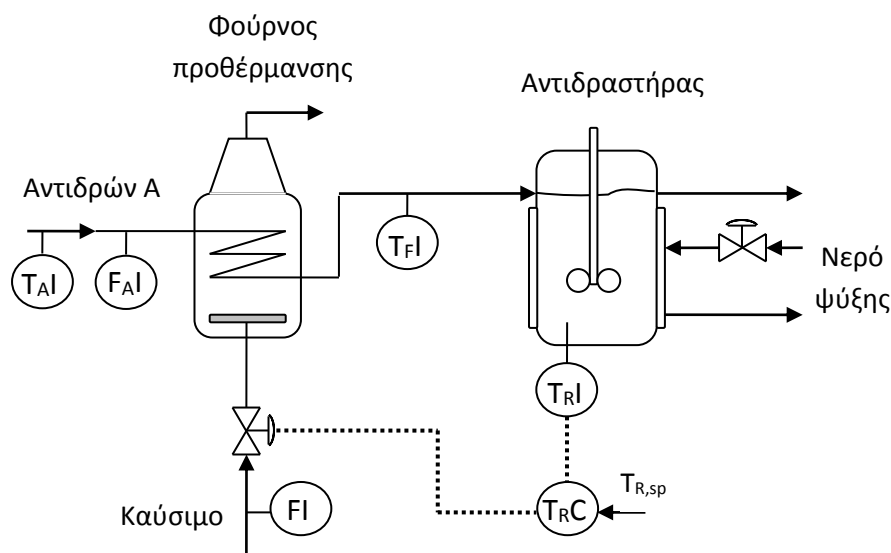
Σχήμα 7.10: Χρονική απόκριση σε βηματική μεταβολή του σημείου αναφοράς σε σύστημα με αυξημένη κατά 25% καθυστέρηση χρόνου.

Ενότητα 8η: Βελτίωση επίδοσης απλού βρόχου ανάδρασης

Άσκηση 8.1: Στο Σχήμα 8.1 δίνεται διάγραμμα διεργασιών που αποτελείται από ένα συνεχή αντιδραστήρα πλήρους ανάμιξης με μανδύα και ένα φούρνο προθέρμανσης. Το μίγμα του αντιδρώντος θερμαίνεται σε ένα φούρνο προθέρμανσης ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή θερμοκρασία στο ρεύμα εισόδου του αντιδραστήρα για την εκκίνηση της αντίδρασης. Στο μανδύα ρέει νερό ψύξης για να απάγει τη θερμότητα της αντίδρασης που συμβαίνει εντός του αντιδραστήρα. Η θερμοκρασία του αντιδραστήρα, T_R , πρέπει να διατηρηθεί σε συγκεκριμένο επίπεδο ώστε να επιτευχθεί ο επιθυμητός βαθμός μετατροπής. Έτσι έχει εγκατασταθεί ένας ελεγκτής για τη ρύθμιση της T_R με τη χειραγώγηση της παροχής του καυσίμου, F , στο φούρνο προθέρμανσης. Ωστόσο παρατηρείται συχνά η θερμοκρασία του αντιδραστήρα να μεταβάλλεται σημαντικά λόγω διαταραχών που σχετίζονται με το φούρνο προθέρμανσης (π.χ. μεταβολές στη θερμοκρασία και παροχή του ρεύματος εισόδου του A , T_A και F_A , στο φούρνο, διαταραχές στην καύση του μίγματος του καυσίμου, διαταραχή στην πίεση του ρεύματος παροχής καυσίμου). Στο σημειώνονται και οι διαθέσιμοι αισθητήρες θερμοκρασίας (TI) και ογκομετρικής παροχής (FI) στα διάφορα ρεύματα.

(α) Να προταθεί ένα σύστημα ελέγχου που να αντιμετωπίζει τις διαταραχές του φούρνου προθέρμανσης. Να αιτιολογηθεί η επιλογή.

(β) Να προταθεί επίσης ένα σύστημα ελέγχου που να αντιμετωπίζει τις διαταραχές στη θερμοκρασία εισόδου και στην καύση του φούρνου. Να αιτιολογηθεί η επιλογή.

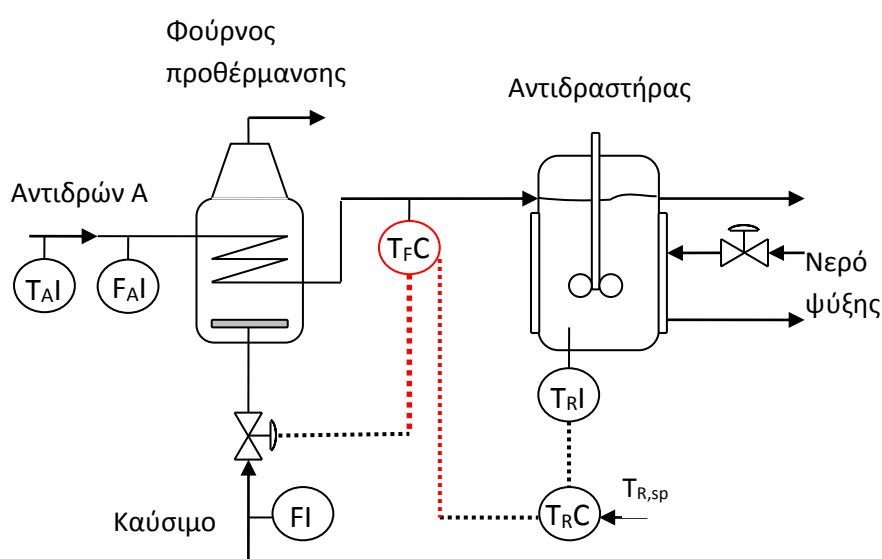


Σχήμα 8.1: Διάγραμμα ροής φούρνου – αντιδραστήρα με σύστημα ελέγχου ανάδρασης.

Λύση

(α) Προτείνεται έλεγχος διαδοχικών βρόχων αφού σύμφωνα με τις σχεδιαστικές κατευθύνσεις που παρουσιάστηκαν στην 8^η Ενότητα, υπάρχει μετρούμενη μεταβλητή που είναι ενδεικτική των διαταραχών στο φούρνο προθέρμανσης, T_{FI} , και συνάμα υπάρχει σχέση αιτίας-

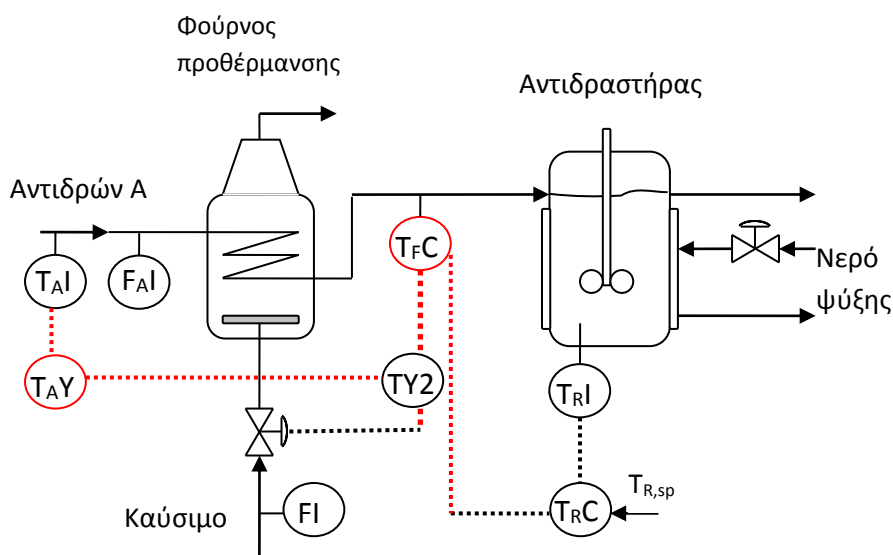
αποτελέσματος ανάμεσα στη ρυθμιζόμενη μεταβλητή του δευτερεύοντος βρόχου T_F και της χειραγωγούμενης μεταβλητής (βάνα παροχής καυσίμου). Επίσης ο δευτερεύον βρόχος είναι ταχύτερος του πρωτεύοντα βρόχου (στον πρωτεύοντα βρόχο περιλαμβάνεται και η δυναμική του αντιδραστήρα). Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις ικανοποιούνται τα κριτήρια για την εισαγωγή ελέγχου διαδοχικών βρόχων (Ενότητα 8^η). Το σύστημα ελέγχου διαδοχικών βρόχων παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.2. Το σήμα από τον αισθητήρα θερμοκρασίας του αντιδραστήρα, T_{R1} , συγκρίνεται με το σημείο αναφοράς, $T_{R,sp}$, στον πρωτεύοντα βρόχο ανάδρασης. Η έξοδος του πρωτεύοντα βρόχου αποτελεί το σημείο αναφοράς για τον ελεγκτή του δευτερεύοντα βρόχου ανάδρασης, T_{FC} , ο οποίος χρησιμοποιεί τη μέτρηση του αισθητήρα T_{F1} που είναι ενδεικτική της διαταραχής στο φούρνο.



Σχήμα 8.2: Διάγραμμα ροής φούρνου – αντιδραστήρα με σύστημα ελέγχου ανάδρασης διαδοχικών βρόχων.

(β) Για την αποτελεσματική αντιμετώπιση διαταραχών στη θερμοκρασία εισόδου του ρεύματος τροφοδοσίας προτείνεται έλεγχος πρόδρασης σε συνδυασμό με τον έλεγχο διαδοχικών βρόχων του ερωτήματος (α). Σύμφωνα με τις σχεδιαστικές κατευθύνσεις ελέγχου πρόδρασης που παρουσιάστηκαν στην 8^η Ενότητα, υπάρχει μέτρηση μιας ενδεικτικής διαταραχής, T_A , ΔΕΝ υπάρχει σχέση αιτίας-αποτελέσματος ανάμεσα στη διαταραχή, T_A , και τη χειραγωγούμενη μεταβλητή (παροχή καυσίμου στο φούρνο) και ο βρόχος ανάδρασης (T_F -βάνα καυσίμου) είναι ταχύτερη από την επίδραση της διαταραχής, T_A . Επομένως, ικανοποιούνται τα κριτήρια σχεδίασης ελεγκτή πρόδρασης-ανάδρασης (Ενότητα 8^η). Το σύστημα ελέγχου πρόδρασης – διαδοχικών βρόχων παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.3. Η μέτρηση της διαταραχής από τον αισθητήρα T_{A1} οδηγείται στον ελεγκτή πρόδρασης, T_{AY} , που υπολογίζει τη μεταβολή στη χειραγωγούμενη μεταβλητή (θέση βάνας καυσίμου) για την

αντιστάθμισή της. Το σήμα από τον ελεγκτή πρόδρασης κατόπιν προστίθεται στο σήμα από τον δευτερόντα βρόχο ανάδρασης στο στοιχείο ΤΥ που οδηγείται ως τελική εντολή στον ενεργοποιητή (βάνα ελέγχου καυσίμου).



Σχήμα 8.3: Διάγραμμα ροής φούρνου – αντιδραστήρα με σύστημα ελέγχου ανάδρασης διαδοχικών βρόχων και πρόδρασης.

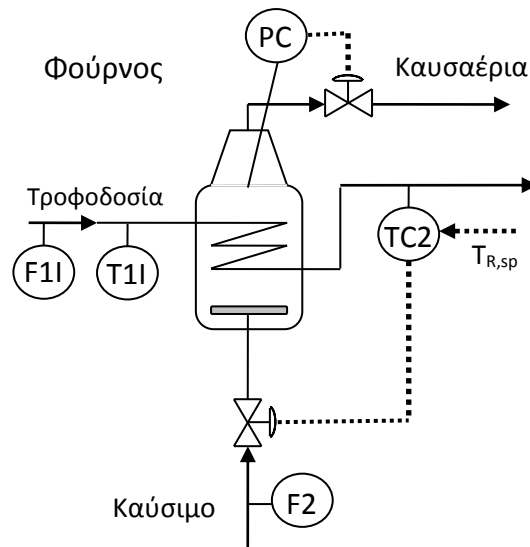
Άσκηση 8.2: Στο σύστημα φούρνου που φαίνεται στο Σχήμα 8.4, ένα ρεύμα διεργασίας θερμαίνεται καθώς διέρχεται μέσα από ένα καυστήρα που λειτουργεί με την καύση φυσικού αερίου. Το βασικό σύστημα ανάδρασης (έλεγχος θερμοκρασίας ρεύματος εξόδου με τη χειραγώγηση της παροχής του ρεύματος του καυσίμου) δεν έχει ικανοποιητική απόδοση. Να προταθούν συστήματα ελέγχου που να βελτιώνουν την απόδοση της ανάδρασης για τις ακόλουθες περιπτώσεις διαταραχών.

(α) Ρυθμιζόμενη μεταβλητή: Θερμοκρασία ρεύματος εξόδου T2. Διαταραχή: Πίεση ρεύματος καυσίμου.

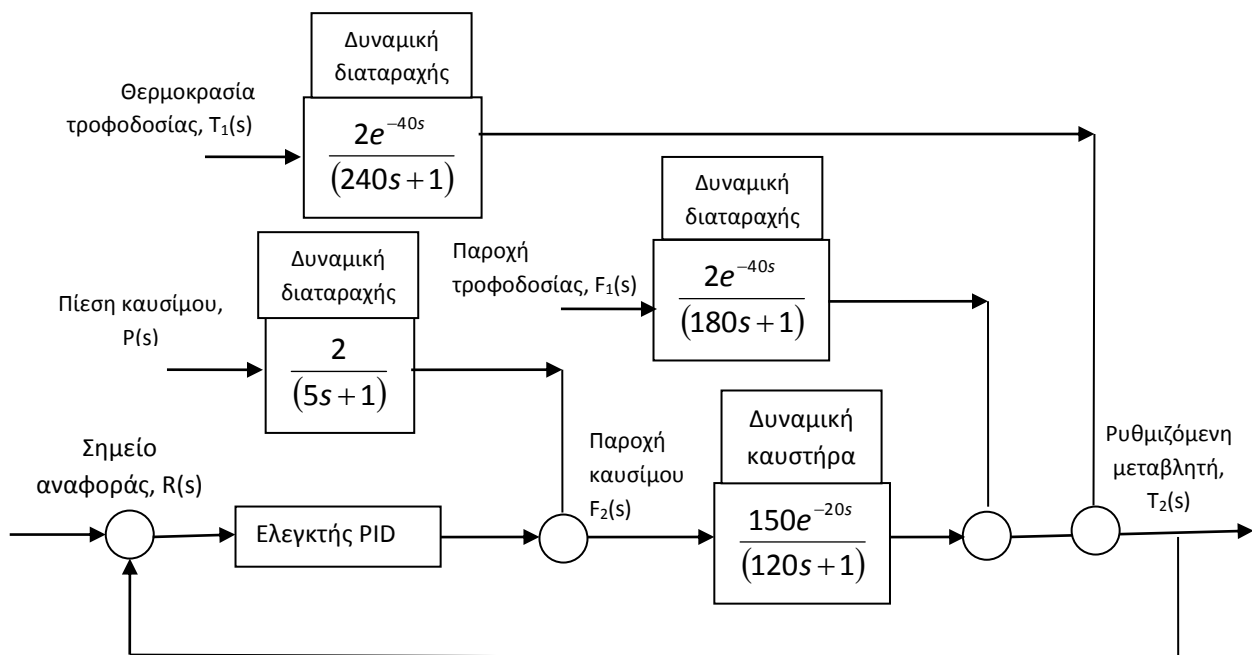
(β) Ρυθμιζόμενη μεταβλητή: Θερμοκρασία ρεύματος εξόδου T2. Διαταραχές: Θερμοκρασία ρεύματος τροφοδοσίας, T1 και πίεση ρεύματος καυσίμου.

(γ) Να γίνει προσομοίωση των ελεγκτών για βηματικές μεταβολές (χωριστά ή ταυτόχρονα) στις προαναφερόμενες διαταραχές λαμβάνοντας υπόψη τις συναρτήσεις μεταφοράς του Σχήματος 8.5.

Με κύκλο εικονίζονται οι μετρούμενες μεταβλητές του συστήματος (F1: μέτρηση παροχής ρεύματος τροφοδοσίας, F2: μέτρηση παροχής καυσίμου, T1: μέτρηση θερμοκρασίας ρεύματος τροφοδοσίας). Να σχεδιασθούν οι ελεγκτές στο σχήμα και να αξιολογηθούν τα κριτήρια σχεδιασμού των ελεγκτών όπου προτείνεται ελεγκτής πρόδρασης ή διαδοχικών βρόχων.



Σχήμα 8.4: Διάγραμμα φούρνου θέρμανσης.



Σχήμα 8.5: Διάγραμμα βαθμίδων συστήματος απλού βρόχου ανάδρασης.

Λύση

(α) Ρυθμιζόμενη μεταβλητή: Θερμοκρασία ρεύματος εξόδου T2. Διαταραχή: Πίεση ρεύματος καυσίμου. Προτείνεται η δομή διαδοχικών βρόχων ανάδρασης.

Κριτήρια σχεδίασης ελέγχου διαδοχικών βρόχων.

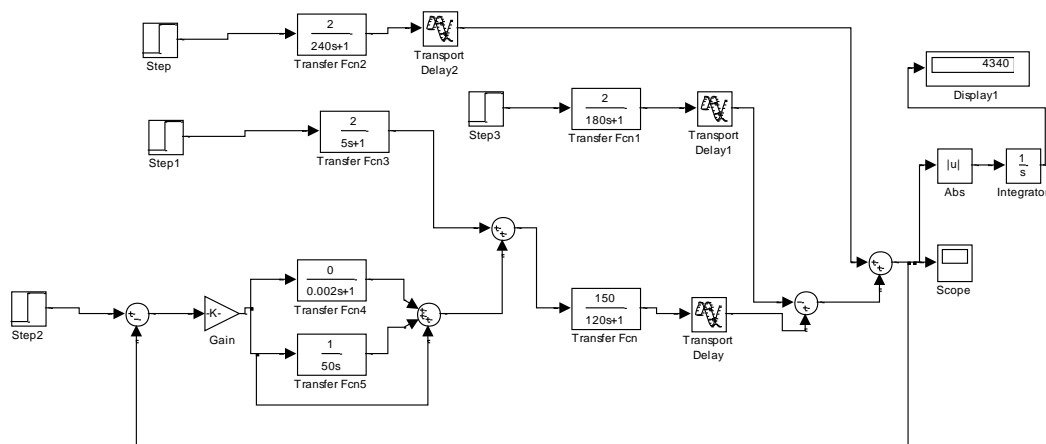
Για $K_c=0.04$ και $\tau_i=50$ η απόκριση του απλού βρόχου ανάδρασης δεν είναι αποδεκτή (IAE=4340).

Υπάρχει μέτρηση ενδεικτική της διαταραχής, F2, καθώς η μεταβολή της πίεσης στο ρεύμα του καυσίμου επηρεάζει την παροχή του καυσίμου.

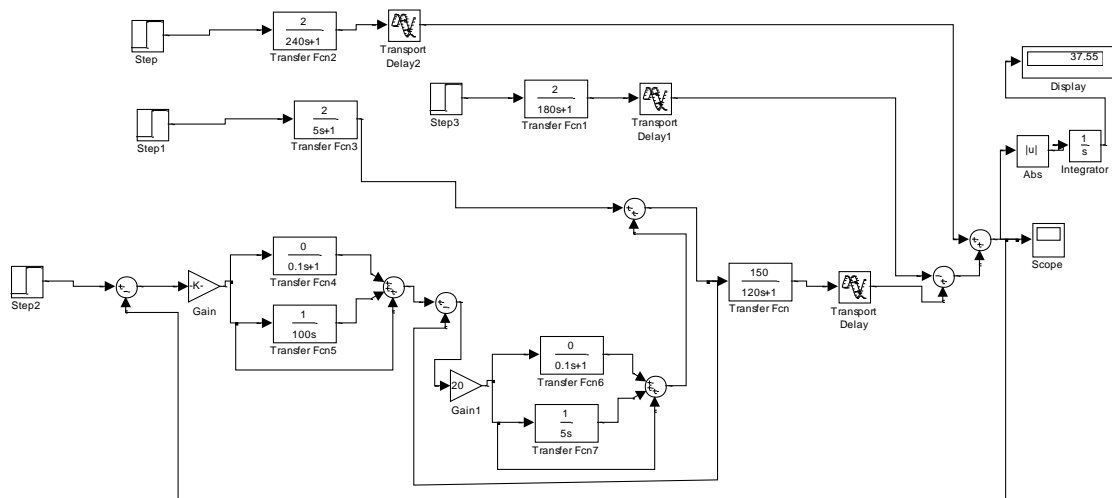
Υπάρχει σχέση αιτίας-αιτιατού ανάμεσα στη χειραγωγούμενη (θέση βάνας ελέγχου στο ρεύμα καυσίμου) και τη δευτερεύουσα ρυθμιζόμενη μεταβλητή, F2.

Ο δευτερέων βρόχος είναι πολύ ταχύτερος από τον πρωτεύοντα βρόχο (σταθερά χρόνου καυστήρα 120 s, σταθερά χρόνου διαταραχής 5 s).

Επομένως είναι δυνατή η σχεδίαση συστήματος διαδοχικών βρόχων. Στο Σχήμα 8.6 δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων του απλού βρόχου ανάδρασης στο περιβάλλον προσομοίωσης SIMULINK®. Στο Σχήμα 8.7 δίνεται το αντίστοιχο διάγραμμα με εφαρμογή της δομής των διαδοχικών βρόχων ανάδρασης.

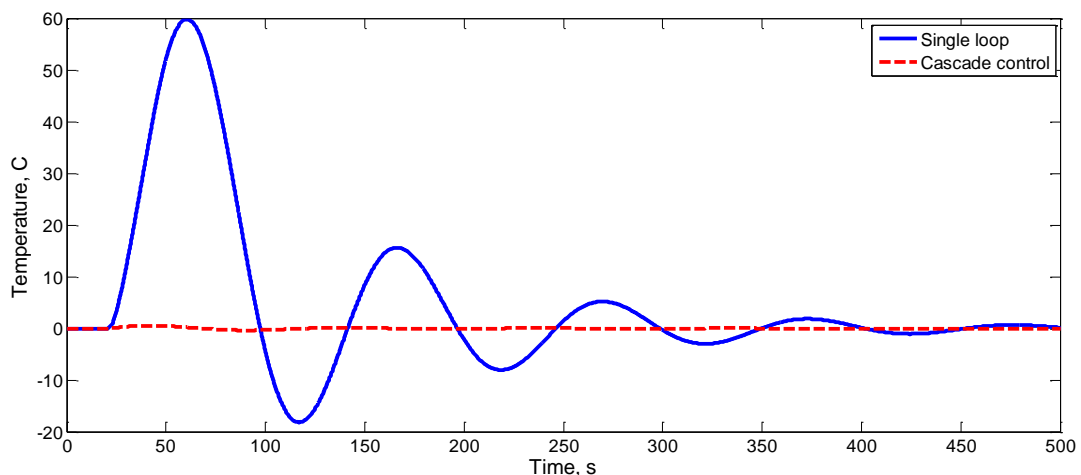


Σχήμα 8.6: Διάγραμμα βαθμίδων του απλού βρόχου ανάδρασης στο περιβάλλον προσομοίωσης SIMULINK®



Σχήμα 8.7: Διάγραμμα βαθμίδων διαδοχικών βρόχων ανάδρασης στο περιβάλλον προσομοίωσης SIMULINK®.

Η προσομοίωση του συστήματος διαδοχικών βρόχων για βηματική μεταβολή της διαταραχής πέτυχε τιμή για το δείκτη επίδοσης $IAE=36.27$. Οι τιμές των παραμέτρων των ελεγκτών PI που χρησιμοποιήθηκαν έχουν ως εξής: Πρωτεύων βρόχος $K_c=0.04$, $\tau_I=100$, δευτερεύων βρόχος $K_c=20$, $\tau_I=5$. Η χρονική απόκριση του συστήματος ελέγχου διαδοχικών βρόχων δίνεται στο Σχήμα 8.8. Είναι προφανής η βελτίωση της επίδοσης του συστήματος ελέγχου.



Σχήμα 8.8: Δυναμική απόκριση συστήματος ελέγχου για βηματική μεταβολή της διαταραχής F2.

(β) Ρυθμιζόμενη μεταβλητή: Θερμοκρασία ρεύματος εξόδου T2. Διαταραχές: Θερμοκρασία ρεύματος τροφοδοσίας, T1 και πίεση ρεύματος καυσίμου. Προτείνεται η ανάπτυξη ελέγχου πρόδρασης για την αντιστάθμιση της διαταραχής στη θερμοκρασία του ρεύματος τροφοδοσίας.

Κριτήρια σχεδίασης ελέγχου πρόδρασης.

Με απλό βρόχο η απόκριση δεν είναι αποδεκτή ($IAE=664.2$).

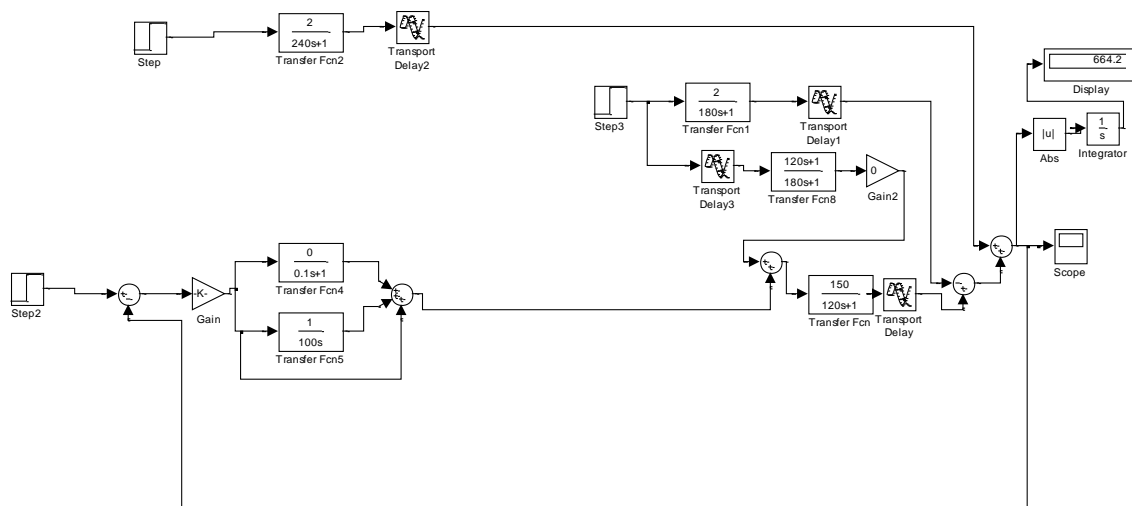
Υπάρχει μέτρηση ενδεικτική της διαταραχής, F1.

Δεν υπάρχει σχέση αιτίας-αιτιατού ανάμεσα στη χειραγωγούμενη και τη δευτερεύουσα ρυθμιζόμενη μεταβλητή.

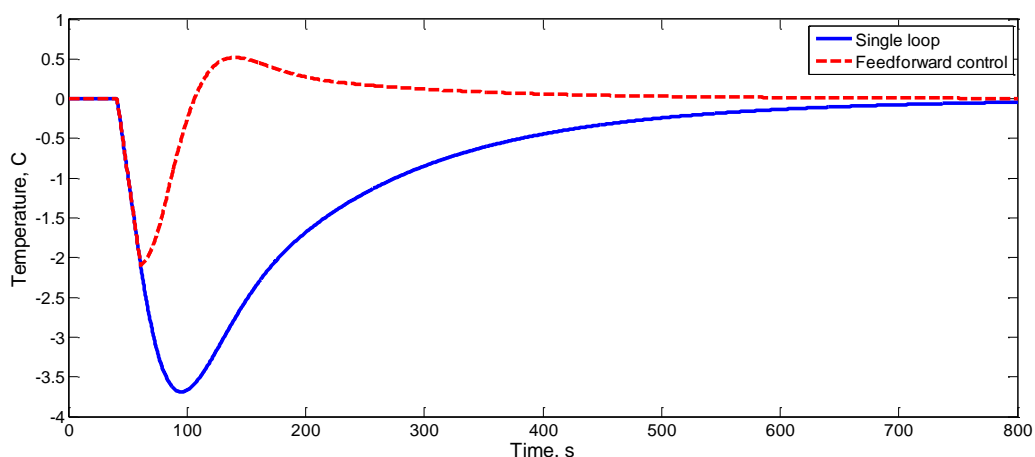
Η καθυστέρηση χρόνου της διαταραχής είναι μεγαλύτερη της καθυστέρησης χρόνου της διεργασίας.

Επομένως είναι δυνατή η σχεδίαση συστήματος ελέγχου πρόδρασης. Με βάση τις συναρτήσεις μεταφοράς υπολογίζεται η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή πρόδρασης.

$$G_{ff}(s) = -\frac{2(120s+1)}{150(180s+1)}e^{-20s}$$



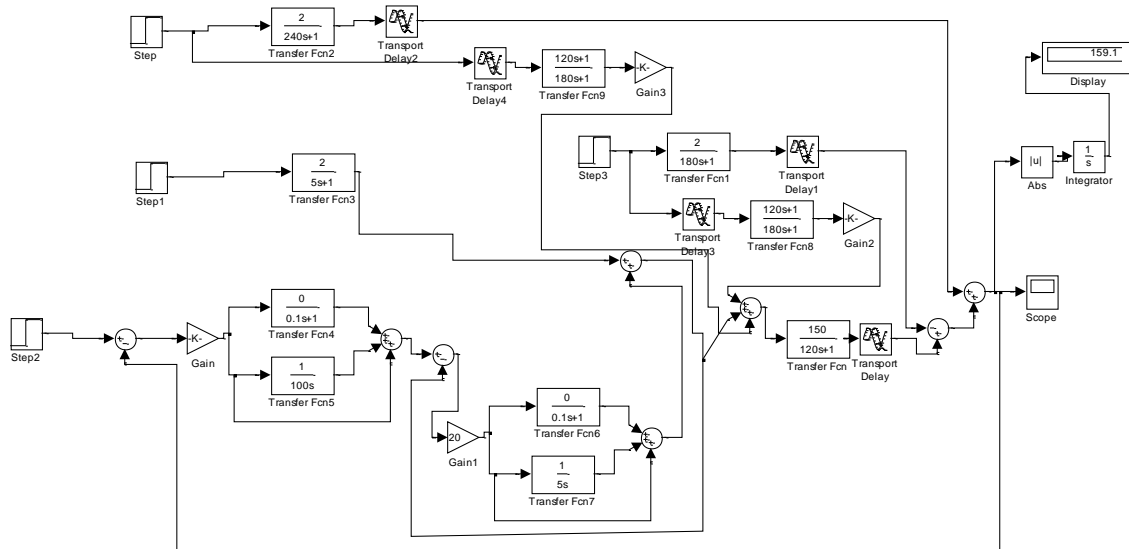
Σχήμα 8.8: Διάγραμμα βαθμίδων με έλεγχο πρόδρασης-ανάδρασης στο περιβάλλον προσομοίωσης SIMULINK®.



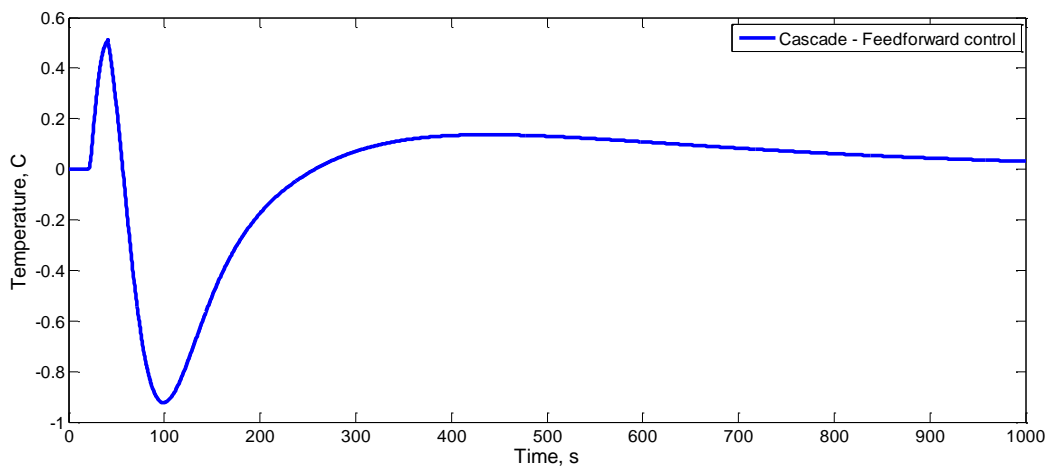
Σχήμα 8.9: Δυναμική απόκριση συστήματος ελέγχου για βηματική μεταβολή της διαταραχής T1.

Η προσομοίωση του συστήματος πρόδρασης-ανάδρασης για βηματική μεταβολή της διαταραχής πέτυχε τιμή για το δείκτη επίδοσης IAE=145.5 ενώ η αντίστοιχη τιμή του απλού βρόχου ήταν IAE=664.2. Η χρονική απόκριση του συστήματος ελέγχου διαδοχικών βρόχων δίνεται στο Σχήμα 8.9. Είναι προφανής η βελτίωση της επίδοσης του συστήματος ελέγχου.

(γ) Για ταυτόχρονες μεταβολές σε όλες τις διαταραχές συνίσταται ο συνδυασμός των ελεγκτών πρόδρασης με το δευτερεύοντα βρόχο (Σχήμα 8.10). Η βελτίωση της επίδοσης του συστήματος ελέγχου είναι εντυπωσιακή (Σχήμα 8.11).



Σχήμα 8.10: Διάγραμμα βαθμίδων με έλεγχο πρόδρασης, διαδοχικών βρόχων και ανάδρασης στο περιβάλλον προσομοίωσης SIMULINK®.



Σχήμα 8.11: Απόκριση σε ταυτόχρονη βηματική μεταβολή όλων των διαταραχών. IAE(σύνθετου ελέγχου):159.1, IAE (απλού βρόχου): 4304.

Ενότητα 9η: Σχεδίαση αντισταθμιστών με το γεωμετρικό τόπο ριζών

Άσκηση 9.1: Δίνεται το ακόλουθο μη-αντισταθμισμένο σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης με

$$\text{δυναμική: } G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}.$$

(α) Να σχεδιαστεί ένας αντισταθμιστής με τις ακόλουθες προδιαγραφές: Χρόνος αποκατάστασης 2.86 s, ποσοστό υπερύψωσης 4.32%, βελτίωση του σφάλματος σε μόνιμη κατάσταση ως προς το μη-αντισταθμισμένο κατά ένα παράγοντα 2.

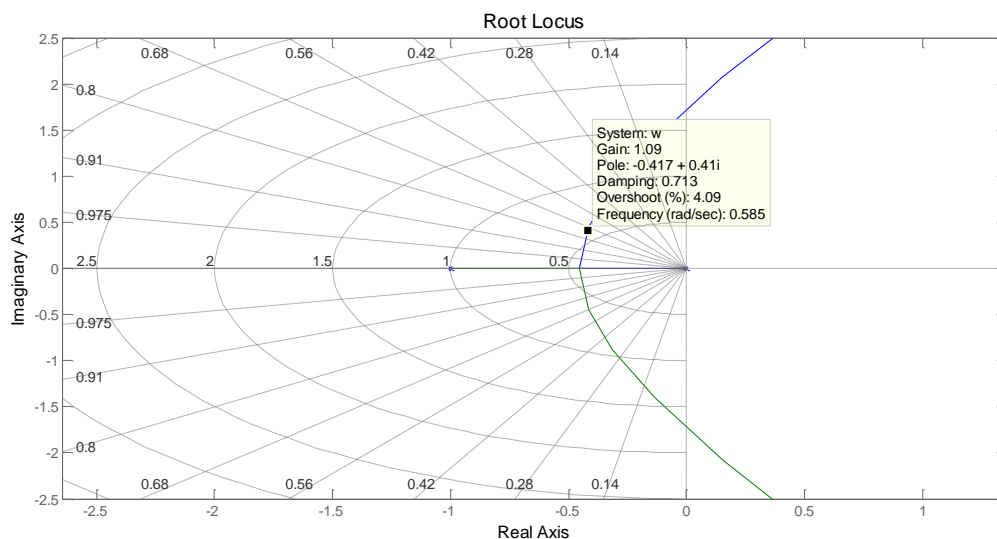
(β) Να γίνει σύγκριση της μεταβατικής και στατικής συμπεριφοράς του αντισταθμιζόμενου και του μη-αντισταθμιζόμενου συστήματος με χρήση του MATLAB®.

(γ) Να συζητηθεί η εγκυρότητα της προσέγγισης του συστήματος από σύστημα 2^{ης} τάξης.

Λύση

(α) Θεωρώντας ότι η απόκριση του κλειστού βρόχου μπορεί να προσεγγιστεί από ένα σύστημα 2^{ης} τάξης (κυρίαρχοι πόλοι), από τον επιθυμητό χρόνο αποκατάστασης λαμβάνουμε $\zeta\omega_n = 4/2.86 = 1.40$, ενώ από το επιθυμητό ποσοστό υπερύψωσης $\zeta = 0.7$ και $\omega_n = 2$ rad/s.

Επομένως, το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού βρόχου είναι $s^2 + 2.8s + 4$ με πόλους $-1.4 \pm 1.43i$. Οι επιθυμητοί πόλοι δεν ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο ριζών του μη-αντισταθμισμένου συστήματος (Σχήμα 9.1) (επιτυγχάνεται συντελεστής απόσβεσης $\zeta = 0.7$ για $K = 1.09$ με φυσική συχνότητα $\omega = 0.585$). Συνεπώς, είναι απαραίτητη η σχεδίαση αντισταθμιστή.



Σχήμα 9.1: Γεωμετρικός τόπος ριζών μη αντισταθμισμένου συστήματος.

Σχεδιάζεται ένα αντισταθμιστής προήγησης φάσης σύμφωνα με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην 9^η Ενότητα. Αρχικά, τοποθετείται ένα μηδενικό ακριβώς κάτω από τη θέση του επιθυμητού πόλου δηλαδή $z = -1.4$. Από τη σχέση των γωνιών φάσης προκύπτει ότι:

$+90-135_{(p1=0)}-106_{(p2=-1)}-41_{(p3=-3)}-\vartheta_{p4}=180$ και η γωνία του πόλου $p4$ βγαίνει αρνητική.

Εισάγεται και δεύτερο μηδενικό στο -1.4 οπότε προκύπτει ότι:

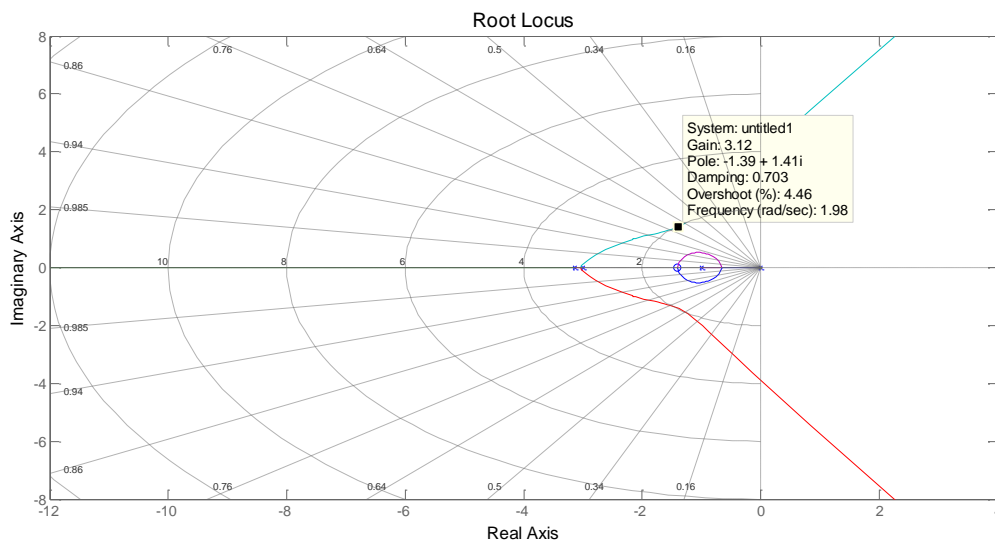
$+90+90-135_{(p1=0)}-106_{(p2=-1)}-41_{(p3=-3)}-\vartheta_{p4}-\vartheta_{p4}=180$. Υπολογίζεται $\vartheta_{p4}=39^\circ$ που αντιστοιχεί σε $p4=-3.13$.

Επομένως ο αντισταθμιστής έχει την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_c(s) = 2.236^2 \frac{(s+1.4)^2}{(s+3.13)^2}$$

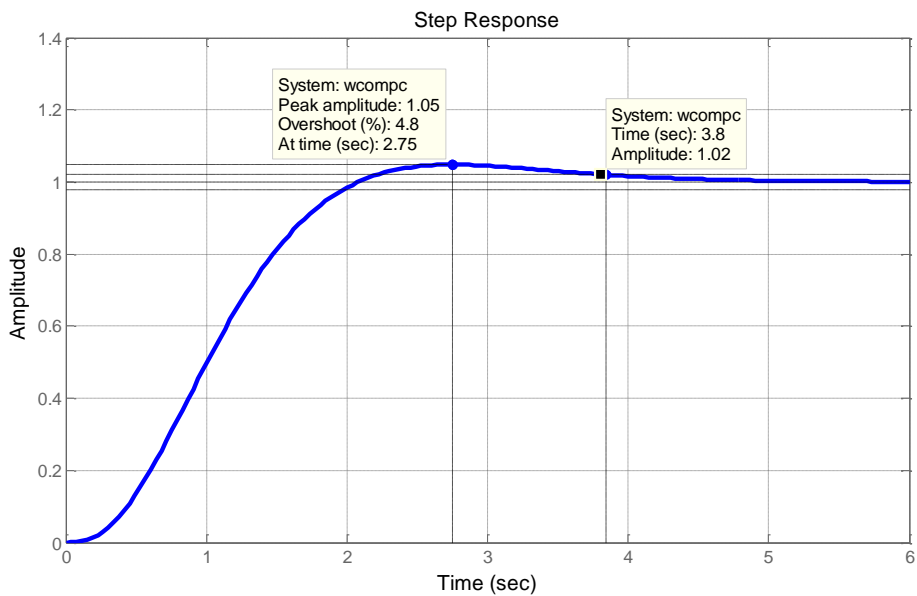
Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου του αντισταθμισμένου συστήματος έχει τη μορφή:

$$G(s) = 2.236^2 \frac{(s+1.4)^2}{(s+3.13)^2} \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$$

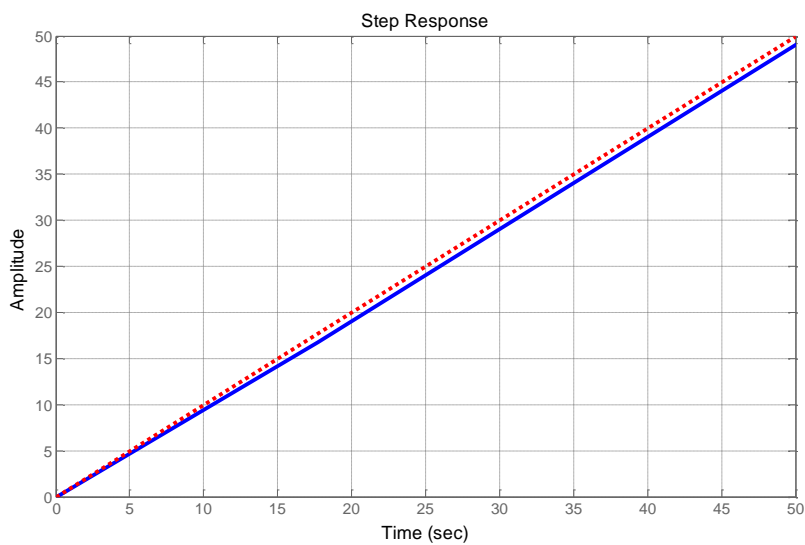


Σχήμα 9.2: Γεωμετρικός τόπος ριζών αντισταθμισμένου συστήματος.

Ο γεωμετρικός τόπος ριζών (Σχήμα 9.2) διέρχεται από τους επιθυμητούς πόλους για κέρδος=3.12. Η απόκριση του αντισταθμισμένου συστήματος κλειστού βρόχου που παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.3 αποδεικνύει ότι ικανοποιούνται οι προδιαγραφές. Η σταθερά σφάλματος ταχύτητας είναι $K_v=1.04$ που προκαλεί σταθερό σφάλμα 0.96 σε μεταβολή κλίσης. Η απόκριση σε μεταβολή κλίσης του σημείου αναφοράς δίνεται στο Σχήμα 9.4.



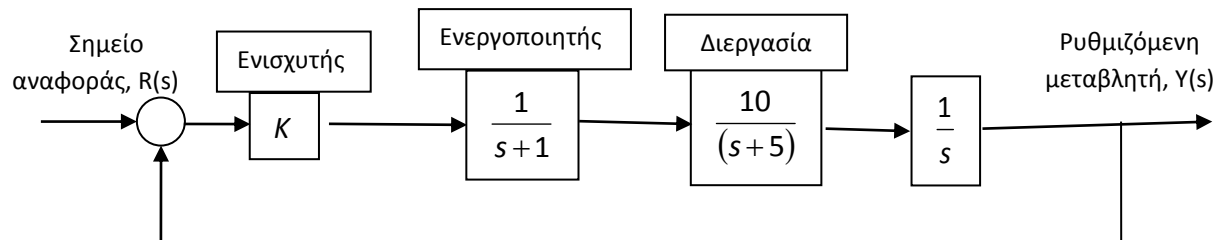
Σχήμα 9.3: Χρονική απόκριση σε βηματική μεταβολή του σημείου αναφοράς.



Σχήμα 9.4: Χρονική απόκριση σε μεταβολή κλίσης του σημείου αναφοράς.

Ενότητα 10η: Σχεδίαση αντισταθμιστών στο πεδίο της συχνότητας

Άσκηση 10.1: Για το δυναμικό σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης του Σχήματος 10.1 να σχεδιαστεί ένας αντισταθμιστής προήγησης φάσης που να προσδίδει περιθώριο φάσης 60° και σταθερά ταχύτητας σφάλματος $K_v=5$.



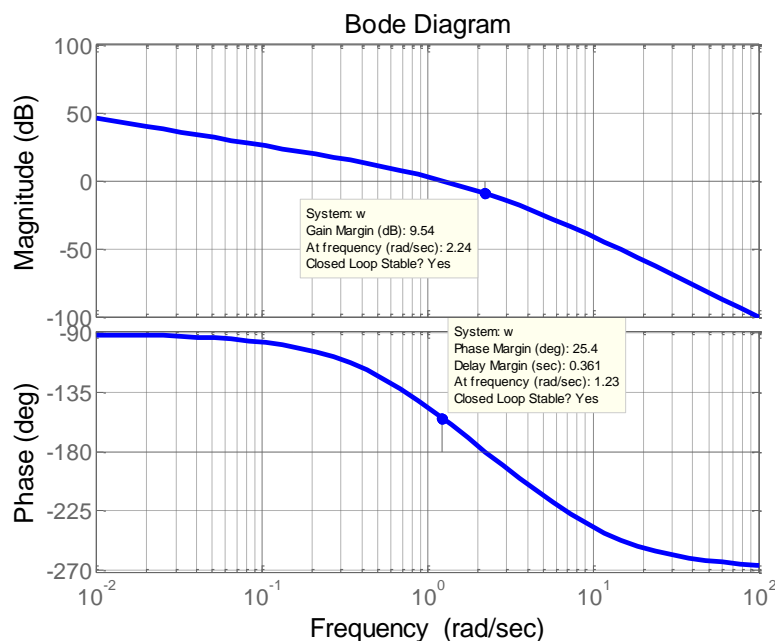
Σχήμα 10.1: Δυναμικό σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης.

Λύση

Για να επιτευχθεί σταθερά ταχύτητας σφάλματος $K_v=5$ πρέπει:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10K}{s(s+1)(s+5)} = 2K = 5 \Leftrightarrow K = 2.5$$

Το διάγραμμα Bode του μη-αντισταθμισμένου συστήματος δίνεται στο Σχήμα 10.2.



Σχήμα 10.2: Διάγραμμα Bode μη αντισταθμισμένου συστήματος.

Από το Σχήμα 10.2 εξάγεται ότι το περιθώριο φάσης είναι 25.4° ενώ το περιθώριο κέρδους είναι 9.54 dB που σημαίνει ότι είναι απαραίτητη η σχεδίαση αντισταθμιστή για την επίτευξη των στόχων. Η απαιτούμενη προήγηση φάσης είναι $60-25=35^\circ$. Οπότε, από τη σχέση

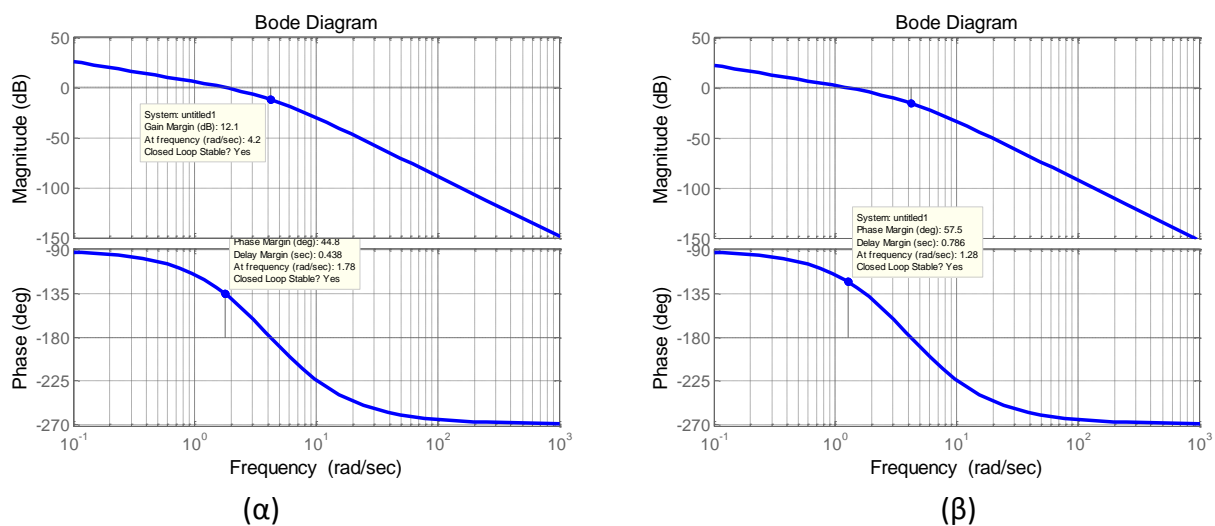
$$\sin\varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \text{ υπολογίζεται ο λόγος } \alpha = 3.7. \text{ Η ενίσχυση του σήματος λόγω του αντισταθμιστή}$$

προήγησης είναι $10\log\alpha = 5.68$ dB. Επιλέγεται λοιπόν ως νέα κρίσιμη συχνότητα η $\omega_m = 1.76$ rad/s, δηλαδή η συχνότητα στην οποία ο λόγος πλάτους είναι -5.68 dB. Από τη σχέση $p = \omega_m \sqrt{\alpha} = 3.39$ υπολογίζεται ο πόλος, p . Το μηδενικό τότε του αντισταθμιστή είναι $z = p/\alpha = 0.915$. Επομένως, ο αντισταθμιστής προήγησης έχει συνάρτηση μεταφοράς:

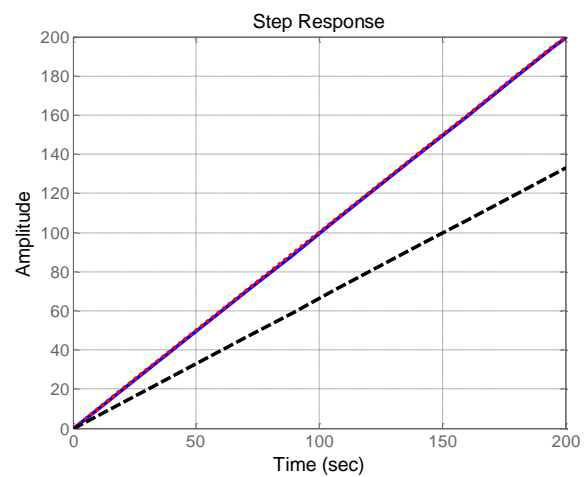
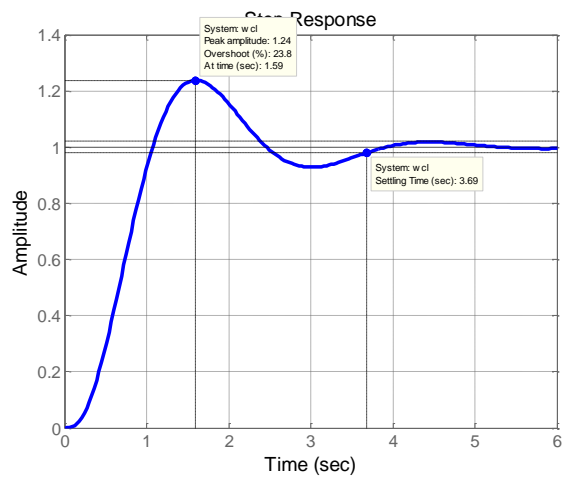
$$G_c = 3.7 \frac{s + 0.915}{s + 3.39}. \text{ Ο συντελεστής } 3.7 \text{ εισέρχεται για να επιτευχθεί κέρδος ελεγκτή μονάδα. Το}$$

διάγραμμα Bode του αντισταθμισμένου συστήματος δείχνει ότι το περιθώριο φάσης που επιτυγχάνεται είναι 44.8° μακριά από την απαιτούμενη προδιαγραφή. Για μικρότερο κέρδος ελεγκτή, $3.7/1.5$, επιτυγχάνεται το επιθυμητό περιθώριο φάσης αλλά με κάποιο κόστος στην προδιαγραφή της ταχύτητας σφάλματος (Σχήμα 10.3).

Στη συνέχεια γίνεται προσομοίωση σε βηματική μεταβολή και μεταβολή κλίσης του σημείου αναφοράς. Στο Σχήμα 10.4 εμφανίζονται οι χρονικές αποκρίσεις. Το παρατηρούμενο ποσοστό υπερύψωσης είναι 23.8% ενώ ο χρόνος αποκατάστασης 3.39 s. Η απόκριση κατά τη μεταβολή κλίσης εμφανίζει καλή παρακολούθηση του σημείου αναφοράς (σταθερή διαφορά ρυθμιζόμενης μεταβλητής από σημείο αναφοράς).



Σχήμα 10.3: Διάγραμμα Bode αντισταθμισμένου συστήματος με σταθερό συντελεστή 3.7 (α) και 3.7/1.5 (β).



Σχήμα 10.4: Χρονική απόκριση αντισταθμισμένου συστήματος σε βηματική μεταβολή και μεταβολή κλίσης του σημείου αναφοράς.

Ενότητα 11η: Σχεδίαση αντισταθμιστών στο πεδίο μεταβλητών κατάστασης

Άσκηση 11.1: Η δυναμική συμπεριφορά της κατακόρυφης γωνίας μετατόπισης, x_1 , ενός πλοίου κατά την εφαρμογή ροπής από πλευρικά σταθεροποιητικά πτερύγια, u , καθώς και σε κυματισμό, w , δίνεται από το ακόλουθο σύστημα μεταβλητών κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} w \text{ με } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(α) Θεωρώντας ότι όλες οι μεταβλητές κατάστασης, δηλαδή η γωνία κατακόρυφης μετατόπισης, x_1 , και η ταχύτητα της γωνίας, x_2 , είναι μετρήσιμες να υπολογιστεί αναλυτικά ένας ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων που να εξασφαλίζει απόκριση κλειστού βρόχου με μέγιστο ποσοστό υπερέψωσης μικρότερο από 30% και χρόνο αποκατάστασης μικρότερο από 3s.

(β) Να επαληθευτούν οι τιμές του ελεγκτή χρησιμοποιώντας το MATLAB®.

(γ) Είναι δυνατή η επίτευξη οποιασδήποτε δυναμικής απόκρισης για το σύστημα ελέγχου ανάδρασης καταστάσεων; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ) Ποιο είναι το σφάλμα της μόνιμης κατάστασης για τη μεταβλητή εξόδου, y , για βηματική μεταβολή του κυματισμού, w ; Να γίνει η προσομοίωση στο MATLAB®.

(ε) Να προστεθεί ολοκληρωτική δράση στον ελεγκτή ανάδρασης καταστάσεων ώστε για βηματική μεταβολή στον κυματισμό το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση για τη μεταβλητή εξόδου, y , να είναι μηδενική. Να υπολογιστεί ξανά ο πίνακας ανάδρασης καταστάσεων και να γίνει προσομοίωση στο MATLAB® για βηματική μεταβολή του κυματισμού. Επιτυγχάνεται μηδενικό σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση;

Λύση

(α) Για ποσοστό υπερέψωσης μικρότερο από 30% επιλέγεται $\zeta > 0.35$. Για χρόνο αποκατάστασης $T_s = 4/\zeta\omega_n < 3 \text{ s} \Leftrightarrow$ για $\zeta=0.35$ συνεπάγεται $\omega_n=3.81 \text{ rad/s}$.

Το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου λαμβάνει τη μορφή:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2.667s + 14.51$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με ελεγκτή ανάδρασης καταστάσεων έχει τη μορφή:

$$\det \left\{ s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 9 & s+1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9k_1 & 9k_2 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 9+9k_1 & s+1.2+9k_2 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$s^2 + (1.2+9k_2)s + 9+9k_1 = 0$$

$$(1.2+9k_2) = 2.667 \Leftrightarrow k_2 = 0.163$$

$$9+9k_1 = 14.51 \Leftrightarrow k_1 = 0.612$$

(β) Ο υπολογισμός του ελεγκτή ανάδρασης καταστάσεων έχει στο MATLAB ως εξής:

```
a=[0 1;-9 -1.2];
```

```
b=[0 9]';
```

```
damp([1 2.667 14.51])
```

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
1.33e+000 + 3.57e+000i	3.50e-001	3.81e+000
-1.33e+000 - 3.57e+000i	3.50e-001	3.81e+000

```
k=place(a,b,[-1.33+3.57i -1.33-3.57i])
```

```
k = 0.6126 0.1622
```

```
a-b*k
```

```
ans =
```

```
0 1.0000
-14.5138 -2.6600
```

(γ) Το σύστημα κλειστού βρόχου είναι $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14.5138 & -2.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} w$ με

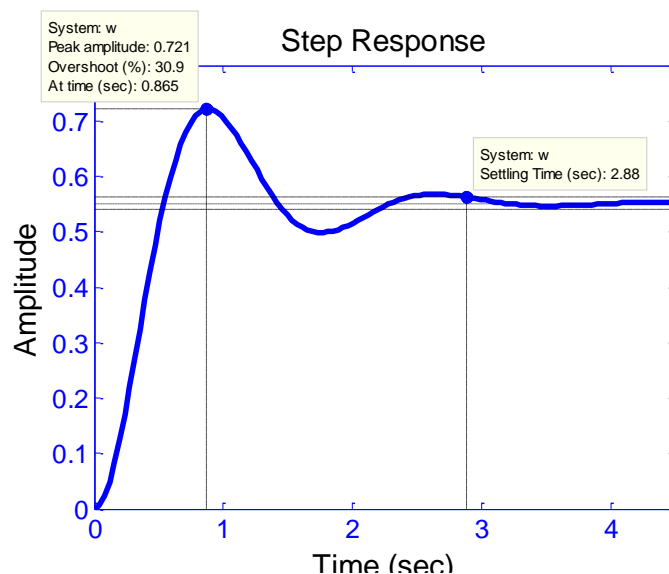
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14.5138 & -2.66 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{8}{s^2 + 2.667s + 14.51}$$

Το σφάλμα σε βηματική μεταβολή της $w(t)$ υπολογίζεται από το θεώρημα τελικής τιμής:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{8}{s^2 + 2.667s + 14.51} \right) \frac{1}{s} = 0.5513 \text{ μη μηδενικό σφάλμα.}$$



Σχήμα 11.1: Χρονική απόκριση σε βηματική μεταβολή της διαταραχής.

$$(\delta) \text{ Εισάγεται ολοκληρωτική δράση } x_I = \int (x_1 - x_{1sp}) \quad \dot{x}_I = (x_1 - x_{1sp})$$

Το σύστημα μεταβλητών κατάστασης μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -1.2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

```
a=[0 1 0;-9 -1.2 0;1 0 0];
```

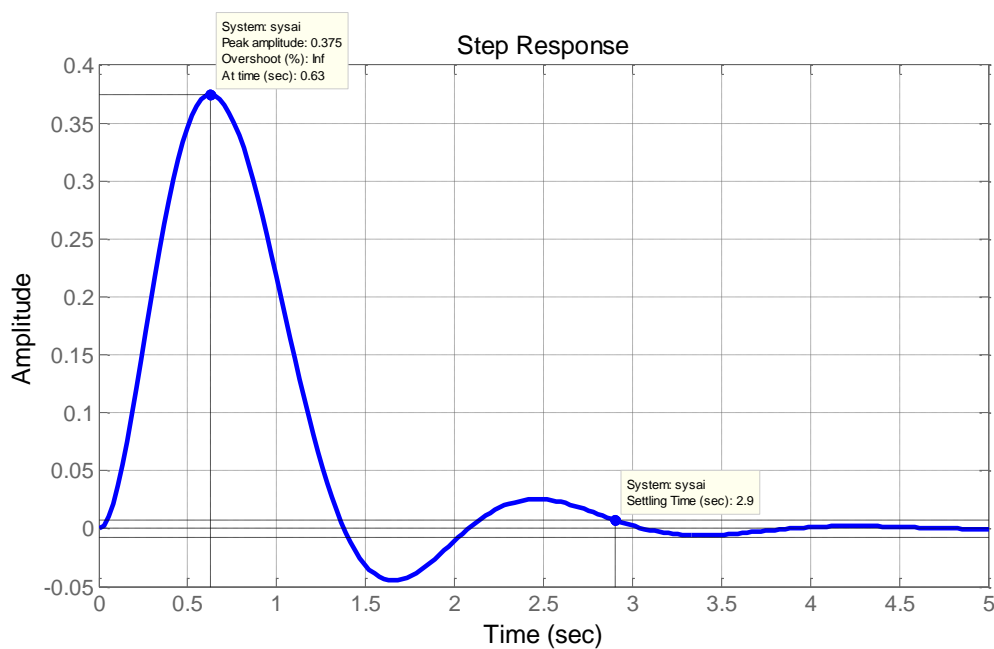
```
b=[0 9 0]';
```

```
k=place(a,b,[-1.33+3.57i -1.33-3.57i -2])
```

```
k = 1.2038 0.3844 3.2253
```

```
sysai=ss(a-b*k,[0 8 0]',[1 0 0],0)
```

```
step(sysai)
```



Σχήμα 11.2: Χρονική απόκριση συστήματος με ολοκληρωτική δράση σε βηματική μεταβολή της διαταραχής.

Από το Σχήμα 11.2 προκύπτει ότι το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση σε βηματική μεταβολή της διαταραχής είναι μηδέν.