Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 7: Σειρές Taylor, Maclaurin

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ασύμπτωτη Συνάρτησης

Μια συνάρτηση μπορεί, καθώς τείνει στο άπειρο, να προσεγγίζει ασυμπτωτικά μια ευθεία *y = ax+b*.

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\left[ax+b\right]\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-\left[x+\frac{b}{x}\right]\right)=\frac{0}{x}$$

Ασύμπτωτη Συνάρτησης

Μια συνάρτηση μπορεί, καθώς τείνει στο άπειρο, να προσεγγίζει ασυμπτωτικά μια ευθεία *y = ax+b*.

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-[ax+b]\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-\left[x+\frac{b}{x}\right]\right)=\frac{0}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]-a-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$$

Ασύμπτωτη Συνάρτησης

Οπότε προκύπτει:

$$\Rightarrow a = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - ax\right] = 0$$

Ακρότατα

Θυμίζουμε ότι βρίσκουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης από τις ρίζες τις εξίσωσης που προκύπτει αν θέσουμε την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν:

$$f'(x) = 0$$

Βρίσκουμε, επίσης, το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο κάθε ακρότατο:

$$f''(x_0) < 0 \rightarrow \text{Μ}\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o \qquad f''(x_0) > 0 \rightarrow \text{Ε}\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o$$

Ακρότατα

Τα **απόλυτα** μέγιστα ή ελάχιστα μιας συνάρτησης εντοπίζονται με σύγκριση των ακροτάτων που έχουμε βρει.

Ακρότατα

Τα **απόλυτα** μέγιστα ή ελάχιστα μιας συνάρτησης εντοπίζονται με σύγκριση των ακροτάτων που έχουμε βρει.

Αν μας ζητηθούν τα ακρότατα συνάρτησης εντός ενός **συγκεκριμένου** πεδίου ορισμού, πρέπει να εξετάσουμε και τις τιμές των **άκρων** του πεδίου ορισμού.

Κανόνας de l’ Hospital

Απροσδιόριστες μορφές:

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},-\infty+\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},0^{\infty},0^{0},\infty^{0}$$

Κανόνας de l’ Hospital: Εφαρμογή

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \to 1} \left[x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} \right]$

Κανόνας de l' Hospital: Εφαρμογή

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}\right]$

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\left[x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}\right]=\lim_{x\to 1} e^{\ln x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}}=\lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}\ln x}\\
&\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}\ln x}=e$$

Σειρές Taylor, Maclaurin

Ανάπτυξη συνάρτησης σε σειρά γύρω από ένα σημείο x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

Αν το σημείο x_0 είναι το μηδέν, η σειρά λέγεται *Maclaurin.*

Αλλιώς, λέγεται σειρά *Taylor.*

Σειρές Taylor, Maclaurin

Ανάπτυξη συνάρτησης σε σειρά γύρω από ένα σημείο x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

<u>Συντελεστές *α*</u>: Με παραγώγιση της *f(x)*, προκύπτουν οι αντίστοιχοι συντελεστές:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f'(x_0) \\ a_2 &= \frac{1}{2} f''(x_0) \end{aligned}\right\} \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Σειρές Taylor, Maclaurin

Με χρήση των σειρών (πολυωνύμων) Taylor ή Maclaurin, μπορούμε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση γύρω από ένα σημείο.

Όσους περισσότερους όρους της σειράς χρησιμοποιούμε, τόσο πιο ακριβής είναι η προσέγγιση μας. Ταυτόχρονα όμως, οι περισσότεροι όροι που προκύπτουν την κάνουν πιθανώς πιο δύσχρηστη.

Σφάλμα Σειράς Taylor

Η ακρίβεια της προσέγγισης μέσω σειράς Taylor (ή Maclaurin) είναι ίση με τον μεγαλύτερο όρο που απορρίπτουμε.

Σφάλμα Σειράς Taylor

Η ακρίβεια της προσέγγισης μέσω σειράς Taylor (ή Maclaurin) είναι ίση με τον μεγαλύτερο όρο που απορρίπτουμε.

Για παράδειγμα, αν κρατήσουμε όρους μέχρι και 2ης τάξης στο πολυώνυμο, το σφάλμα της προσέγγισης θα είναι:

$$R_3 = \left| \frac{f'''(x_0)}{3!} \left(\xi - x_0\right)^3 \right|$$

Σφάλμα Σειράς Taylor

Γενικά, το σφάλμα θα είναι:

$$R_n = \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \left(\xi - x_0 \right)^n \right|$$

Αν αναζητούμε την ακρίβεια της προσέγγισης για να έχουμε κάποιο συγκεκριμένο μέγιστο σφάλμα, τότε λύνουμε την παραπάνω σχέση για το επιθυμητό σφάλμα, ως προς n.

Σειρές Taylor: Εφαρμογή

Να προσεγγιστεί η παρακάτω συνάρτηση με σειρά Taylor, γύρω από το σημείο *x = 8*:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Να υπολογίσετε την ακρίβεια της προσέγγισης, αν το x είναι μεταξύ των τιμών 7.8 και 8.

Σειρές Taylor: Εφαρμογή

Να προσεγγιστεί η παρακάτω συνάρτηση με σειρά Taylor, γύρω από το σημείο *x = 8*:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Να υπολογίσετε την ακρίβεια της προσέγγισης, αν το x είναι μεταξύ των τιμών 7.8 και 8.

Η σειρά Taylor θα είναι: $f(x) = \frac{1}{12}(x-8) + \frac{1}{288}(x-8)^2$

Με σφάλμα: $R_3 = \left| \frac{f'''(8)}{3!}(0.2)^3 \right|$

Σειρές Taylor: Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω, με χρήση σειρών Taylor:

$$\sqrt[3]{1.1} \qquad\qquad \cos(31)$$

Σειρές Taylor: Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω, με χρήση σειρών Taylor:

$$\sqrt[3]{1.1}$$

Αναπτύσσουμε γύρω από το σημείο *x = 1*:

$$\sqrt[3]{x} \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1.1} \approx f(1) + f'(1)(0.1) + \frac{f''(1)}{2!}(0.1)^2 \approx 1.03222$$

Σειρές Taylor: Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω, με χρήση σειρών Taylor:

$$\cos(31)$$

Αναπτύσσουμε γύρω από το σημείο *x = 30*:

$$\cos(30) \approx \cos(30) + \left[\cos(30)\right]'_{x=30}(x-30) + \frac{\left[\cos(30)\right]''_{x=30}}{2!}(x-30)^2 + \ldots$$

Σειρές Taylor: Εφαρμογή 3

Πώς προκύπτουν οι παρακάτω προσεγγίσεις;

$$\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \longrightarrow gm$$

$$E = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} - 1\right] \longrightarrow E = \frac{1}{2}mu^2$$

Σειρές Taylor: Εφαρμογή 3

$$\frac{GM_\Gamma m_K}{(r)^2} = \frac{GM_\Gamma m_K}{(R_\Gamma + h)^2} = \left(\frac{GM_\Gamma}{(R_\Gamma)^2}\right) m \left[\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{R_\Gamma}\right)\right]^2}\right]$$

Αναπτύσσοντας τον όρο εντός της αγκύλης σε πολυώνυμο Taylor, μπορούμε να πετύχουμε πιο ακριβή προσέγγιση.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Λουκάς Βλάχος. «Γενικά Μαθηματικά Ι». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΗΜΕΙΏΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.