



Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 13: Ακτίνα Σύγκλισης, Αριθμητική Ολοκλήρωση,
Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σειρές Σε Μορφή Πολυωνύμου

Σειρά Taylor:
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n \quad \left| R_n \right| \leq \frac{m}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

$$\left| f^{(k+1)}(\xi) \right| \leq m \quad , \quad x_0 < \xi < x$$



Σειρές Σε Μορφή Πολυωνύμου

Σειρά Maclaurin:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x)^k$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n \qquad |R_n| \leq \frac{m}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$



Σειρές Σε Μορφή Πολυωνύμου

$\cos(x)$ σε σειρά Maclaurin:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2n)!}x^{2k}$$

$$\approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2n)!}x^{2k}$$

$$R_n(x) = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{2(k+1)!} \right| |x|^k$$



Εφαρμογή 1

e^x σε σειρά Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^n \left[\frac{f(0)^{(x)}}{k!} \right] x^k$$



Εφαρμογή 2

$\sin(x)$ σε σειρά Maclaurin:

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$



Σύγκλιση Δεδομένης Σειράς

Σε ποιά περιοχή του x συγκλίνει η παρακάτω δυναμοσειρά;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k (k+1)} x^k$$

Κριτήριο: $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \rho < 1$



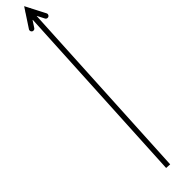
Σύγκλιση Δεδομένης Σειράς

Σε ποιά περιοχή του x συγκλίνει η παρακάτω δυναμοσειρά;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k (k+1)} x^k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{3} |x| < 1 \Rightarrow -3 < x < 3$$

Ακτίνα Σύγκλισης



Εφαρμογή

Σε ποιά περιοχή του x συγκλίνει η παρακάτω δυναμοσειρά;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (x-5)^k$$

Να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς εφαρμόζοντας την προηγούμενη μέθοδο.



Άσκηση

Αναπτύξτε σε σειρά Taylor και συγκρίνετε με την τιμή από υπολογιστή:

$$\sqrt[3]{1.1}$$

Κρατώντας τρεις όρους στη σειρά, είναι η διαφορά από την ακριβή τιμή ίση με το προβλεπόμενο σφάλμα;



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int b^x dx$$



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int b^x dx$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c$$



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \sinh(x) dx$$



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \sinh(x) dx$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$$



Ολοκληρώματα: Επανάληψη

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \sinh(x) dx$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$$



Αριθμητικός Υπολογισμός Ολοκληρώματος

Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα, μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά ως εξής:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_1^N f(x)\Delta k$$

$$= f\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x + f(a + \Delta x)\Delta x + f\left(a + 3\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x$$



Αριθμητικός Υπολογισμός Ολοκληρώματος: Εφαρμογή

Αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int_0^1 e^x dx$$



Αριθμητικός Υπολογισμός Ολοκληρώματος: Εφαρμογή

Αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int_0^1 e^x dx$$

Χωρίζουμε σε 10 κομμάτια την απόσταση από το 0 έως το 1 και υπολογίζουμε:

$$\int_0^1 e^x dx \approx e^{0.05} \cdot 0.1 + e^{0.15} \cdot 0.1 + \dots$$



Μέθοδος Αντικατάστασης

Υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int \sin \sqrt{x} dx$$



Μέθοδος Αντικατάστασης

Υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int \sin \sqrt{x} dx$$

$$\int \sin \sqrt{x} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx \quad , \quad \sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$$



Μέθοδος Αντικατάστασης

Υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int \sin \sqrt{x} dx$$

$$\int \sin \sqrt{x} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx \quad , \quad \sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$$

$$= \int 2u \sin u du$$

$$= 2(-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}) + c$$



Μέθοδος Αντικατάστασης

Υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int \sin \sqrt{x} dx$$

Γενικότερα:

$$\int \sin \sqrt{x} dx = \int \sin t (2t dt) = 2 \int t \sin t (dt)$$

$$t = \sqrt{x} \quad , \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$



Μέθοδος Αντικατάστασης

Υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int \sin \sqrt{x} dx$$

Γενικότερα:

$$\int \sin \sqrt{x} dx = \int \sin t (2t dt) = 2 \int t \sin t (dt)$$

$$u = t \quad u = -\cos t$$

$$du = dt \quad du = \sin t dt$$



Μέθοδος Αντικατάστασης

Υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int \sin \sqrt{x} dx$$

Γενικότερα:

$$\int \sin \sqrt{x} dx = \int \sin t (2t dt) = 2 \int t \sin t (dt)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = t \\ du = dt \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} u = -\cos t \\ du = \sin t dt \end{array} \right\} 2 \left[-t \cos t + \int \cos t dt \right]$$



Μέθοδος Αντικατάστασης

Υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int \sin \sqrt{x} dx$$

Γενικότερα:

$$\left. \begin{array}{ll} u = t & u = -\cos t \\ du = dt & du = \sin t dt \end{array} \right\} 2 \left[-t \cos t + \int \cos t dt \right]$$

$$= -2t \cos t + 2 \sin t + c = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c$$



Απόδειξη της Ολοκλήρωσης Κατά Παράγοντες

Ξεκινώντας από τη γνωστή παραγωγή γινομένου:

$$\frac{d(u(x)v(x))}{dx} = u(x) \frac{dv(x)}{dx} + v(x) \frac{du(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x) \frac{dv(x)}{dx} = \frac{d(u(x)v(x))}{dx} - v(x) \frac{du(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \int u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = \int \frac{d(u(x)v(x))}{dx} dx - \int v(x) \frac{du(x)}{dx} dx$$



Απόδειξη της Ολοκλήρωσης Κατά Παράγοντες

Και τελικά καταλήγουμε στη σχέση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\Rightarrow \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$



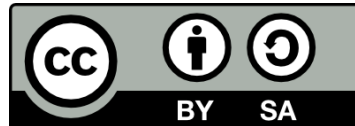
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.
«**Γενικά Μαθηματικά Ι**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη
δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015



ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

