



# Γενικά Μαθηματικά Ι

**Ενότητα 15:** Ολοκληρώματα Με Ρητές Και  
Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Λουκάς Βλάχος  
Τμήμα Φυσικής



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

(Συνέχεια από το προηγούμενο μάθημα)

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα, αφού έχουμε χωρίσει το κλάσμα σε άθροισμα δύο κλασμάτων:

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{2}{x-4} dx + \int \frac{3}{x+1} dx$$
$$= 2 \ln|x-4| + 3 \ln|x+1| + c$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χωρισμό σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 1)}$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χωρισμό σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 1)}$$

Χωρίζουμε το κλάσμα σε άθροισμα κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χωρισμό σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 1)}$$

$$\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1/2}{(x-1)} + \frac{1/2}{(x+1)}$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Χωρισμός σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\frac{x^2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)(x^2 - x + 1) + 3x(x+1)} = \frac{x^2}{(x+1)(x^2 + 2x + 1)}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$





# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Χωρισμός σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\frac{x^2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$\dots = \frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{1}{(x+1)} + \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Χωρισμός του παρακάτω κλάσματος σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1}$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Χωρισμός του παρακάτω κλάσματος σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1}$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1} = \frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{(3x - 1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)}$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Χωρισμός του παρακάτω κλάσματος σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1}$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1} = \frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{(3x - 1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{-\frac{7}{5}}{(3x - 1)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)x + \left(\frac{3}{5}\right)}{(x^2 + 1)}$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Χωρισμός του παρακάτω κλάσματος σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2}$$



# Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Χωρισμός του παρακάτω κλάσματος σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}$$



# Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$$



# Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$$

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cos x dx$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right\} = \int u^4 (1 - u^2)^2 du$$





# Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \cos^2 x dx$$



# Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \cos^2 x dx$$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx$$



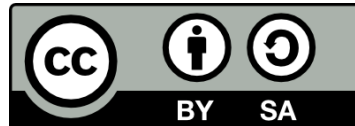
# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.  
«**Γενικά Μαθηματικά Ι**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη  
δικτυακή διεύθυνση: [http://opencourses.auth.gr/eclass\\_courses](http://opencourses.auth.gr/eclass_courses).



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης  
Θεσσαλονίκη, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

**ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ**

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

