ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 16: Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων, Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες (γενικευμένη μορφή):

$$a^2 - (a\sin\theta)^2 = (a\cos\theta)^2$$

$$a^2 + (a\tan\theta)^2 = (a\sec\theta)^2$$

$$(a\cos\theta)^2 - a^2 = (a\tan\theta)^2$$

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Παραδείγματα ολοκληρωμάτων από τον πίνακα ολοκληρωμάτων:

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Παραδείγματα αντικαταστάσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} \rightarrow \qquad \begin{aligned} u &= \tan x \\ du &= \frac{dx}{1+x^2} \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Παραδείγματα αντικαταστάσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} \rightarrow \qquad \begin{aligned} u &= \tan x \\ du &= \frac{dx}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} x &= 2\sin\theta \\ dx &= 2\cos\theta d\theta \end{aligned}\right\} \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

$$\left.\begin{array}{c} x = 5\sec\theta \\ dx = 5\sec\theta\tan\theta d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = \int 5\tan^2\theta d\theta$$

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

$$\left.\begin{array}{c} x = 5\sec\theta \\ dx = 5\sec\theta\tan\theta d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = \int 5\tan^2\theta d\theta$$

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \Rightarrow \int 5\tan^2\theta d\theta = 5\int \left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta$$

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

$$\left.\begin{aligned} x &= 5\sec\theta \\ dx &= 5\sec\theta\tan\theta d\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = \int 5\tan^2\theta d\theta$$

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \Rightarrow \int 5\tan^2\theta d\theta = 5\int\left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta$$

$$= 5\tan\theta - 5\theta + c$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Θεμελιώδες Θεώρημα της Ολοκλήρωσης:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx}= f(x)$$

Απόδειξη:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right]=$$

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Θεμελιώδες Θεώρημα της Ολοκλήρωσης:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

Απόδειξη:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right]=\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$$

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Υπολογισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος:

$$\int_a^b f(t)dt \Rightarrow F(b) - F(a)$$

Απόδειξη:

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Υπολογισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος:

$$\int_a^b f(t)dt \Rightarrow F(b)-F(a)$$

Απόδειξη: Θέτουμε συνάρτηση G(x) και έχουμε

$$G(x)=\int_a^x F'(t)dt \Rightarrow \frac{dG(x)}{dx}=F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow G(x)-F(x)=C\begin{cases} 0-F(a)=C \\ G(b)-F(b)=C \end{cases} \Rightarrow G(b)=F(b)-F(a)$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

Μας ενδιαφέρει να δείξουμε αν ένα τέτοιο ολοκλήρωμα **συγκλίνει**, δηλαδή δεν απειρίζεται.

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

Μας ενδιαφέρει να δείξουμε αν ένα τέτοιο ολοκλήρωμα **συγκλίνει**, δηλαδή δεν απειρίζεται.

Αν $$\int_a^{\infty} f(x)dx < \int_a^{\infty} g(x)dx$$

και το $2^{ο}$ ολοκλήρωμα συγκλίνει, τότε συγκλίνει και το $1^{ο}$ (ισχύει και αντίστροφα).

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Υπολογίζουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{l\to\infty}\int_1^{l} f(x)dx = \lim_{l\to\infty}\left[F(l) - F(1)\right]$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 1

Υπολογίστε το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{l\to\infty} \int_1^{l} \frac{dx}{x} dx = \lim_{l\to\infty} [\ln l] = \infty$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 2

Υπολογίστε το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 2

Υπολογίστε το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{l\to\infty} \int_0^l \frac{dx}{1+x^2}\, dx = \lim_{l\to\infty} \left[\arctan x\right]_0^l$$

$$= \lim_{l\to\infty} \left[\arctan l - \arctan 0\right] = \frac{\pi}{2}$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 3

Υπολογίστε το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty (1-x)e^{-x}dx$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 3

Υπολογίστε το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty}(1-x)e^{-x}dx$$

$$\int_0^{\infty}(1-x)e^{-x}dx=\lim_{l\to\infty}\int_0^{l}(1-x)e^{-x}dx$$

$$=\lim_{l\to\infty}\left\{\left[-e^{-x}(1-x)\right]_0^l-\int_0^l -e^{x}(-1)dx\right\}=\lim_{l\to\infty}\left(le^{-l}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{e^{l}}\right)=0$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 4

Τρόπος υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 4

Τρόπος υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε κάθε ολοκλήρωμα ως συνήθως

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 4

Υπολογίστε το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Εφαρμογή 4

Υπολογίστε το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΗΜΕΊΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.