



Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 2: Τριγωνομετρικές, Εκθετικές και Σύνθετες Συναρτήσεις

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ημίτονο:

$$y = a_0 \sin(\kappa x + \phi)$$



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ημίτονο:

$$y = a_0 \sin(\kappa x + \phi)$$

Πλάτος

Κυματάριθμος

Αρχική Φάση



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ημίτονο:

$$y = a_0 \sin(\kappa x + \phi) \longrightarrow \text{Στάσιμο Κύμα}$$



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ημίτονο:

$$y = a_0 \sin(\kappa x + \phi) \longrightarrow \text{Στάσιμο Κύμα}$$

t: χρόνος

$$y = a_0 \sin(\kappa x - \omega t + \phi) \longrightarrow \text{Τρέχον Κύμα}$$



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ημίτονο:

$$y = a_0 \sin(\kappa x + \phi) \longrightarrow \text{Στάσιμο Κύμα}$$

$$y = a_0 \sin(\kappa x - \omega t + \phi) \longrightarrow \text{Τρέχον Κύμα}$$

ω ↓ $\omega = \frac{2\pi}{T}$: Κυκλική Συχνότητα

t : χρόνος



Άλλες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Εφαπτομένη: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Συνεφαπτομένη: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$



Άλλες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Τέμνουσα:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Συντέμνουσα:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$



Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$



Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$



Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$$\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \cos(A) \sin(B)$$

$$\sin(A - B) = \sin(A) \cos(B) - \cos(A) \sin(B)$$

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B)$$

$$\cos(A - B) = \cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B)$$



Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Τόξο Ημιτόνου: $y = \sin^{-1} x$
 $= \arcsin x, \quad (-1 \leq x \leq 1)$

Τόξο Συνημιτόνου: $y = \cos^{-1} x$
 $= \arccos x, \quad (-1 \leq x \leq 1)$



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις Ως Λύσεις Διαφορικών Εξισώσεων

Η τριγωνομετρική συνάρτηση συνημιτόνου:

$$y = a_0 \cos(\kappa x + \phi)$$

Προκύπτει ως λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \kappa^2 y = 0$$



Εκθετικές Συναρτήσεις

$$y = a^x$$

Δύο είναι οι πιο συνηθισμένες τιμές για το a :

1. Η σταθερά e : $a \equiv e \approx 2.7$



Εκθετικές Συναρτήσεις

$$y = a^x$$

Δύο είναι οι πιο συνηθισμένες τιμές για το a :

1. Η σταθερά e : $a \equiv e \approx 2.7$

2. Ο αριθμός 10



Ιδιότητες Εκθετικών Συναρτήσεων

$$e^0 = 1$$

$$(e^a)^r = e^{a \cdot r}$$

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$



Λογαριθμικές Συναρτήσεις

$$y = \log_a x$$

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης, δηλαδή είναι:

$$\log_a (a^x) = x$$



Λογαριθμικές Συναρτήσεις

$$y = \log_a x$$

Για $a = e$, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$y = \ln x$$

Για $a = 10$, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$y = \log x$$



Αλλαγή Βάσης Λογαρίθμου

Για να αλλάξουμε τη βάση ενός λογαρίθμου από b σε a :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$



Σύνθετες Συναρτήσεις

$$y = f(\phi(x))$$

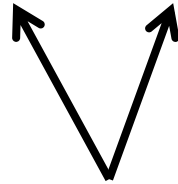


Το όρισμα μιας συνάρτησης είναι επίσης μια συνάρτηση.



Παραμετρικές Συναρτήσεις

$$x(t), y(t)$$

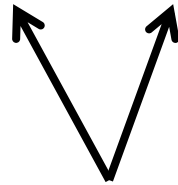


Συναρτήσεις του χρόνου (t)



Παραμετρικές Συναρτήσεις

$$x(t), y(t)$$



Συναρτήσεις του χρόνου (t)

Για να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση του x ,
λύνουμε την $x(t)$ ως προς t και αντικαθιστούμε
στην $y(t)$



Παραμετρικές Συναρτήσεις

$$x(t), y(t)$$

Παραμετρικές συναρτήσεις σαν τις παραπάνω είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη Φυσική.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι x, y είναι οι συντεταγμένες ενός σωματιδίου, μπορούμε με τις $x(t), y(t)$ να περιγράψουμε την τροχιά ενός σωματιδίου.



Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

$$F(x, y(x)) = 0$$

Σε αυτήν την κατηγορία συναρτήσεων, η συνάρτηση $y(x)$ ορίζεται μέσω της παραπάνω συνάρτησης $F(x, y(x))$.

Έτσι, εδώ η $y(x)$ ορίζεται **πεπλεγμένα** μέσω της $F(x, y(x))$.



Μαθηματικά Μοντέλα

- Τα μαθηματικά μοντέλα κατασκευάζονται από τους Φυσικούς με σκοπό να περιγράψουν τη Φύση.
- Τα μαθηματικά μοντέλα έχουν περιορισμένη ισχύ και φυσικά μπορεί να καταρριφθούν.
- Παραδείγματα μαθηματικών μοντέλων είναι:
 - Οι νόμοι του Νεύτωνα.
 - Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.



Ερευνητική Εργασία

- Να περιγράψετε την κίνηση μιας μπάλας του τέννις, που αφήνεται να πέσει από κάποιο ύψος στο έδαφος και στη συνέχεια αναπηδά μέχρι να σταματήσει.



Πρόβλημα

- Μια εταιρεία παράγει σούπες και τις διαθέτει στην αγορά σε κυλινδρικά κουτάκια που να χωράνε 500cm^3 . Να βρείτε την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου ώστε να χρησιμοποιηθεί το ελάχιστο υλικό κατασκευής των κουτιών.



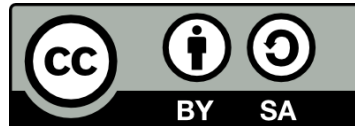
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.
«**Γενικά Μαθηματικά I**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη
δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 30/03/2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

