ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 6: Ακρότατα Συνάρτησης

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

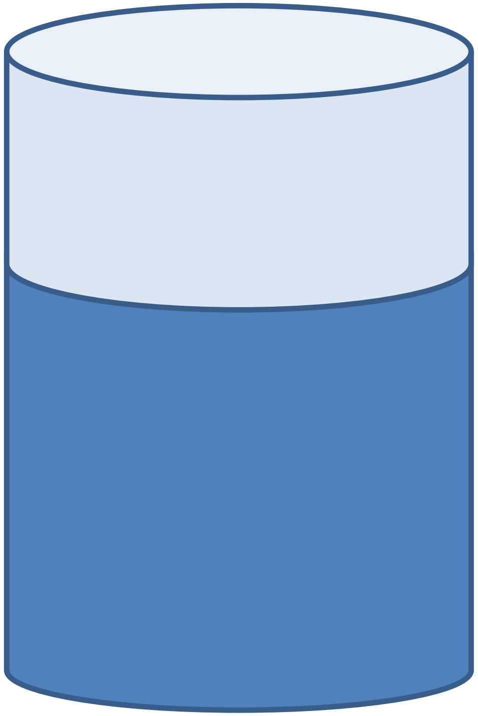
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

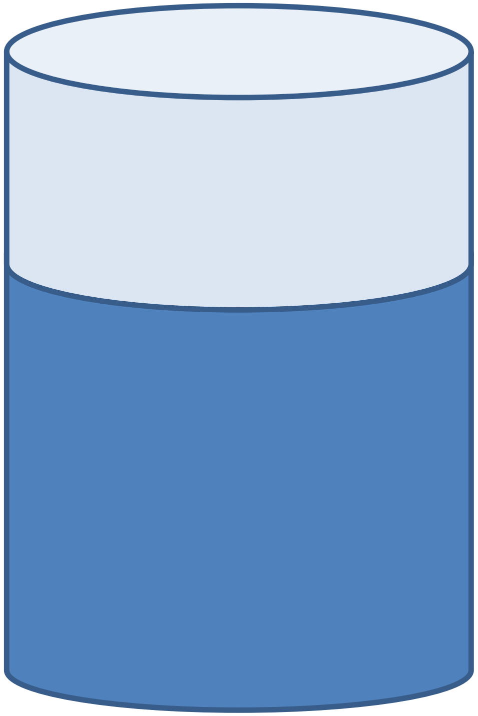
Εφαρμογή

Ερώτημα: Με τί ρυθμό γεμίζει το κυλινδρικό δοχείο από μια βρύση;



Εφαρμογή

Ερώτημα: Με τί ρυθμό γεμίζει το κυλινδρικό δοχείο από μια βρύση;



Μετράμε το *ρυθμό μεταβολής της στάθμης* του νερού στο δοχείο:

$$\frac{dh}{dt}$$

Υπολογίζουμε έπειτα το *ρυθμό μεταβολής του όγκου*, παραγωγίζοντας τον όγκο ως προς t και αντικαθιστώντας το ρυθμό μεταβολής της στάθμης που βρήκαμε προηγουμένως.

Πρόβλημα Του Ανεστραμμένου Κώνου

Έστω ανεστραμμένος κώνος ύψους $h = 80cm$ και ακτίνας $r = 40cm.$

Γεμίζουμε τον ανεστραμμένο κώνο με ρυθμό $10 \ cm^3 / \sec$

Να υπολογίσετε το ρυθμό ανόδου της στάθμης του νερού, όταν αυτή βρίσκεται σε ύψος 20 cm από το έδαφος.

Πρόβλημα Του Ανεστραμμένου Κώνου

Λύση

Ο όγκος του κώνου είναι $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

Πρόβλημα Του Ανεστραμμένου Κώνου

Λύση

Ο όγκος του κώνου είναι $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Από τα όμοια τρίγωνα υπολογίζουμε την ακτίνα του κώνου όταν η στάθμη είναι σε ύψος 20 cm.

Πρόβλημα Του Ανεστραμμένου Κώνου

Λύση

Ο όγκος του κώνου είναι $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Από τα όμοια τρίγωνα υπολογίζουμε την ακτίνα του κώνου όταν η στάθμη είναι σε ύψος 20 cm.

Από τα στοιχεία του κώνου γνωρίζουμε ότι $h = 2r$
(αφού $h = 80$ cm και $r = 40$ cm)

Πρόβλημα Του Ανεστραμμένου Κώνου

Λύση

Ο όγκος του κώνου είναι $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Από τα όμοια τρίγωνα υπολογίζουμε την ακτίνα του κώνου όταν η στάθμη είναι σε ύψος 20 cm.

Από τα στοιχεία του κώνου γνωρίζουμε ότι *h = 2r* (αφού *h = 80* cm και *r = 40* cm)

Παραγωγίζουμε τον όγκο ως προς το χρόνο, αντικαθιστώντας r = h/2:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h\right]$$

Πρόβλημα Του Ανεστραμμένου Κώνου

Λύση

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{12}\pi h^3\right] = \frac{1}{12}\pi \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

Λύνουμε ως προς το ρυθμό μεταβολής της στάθμης:

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{12}{\pi}\left(\frac{dV}{dt}\right)\frac{1}{3h^2}$$

Θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής

Θεώρημα του Rolle:

Για μια συνεχή συνάρτηση *f(x)* της οποίας είναι γνωστές οι τιμές στα άκρα ενός διαστήματος *(a,b):*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f'(\xi) = 0 \qquad (a < \xi < b)$$

Θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής

Θεώρημα του Rolle:

Για μια συνεχή συνάρτηση *f(x)* της οποίας είναι γνωστές οι τιμές στα άκρα ενός διαστήματος *(a,b):*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f'(\xi) = 0 \qquad (a < \xi < b)$$

Θεώρημα της Μέσης Τιμής:

Για μια συνεχή συνάρτηση *f(x)* της οποίας είναι γνωστές οι τιμές στα άκρα ενός διαστήματος *(a,b):*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (a < \xi < b)$$

Διαφορικό Συνάρτησης

Μετατόπιση κατά *Δx*:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$$

Διαφορικό της συνάρτησης *f*:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = f'\left(x+\theta\Delta x\right)\Delta x$$

$$\left(0 < \theta < 1\right)$$

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Συνάρτησης

Εάν μια συνάρτηση τείνει ασυμπτωτικά προς μια ευθεία:

$$y = mx + b$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους όρους m, b ως εξής:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right]$$

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Συνάρτησης

Η πρώτη σχέση αποδεικνύεται ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(mx+b\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\left(m+\frac{b}{x}\right)\right]=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[x\left[\frac{f(x)}{x}-\left(m+\frac{b}{x}\right)\right]\right]=0$$

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Συνάρτησης

Η πρώτη σχέση αποδεικνύεται ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(mx+b\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\left(m+\frac{b}{x}\right)\right]=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[x\left[\frac{f(x)}{x}-\left(m+\frac{b}{x}\right)\right]\right]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f(x)-x\left(m+\frac{b}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x}}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\left(m+\frac{b}{x}\right)\right]=0$$

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Συνάρτησης

Η πρώτη σχέση αποδεικνύεται ως εξής:

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[f(x) - x\left(m + \frac{b}{x} \right) \right]}{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \left(m + \frac{b}{x} \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \left(m + \frac{b}{x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Συνάρτησης

Η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται, με χρήση της πρώτης, ως εξής:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(mx + b \right) \right] = 0 \Rightarrow b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right]$$

Ακρότατα

Αν έχουμε μια συνάρτηση *f(x)* και αναζητούμε τα ακρότατα της, παραγωγίζουμε και θέτουμε $f'(x) = 0$. Η λύση αυτής της εξίσωσης θα μας δώσει τα σημεία στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται, δηλαδή εκείνα τα σημεία στα οποία η κλίση της *f(x)* είναι μηδέν.

Βρίσκουμε αν ένα ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο, από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στο ακρότατο:

$$f''(x) < 0 \qquad\qquad f''(x) > 0$$

Ακρότατα: Εφαρμογή 1

Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει την κορυφή του στην αρχή των αξόνων και τις δύο κορυφές του στην καμπύλη $y = 27 - x^2$. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδό του τριγώνου.

Ακρότατα: Εφαρμογή 1

Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει την κορυφή του στην αρχή των αξόνων και τις δύο κορυφές του στην καμπύλη $y = 27 - x^2$. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδό του τριγώνου.

<u>Λύση</u>

Το εμβαδό του τριγώνου θα είναι: $E(x) = \frac{1}{2}(2x)(27 - x^2)$

$$\Rightarrow E'(x) = -3x^2 + 27$$

Ακρότατο: $\Rightarrow E'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

Ακρότατα: Εφαρμογή 1

Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει την κορυφή του στην αρχή των αξόνων και τις δύο κορυφές του στην καμπύλη $y = 27 - x^2$. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδό του τριγώνου.

<u>Λύση</u>

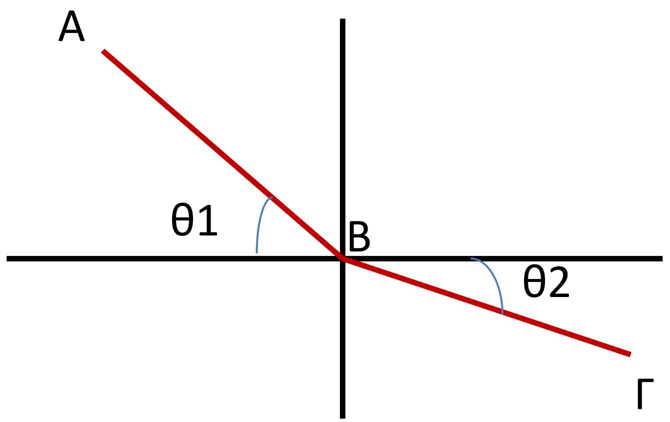
Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$E''(x) = -6x \Rightarrow E''(3) = -18$$

Άρα το μέγιστο εμβαδό του τριγώνου θα είναι

$$E(3) = 54$$

Ακρότατα: Εφαρμογή 2

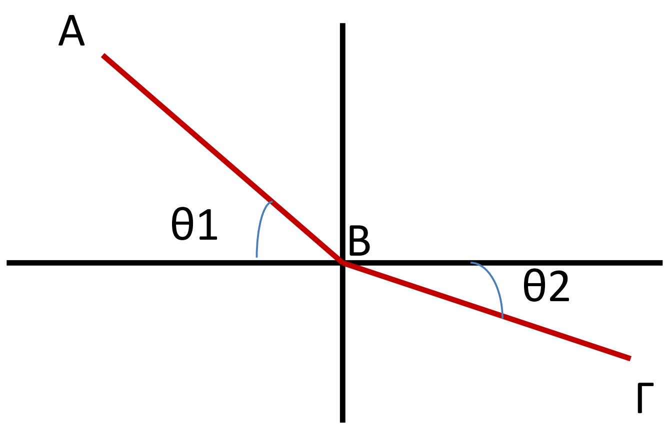


Να δειχθεί ότι το φως θα ακολουθήσει τη διαδρομή ελάχιστου χρόνου για

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

όπου v_1, v_2 οι ταχύτητες του φωτός στα δύο μέσα

Ακρότατα: Εφαρμογή 2



Να δειχθεί ότι το φως θα ακολουθήσει τη διαδρομή ελάχιστου χρόνου για

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

όπου v_1, v_2 οι ταχύτητες του φωτός στα δύο μέσα

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{AB}) &= \sqrt{x^2 + a^2} \\ (\mathrm{B\Gamma}) &= \sqrt{(\beta - x)^2 + \gamma^2} \end{aligned}\right\}$$

$$t = \frac{(AB)}{v_1} + \frac{(\mathrm{B\Gamma})}{v_2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(\beta - x)^2 + \gamma^2}}{v_2}$$

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΗΜΕΙΏΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.