



Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 9: Κίνηση Σε Πολικές Συντεταγμένες

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιγραφή Κίνησης Σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Διάνυσμα Θέσης: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y$



Περιγραφή Κίνησης Σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Διάνυσμα Θέσης: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y$

Εξίσωση Κίνησης: $m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}$



Περιγραφή Κίνησης Σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Διάνυσμα Θέσης: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y$

Εξίσωση Κίνησης: $m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}$

Παράγωγος ως προς το χρόνο: $\vec{u} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\hat{e}_x + \dot{y}(t)\hat{e}_y$



Περιγραφή Κίνησης Σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Διάνυσμα Θέσης: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y$

Εξίσωση Κίνησης: $m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}$

Παράγωγος ως προς το χρόνο: $\vec{u} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\hat{e}_x + \dot{y}(t)\hat{e}_y$

2^η Παράγωγος ως προς το χρόνο: $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\hat{e}_x + \ddot{y}(t)\hat{e}_y$



Περιγραφή Κίνησης Σε Πολικές Συντεταγμένες

$$\text{Διάνυσμα Θέσης: } \vec{r}(t) = r\hat{e}_r \quad , \quad \hat{e}_r \rightarrow \hat{e}_r(\theta(t))$$

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \quad \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y$$



Περιγραφή Κίνησης Σε Πολικές Συντεταγμένες

$$\text{Διάνυσμα Θέσης: } \vec{r}(t) = r\hat{e}_r \quad , \quad \hat{e}_r \rightarrow \hat{e}_r(\theta(t))$$

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \quad \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y$$

$$\text{Ταχύτητα: } \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta(t) \hat{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta(t) \hat{e}_y = \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$



Περιγραφή Κίνησης Σε Πολικές Συντεταγμένες

Υπολογισμός επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες:

$$\vec{r}(t) = r\hat{e}_r \quad \vec{u} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$



Περιγραφή Κίνησης Σε Πολικές Συντεταγμένες

Υπολογισμός επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες:

$$\vec{r}(t) = r\hat{e}_r \quad \vec{u} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \dot{\vec{u}}(t) &= [\dot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta] + [\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\theta}(-\hat{e}_r)] \\ &= [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\hat{e}_r + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]\hat{e}_\theta\end{aligned}$$



Περιγραφή Κίνησης Σε Πολικές Συντεταγμένες

Σε κυκλική κίνηση το r δε μεταβάλλεται με το χρόνο (σταθερή ακτίνα), άρα η επιτάχυνση θα είναι:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \hat{e}_r + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \hat{e}_\theta \\ &= -r\dot{\theta}^2 \hat{e}_r + r\ddot{\theta} \hat{e}_\theta\end{aligned}$$

και αν υποθέσουμε σταθερή γωνιακή ταχύτητα:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{a} &= -r\dot{\theta}^2 \hat{e}_r\end{aligned}$$



Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων Σε Πολικές Συντεταγμένες

$$r = a \sin \theta \rightarrow \text{Κύκλος}$$

$$r = a[1 \pm \cos \theta] \rightarrow \text{Καρδιοειδές}$$

$$r = a \cos(n\theta) \rightarrow \text{Φύλλα}$$

$$r = \theta \rightarrow \text{Ελικοειδής}$$



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.
«**Γενικά Μαθηματικά Ι**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη
δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

