



# Γενικά Μαθηματικά I

## Ενότητα 10: Υπερβολικές Συναρτήσεις, Ακολουθίες

Λουκάς Βλάχος  
Τμήμα Φυσικής



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Η Έλλειψη Σε Πολικές Συντεταγμένες

Έλλειψη σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



# Η Έλλειψη Σε Πολικές Συντεταγμένες

Έλλειψη σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left. \begin{array}{l} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{r^2(\theta)\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2(\theta)\sin^2\theta}{b^2} = 1$$



# Η Έλλειψη Σε Πολικές Συντεταγμένες

Έλλειψη σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left. \begin{array}{l} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{r^2(\theta)\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2(\theta)\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow b^2 r^2(\theta)\cos^2\theta + a^2 r^2(\theta)\sin^2\theta = a^2 b^2$$

$$\Rightarrow r^2(\theta)(b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta) = a^2 b^2$$



# Η Έλλειψη Σε Πολικές Συντεταγμένες

$$\Rightarrow r^2(\theta)(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) = a^2 b^2$$

$$\Rightarrow r^2(\theta) = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow r^2(\theta) = \frac{a^2 b^2}{\cos^2 \theta (b^2 - a^2) + a^2}$$



# Η Έλλειψη Σε Πολικές Συντεταγμένες

Συχνά συναντούμε την έλλειψη, σε πολικές συντεταγμένες, στην παρακάτω μορφή:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}$$

όπου  $\varepsilon^2 = \frac{\gamma^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$





# Υπερβολικές Συναρτήσεις

Υπερβολικό Ημίτονο:  $\sinh(x) = \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]$

Υπερβολικό Συνημίτονο:  $\cosh(x) = \left[ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]$

Υπερβολική Εφαπτομένη:  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$



# Υπερβολικές Συναρτήσεις

Υπερβολική Συνεφαπτομένη:  $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

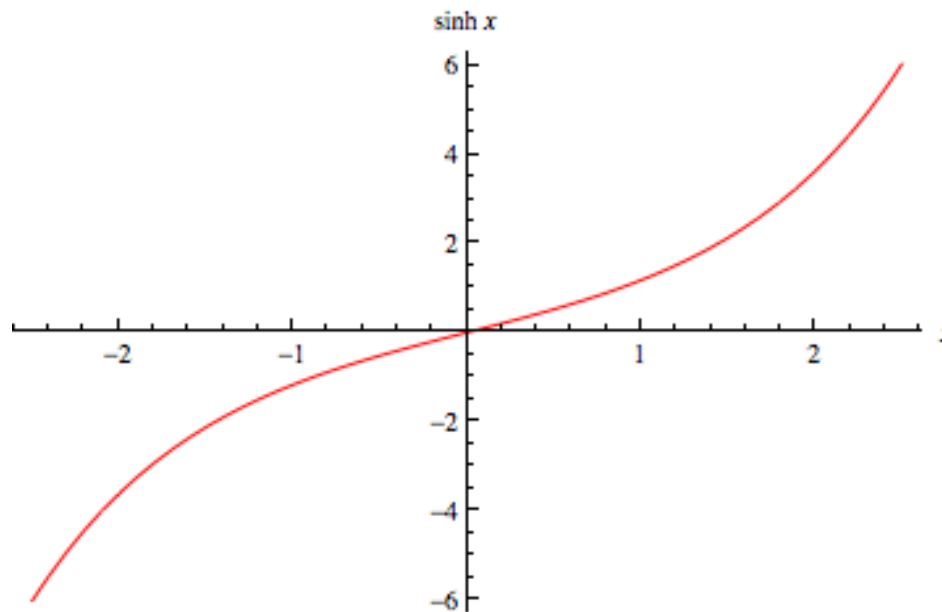
Υπερβολική Τέμνουσα:  $\sec h(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$

Υπερβολική Συντέμνουσα:  $\csc h(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$



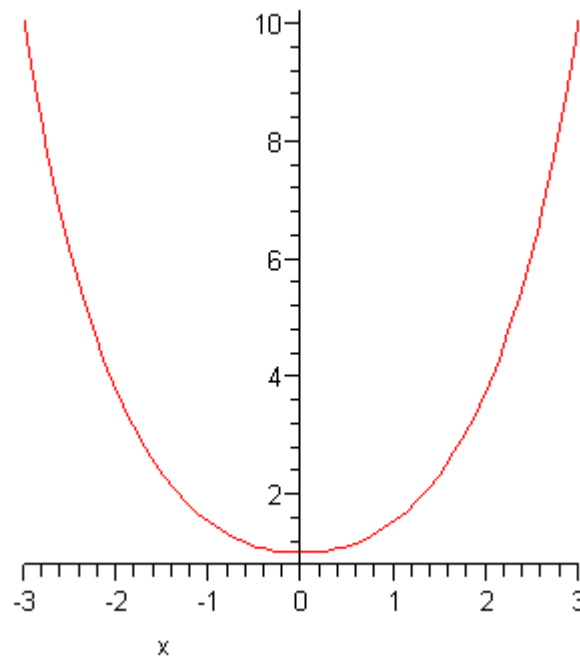
# Γραφική Παράσταση Υπερβολικού Ημιτόνου

$$\sinh(x) = \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]$$



# Γραφική Παράσταση Υπερβολικού Συνημιτόνου

$$\cosh(x) = \left[ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]$$



# Ταυτότητες Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$



# Παράγωγοι Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x^3)) = 3x^2 \sinh(x^3)$$



# Ολοκληρώματα Υπερβολικών Συναρτήσεων

---

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$$

(Ανάλογα προκύπτουν για τις υπόλοιπες)



# Αντίστροφες Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Για να βρούμε την αντίστροφη, λύνουμε ως προς  $x$ :

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)$$

$$\Rightarrow 2e^x y = e^{2x} - 1 \Rightarrow 2e^x y - (e^x)^2 + 1 = 0$$





# Αντίστροφες Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + y^2 = y^2 + 1 \Rightarrow (e^x - y)^2 = y^2 + 1$$

$$\Rightarrow e^x - y = \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Και τελικά:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$



# Παράγωγος Αντίστροφου Υπερβολικού Ημιτόνου

$$\left[ \sinh^{-1}(x) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Το παραπάνω βρίσκει συχνά εφαρμογή στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sinh^{-1}(x) + c$$



# Παράγωγος Αντίστροφου Υπερβολικού Συνημιτόνου, Εφαπτομένης

$$\left[ \cosh^{-1}(x) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\left[ \tanh^{-1}(x) \right]' = \frac{1}{1 - x^2}$$



# Εφαρμογή Σε Υπολογισμό Ολοκληρώματος

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} =$$



# Εφαρμογή Σε Υπολογισμό Ολοκληρώματος

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 \left[ \left( \frac{2x}{3} \right)^2 - 1 \right]}} = \int \frac{dx}{3 \sqrt{\left( \frac{2x}{3} \right)^2 - 1}}$$



# Εφαρμογή Σε Υπολογισμό Ολοκληρώματος

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 \left[ \left( \frac{2x}{3} \right)^2 - 1 \right]}} = \int \frac{dx}{3 \sqrt{\left( \frac{2x}{3} \right)^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} \right) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{2} \cosh^{-1} u + c$$



# Εφαρμογή Σε Υπολογισμό Ολοκληρώματος

Άρα, τελικά έχουμε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left( \frac{2x}{3} \right) + c$$



# Ακολουθίες Και Σειρές

Παραδείγματα Ακολουθιών:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rightarrow \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=0}^{\infty}$$





# Ακολουθίες Και Σειρές: Σύγκλιση

Λέμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει, όταν:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Δηλαδή, όταν η σειρά έχει πεπερασμένο όριο.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.  
«**Γενικά Μαθηματικά Ι**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη  
δικτυακή διεύθυνση: [http://opencourses.auth.gr/eclass\\_courses](http://opencourses.auth.gr/eclass_courses).



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης  
Θεσσαλονίκη, 2015



**ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ**

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

