ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 12: Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σύγκλιση Σειράς

Όταν μια σειρά συγκλίνει, θα πρέπει:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Σύγκλιση Σειράς

Όταν μια σειρά συγκλίνει, θα πρέπει:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Απόδειξη:

$$S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\Rightarrow R - R = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Σύγκλιση Σειράς: Εφαρμογή

Έλεγχος σύγκλισης για τη σειρά: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)$

Σύγκλιση Σειράς: Εφαρμογή

Έλεγχος σύγκλισης για τη σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}[1]$$

Άρα η σειρά **αποκλίνει**, αφού καταλήγει σε άθροισμα μονάδων

Σύγκλιση Σειράς: Κριτήριο της Ολοκλήρωσης

Αν αποδείξουμε ότι κάθε όρος μιας σειράς είναι μικρότερος από έναν ορισμένο αριθμό, τότε έχουμε δείξει ότι η σειρά **συγκλίνει**.

Παράδειγμα:

Για τη σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Θα δείξουμε ότι: $S_n < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Σύγκλιση Σειράς: Κριτήριο της Ολοκλήρωσης

Αν αποδείξουμε ότι κάθε όρος μιας σειράς είναι μικρότερος από έναν ορισμένο αριθμό, τότε έχουμε δείξει ότι η σειρά **συγκλίνει**.

Παράδειγμα:

Για τη σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Είναι: $S_n < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2$

Σύγκλιση Σειράς: Κριτήριο της Ολοκλήρωσης

Αν αποδείξουμε ότι κάθε όρος μιας σειράς είναι μικρότερος από έναν ορισμένο αριθμό, τότε έχουμε δείξει ότι η σειρά **συγκλίνει**.

Παράδειγμα:

Για τη σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Γενικά: $\lim_{l\to\infty}\left[\int_1^l \frac{1}{x^p}dx\right] = \lim_{l\to\infty}\left[\frac{l^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right]$

Σύγκλιση Σειράς: Κριτήριο της Ολοκλήρωσης

Αν αποδείξουμε ότι κάθε όρος μιας σειράς είναι μικρότερος από έναν ορισμένο αριθμό, τότε έχουμε δείξει ότι η σειρά **συγκλίνει**.

Παράδειγμα:

Για τη σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Άρα: $$\lim_{l \to \infty} \left[\frac{l^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right] \to \begin{cases} p = 1: & \text{Αποκλίνει} \\ p > 1: & \text{Συγκλίνει} \end{cases}$$

Κριτήριο της Ολοκλήρωσης: Εφαρμογή

Να μελετηθεί η σύγκλιση της σειράς: $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+9k^2}\right]$

Κριτήριο της Ολοκλήρωσης: Εφαρμογή

Να μελετηθεί η σύγκλιση της σειράς: $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+9k^2}\right]$

$$\frac{1}{10}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+9x^2}=\frac{1}{10}+\lim_{l\to\infty}\int_1^{l}\frac{dx}{1+(3x)^2}$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(3)\right]$$

Άρα η σειρά **συγκλίνει**

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Αν $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

και η δεύτερη σειρά συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η πρώτη.

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

Εφαρμογή: Να βρείτε αν συγκλίνει η σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

Εφαρμογή: Να βρείτε αν συγκλίνει η σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Σειρά σύγκρισης: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

Εφαρμογή: Να βρείτε αν συγκλίνει η σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Σειρά σύγκρισης: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Για *k>4* είναι: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Άρα η σειρά **συγκλίνει**.

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Αν υπάρχει $\rho = \lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k}$

τότε οι δύο σειρές έχουν όμοια συμπεριφορά.

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

2. Παράδειγμα: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3 - 2k^2 + 4}{k^7 - k^3 + 2}$$

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

2. Παράδειγμα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3 - 2k^2 + 4}{k^7 - k^3 + 2}$$

Σειρά Σύγκρισης:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = 3$$

Άρα η σειρά **συγκλίνει**.

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$\rho < 1:$ Συγκλίνει

$\rho = 1:$ Αποκλίνει

$\rho > 1:$ Η μέθοδος δε δίνει αποτέλεσμα

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

3. Παράδειγμα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$$

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

3. Παράδειγμα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{10}{k+1} = 0 < 1$$

$\rho < 1:$ Άρα η σειρά **συγκλίνει.**

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

4. $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left[\sqrt[k]{a_k}\,\right]$$

$\rho < 1:$ Συγκλίνει

$\rho = 1:$ Αποκλίνει

$\rho > 1:$ Η μέθοδος δε δίνει αποτέλεσμα

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

4. Παράδειγμα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\ln(k+1)\right]^k}$$

Σειρές Με Θετικούς Όρους: Κριτήρια

4. Παράδειγμα $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^k}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left[\sqrt[k]{a_k}\right] = \lim_{k\to\infty}\left[\sqrt[k]{\frac{1}{[\ln(k+1)]^k}}\right] = 0$$

$\rho < 1$: Άρα η σειρά **συγκλίνει.**

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΗΜΕΙΏΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.