



Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 14: Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες,
Ολοκλήρωση Ρητών συναρτήσεων

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ολοκληρώματα

Πορεία ολοκλήρωσης:

$$\text{Αν } f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\text{Τότε } \int f(x)dx = \int \left(\frac{dF}{dx} \right) dx = \int dF(x) = F(x) + c$$



Ολοκληρώματα Υπερβολικών Συναρτήσεων

Υπερβολικές Συναρτήσεις:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Ολοκληρώματα Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned} \right\} \int \cosh x dx = \sinh x + c$$



Μέθοδος Αντικατάστασης: Παράδειγμα

$$\int \cos(x^2 + 1)2x dx$$

Θέτουμε $x^2 + 1 = u(x)$
 $du = 2x dx$

$$\begin{aligned}\int \cos(x^2 + 1)2x dx &= \int \cos(u(x)) du = \sin(u(x)) + c \\ &= \sin(x^2 + 1) + c\end{aligned}$$



Μέθοδος Αντικατάστασης: Εφαρμογή

$$\int x^3 (x^4 + 3)^{10} dx$$



Μέθοδος Αντικατάστασης: Εφαρμογή

$$\int x^3 (x^4 + 3)^{10} dx$$

$$x^4 + 3 = u$$

Θέτουμε

$$du = 4x^3 dx$$

$$\int x^3 (x^4 + 3)^{10} dx = \int \frac{1}{4} (u)^{10} du = \frac{1}{4} \frac{1}{11} u^{11} = \frac{1}{44} (x^4 + 3)$$



Μέθοδος Αντικατάστασης: Εφαρμογή

$$\int \tan x dx$$



Μέθοδος Αντικατάστασης: Εφαρμογή

$$\int \tan x dx$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες

$$\frac{d(u(x)v(x))}{dx} = u(x) \frac{dv(x)}{dx} + v(x) \frac{du(x)}{dx}$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες

$$\frac{d(u(x)v(x))}{dx} = u(x) \frac{dv(x)}{dx} + v(x) \frac{du(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x) \frac{dv(x)}{dx} = \frac{d(u(x)v(x))}{dx} - v(x) \frac{du(x)}{dx}$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες

$$\frac{d(u(x)v(x))}{dx} = u(x) \frac{dv(x)}{dx} + v(x) \frac{du(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x) \frac{dv(x)}{dx} = \frac{d(u(x)v(x))}{dx} - v(x) \frac{du(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \int u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = \int \frac{d(u(x)v(x))}{dx} dx - \int v(x) \frac{du(x)}{dx} dx$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες

Και τελικά καταλήγουμε στη σχέση της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\Rightarrow \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες: Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα με χρήση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int \ln x dx$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες: Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα με χρήση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int \ln x dx$$

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x d(\ln x) \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες:

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα με χρήση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int e^x \cos x dx$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες: Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα με χρήση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = \int (e^x)' \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες: Αναγωγικοί Τύποι

$$\int \cos^n x dx \quad (n > 2)$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες: Αναγωγικοί Τύποι

$$\int \cos^n x dx \quad (n > 2)$$

$$\int \cos^n x dx = \int (\cos^{n-1} x)(\cos x) dx$$

$$= (\cos^{n-1} x) \sin x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες: Αναγωγικοί Τύποι - Εφαρμογή

$$\int \cos^4 x dx$$



Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες: Αναγωγικοί Τύποι - Εφαρμογή

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \int \cos^0 x dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3x}{8} \\ &= \frac{2 \cos^3 x \sin x + 3 \cos x \sin x + 3x}{8}\end{aligned}$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Ολοκλήρωση συναρτήσεων της μορφής: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Ολοκλήρωση συναρτήσεων της μορφής: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Παράδειγμα: $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3} + c$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 + 1}$$

$$= \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 1} = \arctan(x - 2) + c$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{xdx}{x^2 - 4x + 8}$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x dx}{x^2 - 4x + 8}$

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{x dx}{x^2 - 4x + 4 + 4} = \int \frac{x dx}{(x-2)^2 + 4}$$

$$= \int \frac{(x-2) + 2}{(x-2)^2 + 4} dx = \int \frac{(x-2)}{(x-2)^2 + 4} dx + \int \frac{2}{(x-2)^2 + 4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \arctan\left[\frac{x-2}{2}\right] + c$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \left[\frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \right] dx$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \left[\frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \right] dx$

$$\int \left[\frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \right] dx = \int \left[\frac{(3x^2 + 1)(x^2 + x - 2) + 1}{x^2 + x - 2} \right] dx$$

$$= \int (3x^2 + 1) dx + \int \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} \right) dx$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Να αναλυθεί το κλάσμα σε άθροισμα δύο κλασμάτων:

$$\frac{5x - 10}{x^2 - 3x - 4}$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Να αναλυθεί το κλάσμα σε άθροισμα δύο κλασμάτων:

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4}$$

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Να αναλυθεί το κλάσμα σε άθροισμα δύο κλασμάτων:

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4}$$

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1)A}{x-4} + \frac{(x-4)B}{x+1} = \frac{Ax + A + x - 4B}{(x-4)(x+1)}$$



Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Να αναλυθεί το κλάσμα σε άθροισμα δύο κλασμάτων:

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4}$$

$$= \frac{(x+1)A}{x-4} + \frac{(x-4)B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx - 4B}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x + A - 4B}{(x-4)(x+1)} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+B=5 \\ A-4B=-10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=3 \end{array}$$



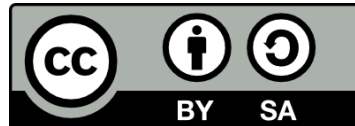
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.
«**Γενικά Μαθηματικά Ι**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη
δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

