



# Γενικά Μαθηματικά I

**Ενότητα 18:** Υπολογισμός Εμβαδού και Όγκου  
Από Περιστροφή  
Λουκάς Βλάχος  
Τμήμα Φυσικής



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε τον υπολογισμό μήκους καμπύλης, που γίνεται ως εξής:

Καρτεσιανές Συντεταγμένες: 
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Πολικές Συντεταγμένες: 
$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Παραμετρική Εξίσωση: 
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$



# Υπολογισμός Εμβαδού Επιφάνειας

Υπολογίζουμε το εμβαδό μεταξύ μιας καμπύλης  $y = f(x)$  και του άξονα  $Ox$  ως εξής:

$$dA = y(x)dx \Rightarrow A = \int_a^b dA = \int_a^b y(x)dx$$

Στοιχειώδες Εμβαδό



# Εφαρμογή 1

Έστω μια ράβδος μήκους  $L$ , με πυκνότητα  $\rho = \rho(x)$ . Να υπολογιστεί η μάζα της ράβδου.

Στοιχειώδης μάζα:  $dm = \rho(x)(S_0 dx)$



# Εφαρμογή 1

Έστω μια ράβδος μήκους  $L$ , με πυκνότητα  $\rho = \rho(x)$ . Να υπολογιστεί η μάζα της ράβδου.

Στοιχειώδης μάζα:  $dm = \rho(x)(S_0 dx)$

Υπολογισμός μάζας:

$$M = \int_0^L \rho(x) S_0 dx = S_0 \int_0^L \rho(x) dx$$



# Εφαρμογή 2

Η στοιχειώδης επιφάνεια  $dA$  που σχηματίζεται κατά τη μετατόπιση τόξου κατά  $r d\theta$ , σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$dA = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$





# Εφαρμογή 2

Η στοιχειώδης επιφάνεια  $dA$  που σχηματίζεται κατά τη μετατόπιση τόξου κατά  $r d\theta$ , σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$dA = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

Υπολογίζουμε την επιφάνεια κύκλου με αυτόν τον τρόπο:

$$A = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} a^2 2\pi = \pi a^2$$



# Εφαρμογή 3

Έστω κύκλος και καρδιοειδές τα οποία τέμνονται σε δύο σημεία.  
Υπολογίζουμε το εμβαδό μεταξύ των δύο σχημάτων ως εξής:



# Εφαρμογή 3

Έστω κύκλος και καρδιοειδές τα οποία τέμνονται σε δύο σημεία. Υπολογίζουμε το εμβαδό μεταξύ των δύο σχημάτων ως εξής:

Στοιχειώδες Εμβαδό: 
$$dA = \frac{1}{2} [r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)] d\theta$$

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)] d\theta$$



# Υπολογισμός Όγκου Από Περιστροφή

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός στερεού, περιστρέφοντας μια καμπύλη ώστε αυτή να διαγράψει το σχήμα του στερεού.

Για παράδειγμα, περιστρέφουμε μια έλλειψη ώστε να προκύψει ένα ελλειψοειδές:

$$\text{Στοιχειώδης Όγκος: } dV = \pi \cdot y(x)^2 dx$$

$$\text{Όγκος: } V = 2 \int_0^a dV = 2 \int_0^a \pi [y(x)]^2 dx$$



# Υπολογισμός Όγκου Από Περιστροφή

Τελικά, αντικαθιστώντας το  $y(x)$  από την εξίσωση του ελλειψοειδούς, έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^a \pi [y(x)]^2 dx = 2\pi \int_0^a \pi \left[ b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right]^2 dx \\ &= \frac{4\pi}{3} b^2 a \end{aligned}$$



# Υπολογισμός Όγκου Από Περιστροφή

Υπολογισμός όγκου από περιστροφή τυχαίας καμπύλης:

$$V = 2 \int_a^b \pi [y(x)]^2 dx$$



# Υπολογισμός Όγκου Από Περιστροφή: Εφαρμογή 1

Υπολογισμός όγκου ενός μπωλ, από περιστροφή καμπύλης:

Περιγράφουμε το μπωλ με την καμπύλη  $y = ax^2$



# Υπολογισμός Όγκου Από Περιστροφή: Εφαρμογή 1

Υπολογισμός όγκου ενός μπωλ, από περιστροφή καμπύλης:

Περιγράφουμε το μπωλ με την καμπύλη  $y = ax^2$

Στοιχειώδης Όγκος:  $dV = \pi x^2 dy$

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy$$





# Υπολογισμός Όγκου Από Περιστροφή: Εφαρμογή 1

Υπολογισμός όγκου ενός μπωλ, από περιστροφή καμπύλης:

Περιγράφουμε το μπωλ με την καμπύλη  $y = ax^2$

Στοιχειώδης Όγκος:  $dV = \pi x^2 dy$

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy = \pi \int_0^h \frac{y}{a} dy = \frac{\pi}{a} \frac{h^2}{2}$$



# Υπολογισμός Όγκου Από Περιστροφή: Εφαρμογή 2

Υπολογισμός όγκου από περιστροφή τομής καμπυλών:

Έστω οι καμπύλες  $y_1$  ,  $y_2$

Ο όγκος από την περιστροφή της επιφάνειας τομής τους θα είναι:

$$V = \int_a^b (\pi y_1^2 - \pi y_2^2) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$



# Υπολογισμός Επιφάνειας Από Περιστροφή: Εφαρμογή 3

Υπολογισμός επιφάνειας του στερεού από περιστροφή  
καμπύλης ως προς τον άξονα  $Ox$ :

Στοιχειώδες Εμβαδό:  $dE = (2\pi y)dS$

$$E = \int_a^b (2\pi y)dS$$



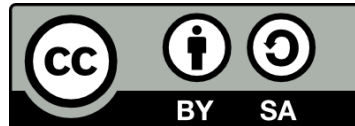
# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.  
«**Γενικά Μαθηματικά Ι**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη  
δικτυακή διεύθυνση: [http://opencourses.auth.gr/eclass\\_courses](http://opencourses.auth.gr/eclass_courses).



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης  
Θεσσαλονίκη, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

**ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ**

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

