ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 2η: Δεσμευμένη Πιθανότητα. Ολική Πιθανότητα-Θεώρημα Bayes, Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες.

Γεώργιος Ζιούτας
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δεσμευμένη Πιθανότητα. Ολική Πιθανότητα-Θεώρημα Bayes, Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Υπό Συνθήκη ή Δεσμευμένη Πιθανότητα
2. Ολική Πιθανότητα
3. Θεώρημα Bayes
4. Στατιστική Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες
   i. Στατιστικά Ανεξάρτητα Γεγονότα
   ii. Ανεξάρτητα και Αμοιβαίως Αποκλειόμενα Γεγονότα

2η Διάλεξη

Επανάληψη

Η πιθανότητα να συμβαίνει το Α και όχι το Β:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

Η πιθανότητα να συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα Α,Β:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Η πιθανότητα να συμβαίνει μόνο το Α και όχι Β,C:

$$P(A-(B\cup C))=P(A)-P((B\cup C)\cap A))=$$
$$=P(A)-P((B\cap A)\cup(C\cap A))=$$
$$=P(A)-(P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C))=$$
$$=P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

- **Ορισμός:** $P(A \setminus B)$, όπου η κάθετος συμβολίζει δεδομένο ή με την πληροφορία ότι συμβαίνει το γεγονός Β.

Με την πληροφορία ότι το αποτέλεσμα του πειράματος βρίσκεται μέσα στο σύνολο Β, το S περιορίζεται στο Β, δηλαδή ο νέος δειγματοχώρος είναι το σύνολο Β, και κατά συνέπεια το Α συμβαίνει όταν το αποτέλεσμα βρίσκεται στην τομή των Α και Β. Έτσι, σύμφωνα με την κλασική μέθοδο

$$P(A \setminus B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N(S)}}{\frac{N(B)}{N(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ή} \quad P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

και

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \setminus B) = P(A) \cdot P(B \setminus A)$$

Παράδειγμα 1

Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν 20 ανταλλακτικά. Τα 15 είναι καλά και τα 5 ελαττωματικά. Επιλέγουμε τυχαία δύο εξ αυτών, ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο ελαττωματικά;

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{C(5,2)}{C(20,2)}$$

Πολλαπλασιαστικός Κανόνας

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \cdot P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \setminus A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Παράδειγμα 2

Έστω ένα κουτί που περιέχει 2 άσπρες και 3 μαύρες μπάλες. Διαγωνίζονται 2 παίχτες ο Α και ο Β. Επιλέγουν τυχαία μία μπάλα με την σειρά, ξεκινώντας από τον Α, όποιος πάρει για πρώτη φορά την άσπρη κερδίζει το παιχνίδι. Ποια η πιθανότητα να κερδίσει ο Α παίκτης;

Ορίζουμε τα γεγονότα:

A_i={ο Α παίχτης στην i συνολική επιλογή παίρνει την άσπρη σφαίρα}

B_i={ο Β παίχτης στην i συνολική επιλογή παίρνει την άσπρη σφαίρα}

Το γεγονός να κερδίσει ο Α συμβολίζεται με πράξεις συνόλων:

$$W_A = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3)$$

Το οποίο σημαίνει ότι υπάρχουν δύο τρόποι να κερδίσει ο Α. Τρίτος τρόπος δεν υπάρχει γιατί το κουτί περιέχει μόνο 3 μαύρες μπάλες. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κανόνα πιθανότητας ένωσης και πολλαπλασιαστικό κανόνα,

$$P(W_A) = P(A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3)) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3) - P(A_1 \cap (\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3)) =$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{B_2} \setminus \overline{A_1}) \cdot P(A_3 \setminus \overline{A_1} \cap \overline{B_2}) - \varnothing = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} - \varnothing = \frac{3}{5}$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η πιθανότητα κατά τη ρίψη 6 φορές ενός ζαριού να βρούμε 6 διαφορετικά αποτελέσματα.

Ορίζουμε τα γεγονότα:

A_1={στην πρώτη ρίψη οιοδήποτε αριθμό},

A_i={στην i ρίψη αριθμό διάφορο από τις ρίψεις (i-1, i-2, …,1, για $i \geq 2$)}.

Με βάση τα προηγούμενα το γεγονός Α του οποίου ζητάμε την πιθανότητα συμβολίζεται με την εξής άλγεβρα συνόλων:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \cdot P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4 \setminus A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot$$

$$\cdot P(A_5 \setminus A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cdot P(A_6 \setminus A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$$

$$= \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6!}{6^6} = \frac{N(A)}{N(S)}$$

Αρχές Απαρίθμησης

- Σε ένα σύνθετο πείραμα ο δειγματικός χώρος S είναι το καρτεσιανό γινόμενο των κ απλών δειγματοχώρων

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_K$$

- Ο αριθμός δειγματοσημείων του S,

$$n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_K$$

Παράδειγμα 3, Παράδειγμα 4

Στην ρίψη νομίσματος και ζαριού ο δειγματοχώρος είναι:

$$S = \{\mathrm{K}, \Gamma\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} =$$
$$= \{(\mathrm{K}, 1), (\mathrm{K}, 2), \ldots, (\mathrm{K}, 6), (\Gamma, 1), (\Gamma, 2) \ldots, (\Gamma, 6)\}$$

n=2*6=12 δειγματοσημεία.

Πόσες οι δυνατές 13άδες του ΠΡΟΠΟ;

$$S = \{1, 2, X\} * \{1, 2, X\} * \{1, 2, X\} * \ldots 13 \varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma \ldots * \{1, 2, X\}$$

$$n = 3 * 3 * 3 * \ldots 13 \varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma \ldots * 3 = 3^{13}$$

Μεταθέσεις - Συνδυασμοί

Αν έχουμε n διαφορετικά πράγματα, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα βάλουμε σε σειρά;

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Αν έχουμε n διαφορετικά πράγματα και τα πάρουμε ανά k και τα βάλουμε στη σειρά, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε;

$$P(n.k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Αν έχουμε n διαφορετικά πράγματα και τα πάρουμε ανά k, με πόσους διαφορετικούς τρόπους γίνεται αυτό, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά;

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Παράδειγμα 5

Από τα 5 ψηφία 3,4,5,6,7 πόσους τριψήφιους μπορούμε να φτιάξουμε, όπου μπορεί να επαναλαμβάνονται τα ψηφία;

Καρτεσιανό γινόμενο:

$$S=(3,4,5,6,7)\times(3,4,5,6,7)\times(3,4,5,6,7)=$$

$$=\{(333,334,\ldots,777)\}$$

Άρα: $n=5^3$

Παράδειγμα 6

Από τα 5 ψηφία 3,4,5,6,7 πόσους τριψήφιους μπορούμε να φτιάξουμε, όπου δεν επαναλαμβάνονται τα ψηφία;

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Παράδειγμα 7

Έχουμε 10 παίκτες, πόσες διαφορετικές ομάδες καλαθοσφαίρισης μπορούμε να φτιάξουμε;

$$C(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

Αν μας ενδιαφέρει και η σειρά (οι παίκτες μπορούν να αλλάξουν θέση):

$$C(10,5)\cdot 5!$$

$$P(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$$

Παράδειγμα 8

Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν 20 ανταλλακτικά. Τα 15 είναι καλά και τα 5 ελαττωματικά. Επιλέγουμε τυχαία τρία εξ αυτών, ποια η πιθανότητα να είναι και τα τρία ελαττωματικά;

1ος τρόπος:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{C(15,3)}{C(20,3)}$$

2ος τρόπος:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \cdot P(A_3 \setminus A_1 \cdot A_2) =$$

$$= \frac{15}{20}\left(\frac{14}{19}\right)\left(\frac{13}{18}\right)$$

Παράδειγμα 9

Επιλέγουμε 3 σφαίρες από 5 με αύξων αριθμό αντιστοίχισης και έχουμε τρία γεγονότα για τον μέγιστο αύξων αριθμό.

$$A = \{\max\_3\} = \{123\}$$

$$B = \{\max\_4\} = \{124, 134, 234\}$$

$$C = \{\max\_5\} = \{125, 245, 345, 145\}$$

Τα γεγονότα του δειγματικού χώρου είναι:

$$S = \{123, 124, 125, 234, 245, 345, 135, 145, 134\}$$

Παράδειγμα 10

Μία ράβδος σπάει τυχαία σε ένα σημείο. Ποια η πιθανότητα το 1ο κομμάτι να είναι μεγαλύτερο από το 2ο;

$$S = \{a_1, a_2\}$$

$$A = \{a_2\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Μία ράβδος σπάει τυχαία σε ένα σημείο. Ποια η πιθανότητα ένα από τα δύο να είναι μεγαλύτερο από $\frac{a}{4}$;

$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$A = \{a_1, a_4\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4}$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης