ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 2η: Δεσμευμένη Πιθανότητα. Ολική Πιθανότητα-Θεώρημα Bayes, Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες.

Γεώργιος Ζιούτας
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δεσμευμένη Πιθανότητα. Ολική Πιθανότητα-Θεώρημα Bayes, Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Υπό Συνθήκη ή Δεσμευμένη Πιθανότητα
2. Ολική Πιθανότητα
3. Θεώρημα Bayes
4. Στατιστική Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες
   i. Στατιστικά Ανεξάρτητα Γεγονότα
   ii. Ανεξάρτητα και Αμοιβαίως Αποκλειόμενα Γεγονότα

3η Διάλεξη

ΟΛΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Έστω ότι τα γεγονότα A_1, A_2, A_3 ... και A_K, αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου S,και ένα άλλο γεγονός Β τέμνει τα γεγονότα της διαμέρισης, δηλαδή,

$$B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3)\cup\ldots\cup(B\cap A_K)$$

Η πιθανότητά του Β προκύπτει όπως ακολουθεί:

$$\begin{aligned}P(B)&=P[(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3)\cup\ldots\cup(B\cap A_K)]=\\&=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+\ldots+P(B\cap A_K)=\\&=P(A_1)\cdot P(B\setminus A_1)+\ldots+P(A_K)\cdot P(B\setminus A_K)\end{aligned}$$

Κανόνας ολικής πιθανότητας

$$P(B)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)\cdot P(B\setminus A_i)$$

Παράδειγμα 1

Σε μία βιομηχανία η μηχανή M_1 παράγει το 60% των ανταλλακτικών και η μηχανή M_2 το 40%. Η πιθανότητα το ανταλλακτικό να είναι ελαττωματικό είναι 5% και 10% για τις μηχανές M_1 και M_2 αντίστοιχα.

Ποια η πιθανότητα ένα ανταλλακτικό να είναι ελαττωματικό;

Είναι γνωστές οι πιθανότητες:

$$P(M_1) = 0.6, \quad P(M_2) = 0.4,$$

$$P(E \setminus M_1) = 0.05, \quad P(E \setminus M_2) = 0.10$$

Στη συνέχεια εφαρμόζω ολική πιθανότητα,

$$P(E) = P(M_1) \cdot P(E \setminus M_1) + P(M_2) \cdot P(E \setminus M_2) =$$

$$= 0,60(0,05) + 0,04(0,10) = 0,03 + 0,04 = 0,07$$

συνέχεια…

Αν το ανταλλακτικό είναι ελαττωματικό ποια η πιθανότητα να παρήχθει από την μηχανή Μ1;

Θεώρημα Bayes

$$P(M_1 \setminus E) = \frac{P(M_1 \cap E)}{P(E)} =$$

$$= \frac{P(M_1) \cdot P(E \setminus M_1)}{P(E)} = \frac{0,60 \cdot (0,05)}{0,07} = \frac{0,03}{0,07} = \frac{3}{7}$$

Παράδειγμα 2

Έστω 3 κάλπες A_1, A_2, A_3 οι οποίες περιέχουν σφαίρες, η πρώτη δύο λευκές η δεύτερη μία μαύρη και μία λευκή και η τρίτη 2 μαύρες. Επιλέγουμε τυχαία μία κάλπη και στη συνέχεια επιλέγουμε από αυτήν τυχαία μία σφαίρα.

Ποια η πιθανότητα η σφαίρα που θα επιλέξουμε να είναι λευκή;

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A \setminus A_1) + P(A_2)\cdot P(A \setminus A_2) + P(A_3)\cdot P(A \setminus A_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(1) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{1}{3}$$

Ποια η πιθανότητα η άσπρη σφαίρα να προέρχεται από την 1η κάλπη;

$$P(A_1 \setminus A) = \frac{P(A_1)\cdot P(A \setminus A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot(1)}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Παράδειγμα 3

Έστω ένα σύστημα ψηφιακού δέκτη-πομπού, το οποίο δέχεται σήματα 0 ή 1 και τα εκπέμπει σωστά 0 ή 1 αντίστοιχα με κάποια πιθανότητα. Ειδικότερα, τα ποσοστά των σημάτων 0 ή 1 που δέχεται είναι π_0 και π_1 αντίστοιχα. Ένα σήμα 0 το μεταδίδει σωστά ως 0 με πιθανότητα q_0 και λανθασμένα ως 1 πιθανότητα p_0. Παρόμοια, ένα σήμα 1 το μεταδίδει σωστά ως 1 με πιθανότητα q_1 και λανθασμένα ως 0 με πιθανότητα p_1.

Ποια η πιθανότητα ένα σήμα που εκπέμπεται να είναι 1;

Συμβολίζουμε με X, Y τα σήματα που δέχεται και εκπέμπει αντίστοιχα το σύστημα. Έτσι ορίζονται τα ακόλουθα γεγονότα,

$$A_0 = \{X = 0\} \quad P(A_0) = \Pi_0 \qquad B = \{Y = 1\} \quad P(B) = P(B \setminus A_0) \cdot P(A_0) + P(B \setminus A_1) \cdot P(A_1) =$$

$$A_1 = \{X = 1\} \quad P(A_1) = \Pi_1 \qquad = \Pi_0 \cdot (p_0) + \Pi_1 \cdot (q_1)$$

Εκπέμπεται το σήμα 1, ποια η πιθανότητα να ήταν πράγματι 1;

$$P(A_1 \setminus B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B \setminus A_1)}{P(B)} = \frac{\Pi_1 \cdot q_1}{\Pi_0 \cdot p_0 + \Pi_1 \cdot q_1}$$

Παράδειγμα 4

Έστω μία πόλη τροφοδοτείται με ρεύμα από 2 μονάδες παραγωγής A και B. Η πιθανότητα βλάβης για την κάθε μονάδα είναι η ίδια ίση με 10%. Η πιθανότητα να παρουσιάσουν βλάβη και οι δύο μονάδες είναι 2%. Η πόλη έχει ικανοποιητική παροχή ρεύματος με πιθανότητα 0,40, 0,70 και 0,90 στις περιπτώσεις ταυτόχρονης βλάβης των μονάδων, μόνο σε μία μονάδα βλάβη, καμία βλάβη αντίστοιχα.

Ποια η πιθανότητα ικανοποιητικής παροχής της πόλης ;

$$P(A) = P(B) = 0{,}10$$

$$P(A \cap B) = 0{,}02$$

$$A_0 = \{\text{το\_γεγονός\_καμία\_να\_μην\_έχει\_βλάβη}\}$$

$$A_1 = \{\text{το\_γεγονός\_μία\_να\_έχει\_βλάβη}\}$$

$$A_2 = \{\text{το\_γεγονός\_και\_οι\_δύο\_να\_έχουν\_βλάβη}\}$$

$$P(A_0) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0{,}20 - 0{,}02) = 0{,}82$$

$$P(A_1) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0{,}20 - 0{,}04 = 0{,}16$$

$$P(A_2) = P(A \cap B) = 0{,}02$$

$$P(E) = P(A_0) \cdot P(E \setminus A_0) + P(A_1) \cdot P(E \setminus A_1) + P(A_2) \cdot P(E \setminus A_2) =$$

$$= 0{,}82(0{,}90) + 0{,}16(0{,}70) + 0{,}02(0{,}40)$$

Παράδειγμα 5

Σε μία παραγωγή το 80% των σιδηροδοκών είναι καλές και το 20% ελαττωματικές.

Κάθε σιδηροδοκός υπόκειται σε έλεγχο και αν ο έλεγχος είναι θετικός η σιδηροδοκός καταστρέφεται. Η πιθανότητα ο έλεγχος να είναι θετικός όταν είναι ελαττωματική η σιδηροδοκός είναι 80%, ενώ όταν είναι καλή 10%.

Ποιο ποσοστό σιδηροδοκών θα καταστραφεί;

Ορίζω τα γεγονότα Θ={θετικός έλεγχος}, Ε={ελαττωματική σιδηροδοκός}, Κ={καλή σιδηροδοκός}

$$P(\Theta \setminus \mathrm{E}) = 0,80$$

$$P(\Theta \setminus \mathrm{K}) = 0,10$$

$$P(\Theta) = P(\mathrm{E})P(\Theta \setminus \mathrm{E}) + P(\mathrm{K})P(\Theta \setminus \mathrm{K}) =$$

$$= 0,20(0,80) + 0,80(0,10) = 0,24$$

συνέχεια...

Από το 24% που καταστρέφονται ποιο είναι το ποσοστό των καλών σιδηροδοκών;

$$P(\mathrm{K} \setminus \Theta) = \frac{0,8 \cdot (0,10)}{0,24} = \frac{1}{3}$$

Έστω διενεργούνται 2 έλεγχοι, ποιο ποσοστό καταστρέφεται;

$$P(\Theta_1 \cap \Theta_2) = P(\mathrm{K}) \cdot P(\Theta_1 \cap \Theta_2 \setminus \mathrm{K}) + P(\mathrm{E}) \cdot P(\Theta_1 \cap \Theta_2 \setminus \mathrm{E}) =$$

$$= 0,80 \cdot P(\Theta_1 \setminus \mathrm{K}) \cdot P(\Theta_2 \setminus \Theta_1 \setminus \mathrm{K}) + 0,20 \cdot P(\Theta_1 \setminus \mathrm{E}) \cdot P(\Theta_2 \setminus \Theta_1 \setminus \mathrm{E})$$

$$= 0,80 \cdot 0,10 \cdot (0,10) + 0,20 \cdot 0,80 \cdot (0,80) \square\ 0,13$$

$$P(A \cup B \setminus C) = P(A \setminus C) + P(B \setminus C) - P(A \cap B \setminus C)$$

Ποια η πιθανότητα ότι η σιδηροδοκός που καταστρέφεται είναι καλή;

$$P(\mathrm{K} \setminus \Theta_1 \cap \Theta_2) = \frac{0,80 \cdot (0,10) \cdot (0,10)}{0,13} \square\ 0,06$$

Πρόβλημα 1

Ένα γράμμα βρίσκεται μέσα σε ένα από τα 5 συρτάρια με πιθανότητα q. Ψάξαμε σε τέσσερα από τα συρτάρια και δεν βρέθηκε το γράμμα. Ποια η πιθανότητα να βρεθεί στο πέμπτο συρτάρι;

Ορίζουμε τα ακόλουθα γεγονότα,

A_i (με i=1,2,3,4,5)={το γράμμα βρίσκεται μέσα στο i συρτάρι}

$$P(A_i) = \frac{q}{5}$$

$$P(A_5 \setminus \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = \frac{P(A_5) \cdot P(\overline{A_1} \setminus A_5) \ldots}{1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4})} = \frac{\frac{q}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 - 4 \cdot \frac{q}{5}}$$

Πρόβλημα 2

Έστω ένα κιβώτιο περιέχει 15 καλά ανταλλακτικά και 5 ελαττωματικά. Επιλέγουμε από το κιβώτιο τυχαία δύο ανταλλακτικά. Ποια η πιθανότητα το 2ο να είναι ελαττωματικό ;

Ορίζω τα γεγονότα A_1 και A_2 τα οποία παριστάνουν ότι το πρώτο ανταλλακτικό ή το δεύτερο αντίστοιχα είναι ελαττωματικό.

$$P(A_2) = \frac{N(A_2)}{N(S)} = \frac{C(5,2) + (15 \cdot 5)}{C(20,2)}$$

Ή ισοδύναμα

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2 \setminus A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 \setminus \overline{A_1})$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης