ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 2η: Δεσμευμένη Πιθανότητα. Ολική Πιθανότητα-Θεώρημα Bayes, Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες.

Γεώργιος Ζιούτας
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δεσμευμένη Πιθανότητα. Ολική Πιθανότητα-Θεώρημα Bayes, Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Υπό Συνθήκη ή Δεσμευμένη Πιθανότητα
2. Ολική Πιθανότητα
3. Θεώρημα Bayes
4. Στατιστική Ανεξαρτησία και Συναφείς Έννοιες
    i. Στατιστικά Ανεξάρτητα Γεγονότα
    ii. Ανεξάρτητα και Αμοιβαίως Αποκλειόμενα Γεγονότα

4η Διάλεξη

Έστω τα Α και Β ξένα μεταξύ τους.

$$P(B) \neq 0$$

$$P(A) \neq 0$$

$$P(B \setminus A) = 0$$

Για γεγονότα Α και Β, όπου το Α υποσύνολο του Β.

$$P(B) < 1$$

$$P(B \setminus A) = 1$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

Δύο γεγονότα Α και Β είναι ανεξάρτητα όταν ισχύει ότι:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B \setminus A) = P(B)$$

$$P(A) \neq 0 \qquad P(B) \neq 0$$

Τρία γεγονότα Α, Β και C είναι ανεξάρτητα όταν είναι ανά 2 ανεξάρτητα και ανά 3 ανεξάρτητα, δηλαδή όταν ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \end{array}\right\} P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Παράδειγμα

Έστω 3 αντικείμενα στη σειρά Α,Β,Γ.

W={το γεγονός το Β να βρίσκεται δεξιά του Α}

R={το γεγονός το Γ να βρίσκεται δεξιά του Α}

$$S=\{\mathrm{AB\Gamma}, \mathrm{A\Gamma B}, \mathrm{BA\Gamma}, \mathrm{B\Gamma A}, \mathrm{\Gamma AB}, \mathrm{\Gamma BA}\}$$

$$W=\{\mathrm{AB\Gamma}, \mathrm{A\Gamma B}, \mathrm{\Gamma AB}\}$$

$$R=\{\mathrm{AB\Gamma}, \mathrm{A\Gamma B}, \mathrm{BA\Gamma}\}$$

$$W \cap R=\{\mathrm{AB\Gamma}, \mathrm{A\Gamma B}\}$$

$$\underbrace{P(W \cap R)=\frac{2}{6} \qquad P(W)=\frac{1}{2} \qquad P(R)=\frac{1}{2}}$$

$$P(W \cap R) \neq P(W) \cdot P(R)$$

Άρα τα W, R δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Παραδείγματα

Κάθε γεγονός A με το S είναι ανεξάρτητα.

$$P(A \cap S) = P(A) \cdot P(S)$$
$$P(A) = P(A)$$
$$P(A) \neq 0$$
$$P(S) \neq 0$$

Έστω μία ότι μία δοκός σπάει τυχαία σε κάποιο σημείο. Ορίζουμε τα γεγονότα

A={ η δοκός σπάει σε ένα σημείο x στο πρώτο ήμισυ}

$$B = \{\eta\_\delta o\kappa\acute{o}\varsigma\_\sigma\pi\acute{\alpha}\varepsilon\iota\_\sigma\tau o\_\delta\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho o\_\acute{\eta}\mu\iota\sigma\upsilon\}$$

Είναι τα γεγονότα A και B ανεξάρτητα;

Εδώ μπορούμε να διαπιστώσουμε την ανεξαρτησία από την ακόλουθη εξίσωση,

$$P(B) = \frac{1}{2} \neq P(B \setminus A) = 0$$
$$P(A) = \frac{1}{\infty} = 0$$
$$P(B \setminus A) = 0$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

“0=0”. Η εξίσωση ισχύει αλλά λογικά είναι εξαρτημένα. Η εξίσωση θα τα όριζε ως ανεξάρτητα αν ίσχυε ότι τα *P(A)* και *P(B)* ήταν διάφορα του “0”.

Παράδειγμα

Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα, τα $\overline{A}, B$ είναι ανεξάρτητα;

1ος τρόπος

$$P(A\cap \overline{B}) = P(A)\cdot P(\overline{B}\setminus A) =$$

$$= P(A)\cdot(1-P(B\setminus A)) = P(A)(1-P(B)) = P(A)\cdot P(\overline{B})$$

2ος τρόπος

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$$

Πρόβλημα

Αν έχουμε ένα τετράεδρο όπου η μία έδρα έχει Πράσινο (γεγονός Π) η άλλη Κόκκινο (γεγονός Κ) η άλλη Μαύρο (γεγονός Μ) και η άλλη και τα τρία χρώματα (γεγονός ΠΚΜ). Αν το αφήσουμε τυχαία να πέσει στο έδαφος και έρθει μία έδρα του τετραέδρου σε επαφή με το έδαφος. Είναι τα γεγονότα αυτά ανά δύο ανεξάρτητα;

Πρόβλημα

Έστω ένα βάρος W που θέλουμε να ανυψώσουμε με το σχοινί A, στην περίπτωση που αυτό κοπεί ενεργεί ένα εφεδρικό σχοινί B.

$$A = \{\nu\alpha\_\kappa o\pi\varepsilon\acute{\iota}\_\tau o\_A\}$$

$$B = \{\nu\alpha\_\kappa o\pi\varepsilon\acute{\iota}\_\tau o\_\mathrm{B}\} \qquad P(A) = 0,04 \quad P(B \setminus A) = 0,20 \quad P(B \setminus \overline{A}) = 0$$

Ποια η πιθανότητα ανύψωσης του βάρους W;

$$R = \overline{A} \cup (A \cap \overline{B})$$

Να μη κοπεί το A ή να κοπεί το A και να μη κοπεί το B.

$$P(R) = P(\overline{A}) + P(A \cap \overline{B}) =$$

$$= 0,96 + P(A) \cdot P(\overline{B} \setminus A) =$$

$$= 0,96 + 0,04(0,80)$$

Πρόβλημα Κίνησης Σωματιδίου

Ένα σωματίδιο κινείται από το 0 στο 1 με νόμο κίνησης S_0, όπως δίνεται παρακάτω.

Το ίδιο σωματίδιο επιστρέφει από το 1 στο 0 με νόμο κίνησης S_1 , όπως δίνεται παρακάτω. Ποια η πιθανότητα κάποια στιγμή το σωματίδιο να βρίσκεται στο πρώτο ήμισυ της διαδρομής; Με S_0, S_1 συμβολίζουμε τις αποστάσεις του σωματιδίου από τα σημεία 0 και 1 καθώς κινείται από το 0 στο 1 και από το 1 στο 0 αντίστοιχα, ενώ t παριστάνει τον χρόνο από την εκκίνησή του από τα σημεία 0 ή 1 αντίστοιχα. Η πιθανότητα εκτιμάται με την κλασική μέθοδο , δεδομένου ότι ο συνολικός χρόνος κίνησης όπως προκύπτει από τους νόμους κίνησης είναι 2 λεπτά.

$$S_0 = t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} = t^3 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{2}$$

Παράδειγμα Διακοπτών

Σε ένα κύκλωμα ρεύμα διέρχεται από το Α στο Β είτε από μία γραμμή η οποία ελέγχεται από έναν διακόπτη Δ_1 ή από μία άλλη παράλληλη γραμμή η οποία ελέγχεται από δύο διακόπτες Δ_2 και Δ_3 εν σειρά. Αν R είναι το γεγονός της διακοπής ρεύματος από το Α στο Β και Δ_i συμβολίζει ότι ο ι διακόπτης είναι ανοικτός το γεγονός R συμβολίζεται ως εξής:

$$R = \{\Delta\iota\alpha\kappa o\pi\acute{\eta}\_\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha\tau o\varsigma\}$$

$$R = \Delta_1 \bigcap (\Delta_2 \cup \Delta_3) = (\Delta_1 \bigcap \Delta_2) \cup (\Delta_1 \bigcap \Delta_3)$$

Αν η πιθανότητα διακοπής του Δ_i διακόπτη είναι p, $P(\Delta_i)=p$,

τότε,

$$P(R) = P[(\Delta_1 \bigcap \Delta_2) \cup (\Delta_1 \bigcap \Delta_3)] = P(\Delta_1) \cdot P(\Delta_2) + P(\Delta_1) \cdot P(\Delta_3) = P(\Delta_1 \bigcap \Delta_2 \bigcap \Delta_3) = 2p^2 - p^3$$

Παράδειγμα Διακοπτών συνέχεια…

Γνωρίζοντας ότι έχουμε διακοπή ρεύματος, ποια η πιθανότητα ο διακόπτης 1 να είναι ανοιχτός ;

$$(\Delta_1 \bigcap \Delta_2) \cup (\Delta_1 \bigcap \Delta_3) \bigcap \Delta_1$$

$$P(\Delta_1 \setminus R) = \frac{P(\Delta_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R)}{P(R)}$$

Γνωρίζοντας ότι έχουμε διακοπή ρεύματος, ποια η πιθανότητα ο διακόπτης 2 να είναι ανοιχτός ;

$$R \bigcap \Delta_2$$

$$P(\Delta_2 \setminus R) = \frac{P[(\Delta_1 \bigcap \Delta_2) \cup (\Delta_1 \bigcap \Delta_2 \bigcap \Delta_3)]}{P(R)} = \frac{P(\Delta_1 \bigcap \Delta_2) + P(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3) - P(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)}{P(R)} = \frac{P(\Delta_1) \cdot P(\Delta_2)}{P(R)} = \frac{p^2}{2p^2 - p^3}$$

Παράδειγμα

Ν σημεία ρίχνονται τυχαία μέσα σε ένα κύκλο με ακτίνα την *τετραγωνική ρίζα* του Ν. Αν Α είναι μία περιοχή μέσα στον κύκλο, ποια η πιθανότητα κανένα να μην πέσει μέσα σε αυτήν;

Η πιθανότητα να πέσει στην περιοχή Α είναι: $\dfrac{A}{\pi \cdot \lambda^2 \cdot N}$

Η πιθανότητα να μη πέσει στην περιοχή Α είναι: $\left(1 - \dfrac{A}{\pi \cdot \lambda^2 \cdot N}\right)$

Η πιθανότητα να μην πέσει κανένα από τα Ν βλήματα στην περιοχή Α είναι:

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_N\right) = \left(1 - \frac{A}{\pi \cdot \lambda^2 \cdot N}\right)^N$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$$

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{A}{\pi \cdot \lambda^2 \cdot N}\right)^N = e^{-\frac{A}{\pi \cdot \lambda^2}}$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης