



Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 3^η: Τυχαίες Μεταβλητές, Συναρτήσεις Κατανομής
Πιθανότητας.

Γεώργιος Ζιούτας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Α.Π.Θ.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Τυχαίες Μεταβλητές, Συναρτήσεις Κατανομής Πιθανότητας.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Έννοια Τυχαίας Μεταβλητής.
2. Συναρτήσεις Μάζας ή Πυκνότητας Πιθανότητας.
 - i. Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή
 - ii. Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή
3. Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας
 - i. Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή
 - ii. Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή
 - iii. Ιδιότητες Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής $F(x)$
4. Μικτή Τυχαία Μεταβλητή



5^η Διάλεξη



Τυχαίες Μεταβλητές

$X, Y, Z, W \rightarrow$ τυχαίες _ μεταβλητές

$x, y, z, w \rightarrow$ τιμές

Γενικά η **τυχαία μεταβλητή** X είναι η συνάρτηση που απεικονίζει τον δειγματικό χώρο S στο χώρο των πραγματικών αριθμών.

$$X : S \rightarrow \mathcal{R}_x$$

Όταν πρόκειται για ποιοτικά ενδεχόμενα ή αριθμητικές ποσότητες τότε η μεταβλητή X απεικονίζεται στον εαυτό της και πρόκειται για ταυτότητα.

Παράδειγμα

Έστω:

$$S = \{x / x \in \mathcal{R}_x\}$$

Όπου η **μεταβλητή** x : ο χρόνος καλής λειτουργίας μίας λυχνίας.



Παράδειγμα ρίψης ενός νομίσματος 3 φορές

S : δειγματικός _ χώρος

X : μονοδιάστατη _ τυχαία _ μεταβλητή

(αντιστοιχεί _ σε _ έναν _ μόνον _ αριθμό) _ (αριθμός _ κεφαλών)

$R_X : \{0,1,2,3\}$ _ τιμές _ της _ τυχαίας _ μεταβλητής _ X

X

$S \rightarrow R_X$

ΚΚΚ \rightarrow 3

ΚΚΓ \rightarrow 2

ΚΓΚ \rightarrow 2

ΓΚΚ \rightarrow 2

ΚΓΓ \rightarrow 1

ΓΚΓ \rightarrow 1

ΓΓΚ \rightarrow 1

ΓΓΓ \rightarrow 0



Γεγονότα Τυχαίας Μεταβλητής

Ορίζουμε ως γεγονότα τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή κατά το πείραμα τύχης.

$$\text{Δηλαδή: } \{X = x\} = A = \{s / X(s) = x\}$$

$$P(X = 2) = P(A) = \frac{3}{8}$$

$$\{X \leq x\} = A = \{s / X(s) \leq x\}$$

$$\{x_1 \leq X \leq x_2\} = A = \{s / x_1 < X(s) \leq x_2\}$$

$$P(\{X \leq 1\}) = P(A) = \frac{4}{8}$$



Διακριτή-Συνεχής X

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή X

- Πεπερασμένο πλήθος τιμών $X=\{0,1,2,3\}$
- Άπειρο αλλά αριθμήσιμο πλήθος τιμών $X=\{0,1,2,3, \dots,\dots\}$

Συνεχής τυχαία μεταβλητή X

- Το πεδίο τιμών είναι άπειρο μη αριθμήσιμο, είναι τμήμα των πραγματικών αριθμών, $X=\{x|E \leq x \leq M\}$



Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή X

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

Παράδειγμα

ρίψης νομίσματος τρεις φορές

$X = \{\text{αριθμός κεφαλών}\}$

Πεδίο Τιμών $X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{1}{8} \quad P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{8} \quad P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

Ιδιότητες

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{x_i} P(X = x_i) = 1$$



Παράδειγμα

Ρίψη νομίσματος μέχρι εμφάνισης K για πρώτη φορά. Η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει τον αριθμό ρίψης του νομίσματος.

$$S = \{E, KE, KKE, KKKE, \dots\} \rightarrow X = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

$$P(E) = p \Rightarrow P(K) = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 2) = (1 - p) \cdot p$$

$$P(X = 3) = (1 - p)^2 \cdot p$$

$$P(X = x_i) = (1 - p)^{x_i - 1} \cdot p$$

$$\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{x_i} P(X = x_i) = 1 \Rightarrow p + (1 - p) \cdot p + (1 - p)^2 \cdot p + \dots = p \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1$$

Παρατήρηση

Σε μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με άπειρο αριθμό τιμών, αποκλείεται οι πιθανότητες των τιμών της να είναι ίσες, όσο μικρές και αν είναι.



Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή X

- Η μάζα πιθανότητας αντιστοιχεί σε άπειρα μη αριθμήσιμα σημεία

$$P(X = x) = 0$$

Όμως το γεγονός B δεν είναι το κενό σύνολο, δεν είναι αδύνατον,

$$\{X = x\} = B = \{x\}$$

- Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

– Ιδιότητες

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = 1$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



Παράδειγμα

Έστω

$$X = \{\text{χρόνος}_\text{καλής}_\text{λειτουργίας}\}$$

- Με Συνάρτηση πυκνότητας Πιθανότητας Εκθετικής Μορφής

$$f(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\int_0^{\infty} Ae^{-\frac{1}{2}x} dx = 1 \Rightarrow 2A[e^{-\frac{1}{2}x}]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$



Αθροιστική Συνάρτηση (ή) Κατανομή Πιθανότητας $F(X)$

Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Παράδειγμα η ρίψη του νομίσματος 3 φορές,

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

Η αθροιστική κατανομή $F(X)$ είναι εξ' ορισμού ίση με 1 πέραν της maximum τιμής.

Μαθηματικά ορίζεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$



Παράδειγμα

Αθροιστική Κατανομή Εκθετικής Συνάρτησης.

$$F(x) = P(X = x) = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}u} du = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$$

Η αθροιστική κατανομή είναι εξ' ορισμού ίση με 1 πέραν της maximum τιμής.



Παράδειγμα

Αθροιστικής Κατανομής Πιθανότητας,
ισοπίθανης ή ομοιόμορφης συνάρτησης πυκνότητας
πιθανότητας $f(x)$.

Ομοιόμορφη συνάρτηση, σταθερή

$$f(x) = \frac{c}{\beta - \alpha}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} c dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

Αθροιστική Κατανομή

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta - \alpha} dX = \frac{X - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < \alpha \\ \frac{X - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < X \leq \beta \\ 1 & X \geq \beta \end{cases}$$



Βασικές Ιδιότητες $F(x)$

1. $F(\infty)=1$ και $F(-\infty) = 0$
2. Η $F(X)$ αύξουσα , δηλαδή ισχύει για $x_1 \leq x_2$

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

3. $F(X) = F(X^+)$

$$F(X^+) = \lim_{\delta\varepsilon \rightarrow 0} F(X + \delta\varepsilon)$$

4. $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$$

5. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$



Τυχαίες Μεταβλητές Μικτού Τύπου

$$F(X) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) + \int_{-\infty}^x f(u) du$$



Παράδειγμα

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(X)$.

Για να βρω την $f(X)$ παραγωγίζω την αθροιστική $F(x)$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X \leq -2 \\ 0,25 & -2 \leq X < 2 \\ 0,125X & 2 \leq X < 4 \\ 0,5 & 4 \leq X < 6 \\ 1 & X \geq 6 \end{cases} \quad f(X) = \begin{cases} 0 & X < -2 \\ P(X = -2) = 0,25 & X = -2 \\ \frac{dF(x)}{dx} = 0 & -2 \leq X < 2 \\ 0,125 & 2 \leq X \leq 4 \\ 0 & 4 < X \leq 6 \\ P(X = 6) = 0,5 & X = 6 \\ 1 & X > 6 \end{cases}$$

$$P(X \leq 3) = P(X = -2) + \int_{-\infty}^3 f(X) dX = 0,25 + \int_2^3 0,125 dX = 0,25 + 0,125 = 0,375$$

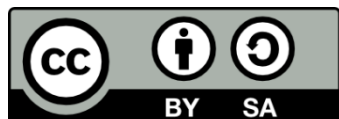




Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-
Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ