ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 4η: Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών.

Γεώργιος Ζιούτας
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μέση Τιμή.
2. Διακύμανση.
3. Τυπική Τυχαία Μεταβλητή.
4. Ανισότητα Chebyshev.
5. p-Ποσοστιαίο Σημείο, Διάμεσος, Επικρατέστερη Τιμή.
6. Άλλες Παράμετροι και Ροπές.

$7^η$ Διάλεξη

$X,\qquad f(X)\qquad P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

Χαρακτηριστικά Τυχαίας Μεταβλητής X

1. Μέση Τιμή
2. Διακύμανση
3. Διάμεσος
4. Επικρατέστερη Τιμή

Αν γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά έχουμε χρήσιμες πληροφορίες για το πεδίο τιμών της μεταβλητής

Μαθηματική Ελπίδα - Μέση Τιμή

Ορισμός $$E(X) = \mu_X = \sum_i x_i P(X = x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} X f(X) dX$$

Παράδειγμα 1

$$f(X) = \lambda \cdot e^{-\lambda X}$$

Η μέση λειτουργία του εξαρτήματος:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} X \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda X} dX = [-X \cdot e^{-\lambda X}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda X} dX = \frac{1}{\lambda}$$

Η μέση τιμή στην εκθετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι το αντίστροφο της παραμέτρου,

$$\frac{1}{\lambda}$$

Παράδειγμα 2

Η ρίψη ζαριού:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

Ιδιότητες $E(X)$

Έστω X τυχαία μεταβλητή, Η ποσότητα $\alpha X + \beta$

είναι επίσης τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή,

$$E(\alpha X + \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha X + \beta) \cdot f(X) dX = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X f(X) dX + \beta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) dX = \alpha \cdot E(X) + \beta \cdot 1 = \alpha \cdot E(X) + \beta$$

Γενικά για μία συνάρτηση g της X ισχύει,

$$Y = g(X) \Rightarrow f_Y(g) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Y \cdot f(Y) dY$$

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X) \cdot f(X) dX$$

Παράδειγμα

Έστω η τυχαία μεταβλητή X παίρνει ισοπίθανα τιμές από 0 μέχρι 1.

$$E(X) = ?$$

$$E(X) = \int_0^1 c \cdot X dX = \int_0^1 1 \cdot X dX = 0,5$$

$$Y = X^2$$

$$E(Y) = E(X^2) = ?$$

$$E(X^2) = \int_0^1 X^2 \cdot 1 \cdot dx = \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Διασπορά-Διακύμανση

Παράδειγμα

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y που ακολουθούν ομοιόμορφες κατανομές με πεδίο τιμών

$$X = [-1,1]$$

$$Y = [-1000,1000]$$

$$E[X] = 0$$

$$E[Y] = 0$$

Έτσι η πληροφορία της μέσης τιμής δεν είναι αρκετή. Άρα θα χρειαστούμε ένα μέτρο της διασποράς των τιμών της X από την μέση τιμή της μ.

Απόκλιση

$$E(X-\mu) = 0 \quad E(|X-\mu|)$$

Διακύμανση: $Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sigma_X^2$

Τυπική απόκλιση: $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$

Διακύμανση X $VAR(X)=\sigma_X^2$

Τυπική απόκλιση $\sigma_X=\sqrt{\sigma_X^2}$ (φυσικές μονάδες)

Ιδιότητες

$$VAR(X)=E[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(X-\mu)^2\cdot f(X)dX$$

$$VAR(X)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2-2\mu X+\mu^2)]=\ldots=E(X^2)-\mu^2$$

$$VAR(\alpha X+\beta)=E[(\alpha X+\beta-(\alpha\cdot\mu+\beta^2))^2]=\alpha^2\cdot VAR(X)+0$$

Παράδειγμα

$$X:f(X)=\lambda\cdot e^{-\lambda X}$$

$$VAR(X)=E(X^2)-\mu^2=\int_0^{+\infty}X^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda X}dX=-\frac{1}{\lambda^2}+2\cdot\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

Τυποποιημένη Τυχαία Μεταβλητή

Παραδείγματος χάριν, για να συγκρίνουμε τις τιμές δύο διαφορετικών πληθυσμών, έστω το εισόδημα X, Y των πολιτών δύο χωρών αντίστοιχα, κάνουμε τυποποίηση,

$$X^* = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \qquad Y^* = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

p-ποσοστιαίο σημείο X_p

$$P(X \le x_p) = p$$

<u>Διάμεσος</u>

$$x_{0,5} = M$$

$$P(X \le M) = P(X \ge M)$$

Επικρατέστερη Τιμή *T*

Εκεί όπου η $f(X)$ μεγιστοποιείται: $f(T)$=μέγιστη

Πιο αντιπροσωπευτική του δείγματος.

Παράδειγμα: το ύψος που έχουν οι περισσότεροι φοιτητές.

Άσκηση

Έστω η διακριτή Τυχαία Μεταβλητή $X = \{1, 2, 3, \dots\}$

της οποίας η συνάρτηση συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι

$$f(x_i) = \frac{1}{2^{x_i}}$$

Να βρεθεί η επικρατέστερη τιμή, η διάμεσος, και η μέση τιμή.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης