



Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 4^η: Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών.

Γεώργιος Ζιούτας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Α.Π.Θ.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μέση Τιμή.
2. Διακύμανση.
3. Τυπική Τυχαία Μεταβλητή.
4. Ανισότητα Chebyshev.
5. p -Ποσοστιαίο Σημείο, Διάμεσος, Επικρατέστερη Τιμή.
6. Άλλες Παράμετροι και Ροπές.



8^η Διάλεξη



Ασκήσεις-Παραδείγματα-Προβλήματα

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατέστερη τιμή.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x(9-x^2)}{81}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επικρατέστερη Τιμή

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{36-12x^2}{81} = 0$$
$$\Rightarrow x = 1,73 \Rightarrow T = 1,73$$



Διάμεσος

$$\int_0^M \frac{4x(9-x^2)}{81} dx = 0,5$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{4u(9-u^2)}{81} du = \frac{4}{81} \cdot \frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

$$M =; \text{ _ \acute{o}σ\tau\epsilon _ } F(M) = 0,5$$

$$\frac{4}{81} \cdot \frac{9M^2}{2} - \frac{M^4}{4} = 0,5 \Rightarrow M^2 = 9 \pm \frac{9}{2}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow M = 1,62$$

Μέση Τιμή

$$E(X) = \int_0^3 xf(x)dx = 1,60$$



Παράδειγμα 2

Έστω η ακτίνα καλωδίου η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2a, & 2 < x \leq 6 \\ 4a, & 6 \leq x \leq 12 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$
$$\int_2^6 (ax - 2a) dx + \int_6^{12} 4a dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 - 2a [x]_2^6 + 4a [x]_6^{12} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16a - 8a + 24a = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{1}{32}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \int_2^x (au - 2a) du, & 2 \leq x \leq 6 \\ \int_2^6 (ax - 2a) dx + \int_6^x 4a dx, & 6 < x \leq 12 \\ 1, & x > 12 \end{cases}$$

$$a) _ M =;$$

$$\int_2^6 f(x) dx + \int_6^M 4a dx = 0,5 \Rightarrow M$$

$$b) _ Y = \pi x^2$$

$$E(Y) =;$$

$$E(Y) = \int_2^6 (\pi x^2)(2ax - 2a) dx + \int_6^{12} (\pi x^2)(4a) dx$$



Παράδειγμα 3

Η εκλυόμενη ισχύς ενός κυκλώματος: $P = I^2 R$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας $\begin{cases} E(aX + \beta) = \alpha E(X) + \beta \\ E(g(x)) = \int g(x)f(x)dx \end{cases}$, έχουμε ότι:

Η μέση τιμή της εκλυόμενης ισχύος: $E(P) = \int i^2 R \cdot f(i) di$

Από την $f(i)$ έχουμε ότι: $\int_a^3 \frac{1}{4} di + \int_3^4 \frac{1}{2} di = 1 \Rightarrow a = 1$

Άρα: $E(P) = \int_1^3 i^2 R \cdot \frac{1}{4} di + \int_3^4 i^2 R \cdot \frac{1}{2} di =$



Παράδειγμα 4

Μία ηλεκτρική μηχανή λειτουργεί όλο το 24ωρο και ισοπίθانا μπορεί να χαλάσει εντός αυτού.

Η μηχανή μπορεί να χαλάσει ισοπίθانا στην χρονική στιγμή t και δίνεται ότι σίγουρα θα επισκευαστεί ισοπίθانا εντός του διαστήματος $(t, 24)$.

Ποια η πιθανότητα ότι η μηχανή θα δουλέψει τουλάχιστον 12 ώρες;

Λύση

- αν χαλάσει μετά το 12ωρο
- ή αν χαλάσει πριν το 12ωρο και η επισκευή διαρκέσει λιγότερο από 12 ώρες, αυτό μπορεί να συμβεί με πιθανότητα $\frac{12}{24-t}$

Συνολικά η ζητούμενη πιθανότητα εκτιμάται ως ακολούθως:

Αν X ο χρόνος καλής λειτουργίας του συστήματος

$$P(X \geq 12) = \frac{1}{2} + \int_0^{12} \frac{1}{24} \cdot \frac{12}{24-t} dt$$



8^η Διάλεξη

Άσκηση 2

Έστω ότι έχουμε τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ των τιμών α και β ,

$$X \sim U(\alpha, \beta)$$

$$E(X) = 0 \quad P(X < 1) = \frac{2}{3} \quad \alpha, \beta = ;$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



1^η Εξίσωση

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

2^η Εξίσωση

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_1^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\beta - \alpha} [x]_1^{\beta} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\beta - 1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(\beta - 1) = \beta - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\beta - 3 = \beta + \beta \Leftrightarrow \beta = 3 \Leftrightarrow \alpha = -3$$



Άρα έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & -3 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Και προκύπτει:

$$P(X = 0,5) = 0$$

$$P(X < 0,5) = \int_{-3}^{0,5} \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \cdot 3,5$$

$$P(X < 4) = \int_{-3}^3 \frac{1}{6} dx = \frac{6}{6} = 1$$

$$P(-0,5 < x < 0,5) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6}$$



Πρόβλημα

Η μηνιαία κατανάλωση πετρελαίου X είναι τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η μέση τιμή για τους 5 μήνες. Για τη μηνιαία κατανάλωση έχουμε:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 5(1-x)^4 dx =$$

$$1-x = u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -dx = du$$

$$\Rightarrow x = 1-u$$

$$= -5 \int_1^0 (1-u)u^4 du = -5 \int_1^0 (u^4 - u^5) du = -5 \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} \right]_1^0 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$



Η μέση τιμή κατανάλωσης για τους 5 μήνες είναι:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$$

$$E(x_1) = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) + E(x_4) + E(x_5) = \frac{5}{6}$$



Άσκηση

Έστω ένας φοιτητής απαντά τη λύση για 2 προβλήματα A (3 δυνατές απαντήσεις) και B (5 δυνατές απαντήσεις):

$$A = \{\text{το γεγονός να απαντήσει σωστά στο A}\}$$

$$B = \{\text{το γεγονός να απαντήσει σωστά στο B}\}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$$

$$P(\bar{B}) = \frac{4}{5}$$



συνέχεια...

Έστω ότι ο φοιτητής επιλέγει τυχαία μία από κάθε πρόβλημα. Να βρεθεί η μέση τιμή των σωστών απαντήσεων X του φοιτητή. $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$
όπου: $X = \{0, 1, 2\}$

Η πιθανότητα να μην απάντησε σε κανένα σε ένα και στα δύο προβλήματα σωστά:

$$P(X = 0) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$P(X = 1) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(X = 2) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Άρα:
$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = 0 \cdot \frac{8}{15} + 1 \cdot \frac{6}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$



συνέχεια...

Να βρεθεί η διακύμανση:

$$\text{VAR}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 P(X = x_i) = 0^2 \frac{8}{15} + 1^2 \frac{6}{15} + 2^2 \frac{1}{15} = \frac{10}{15}$$

$$\text{VAR}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{10}{15} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \dots$$



Άσκηση

Η μηνιαία κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας σε ένα εργοστάσιο είναι μηνιαία μεταβλητή με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x)^4, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί αρχικά η μέση τιμή της μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} a(1-x)^4 dx = 1 \Leftrightarrow -a \int_1^0 u^4 du = 1 \Leftrightarrow -a \left[\frac{u^5}{5} \right]_1^0 = 1$$
$$\Rightarrow a = 5$$



συνέχεια...

Ποια κατανάλωση ενέργειας δε ξεπερνιέται στους 10 μήνες του χρόνου:

Ποσοστιαίο σημείο $X_p = X_{\frac{10}{12}}$

$$\int_0^{X_p} 5(1-x)^4 dx = \frac{10}{12} \Rightarrow -5 \int_1^{1-X_p} u^4 du = \frac{10}{12} \Rightarrow -5 \left[\frac{u^5}{5} \right]_1^{1-X_p} = \frac{10}{12}$$

$$-(1-X_p)^5 + 1 = \frac{10}{12} \Leftrightarrow X_p = \dots$$

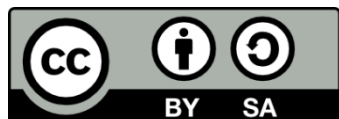




Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-
Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ