Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 5η: Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή.

Γεώργιος Ζιούτας
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Η Κατανομή Bernoulli.
2. Η Διωνυμική Κατανομή.
3. Η Γεωμετρική Κατανομή.
4. Η Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (Pascal).
5. Η Υπεργεωμετρική Κατανομή.
6. Διαδικασία Poisson.
   i. Κατανομή Poisson.
   ii. Η Poisson σαν μία Προσέγγιση στην Διωνυμική Κατανομή.
7. Πολυωνυμική Κατανομή.
8. Σχέσεις μεταξύ Διακριτών Κατανομών.

$9^η$ Διάλεξη

Χρήσιμες Κατανομές

1. Bernoulli
2. Διωνυμική
3. Γεωμετρική
4. Pascal
5. Poisson

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\_\mathrm{X}$$

Κατανομή Bernoulli

Δοκιμή Bernoulli,

Είναι ένα πείραμα τύχης το οποίο έχει δύο ενδεχόμενα να συμβεί το γεγονός A *(επιτυχία)* ή να μην συμβεί $\overline{A}$. Σε κάθε δοκιμή η πιθανότητα πραγματοποίησης του A είναι σταθερή ίση με p. Αν X παριστάνει τον αριθμό γεγονότων A σε μία δοκιμή *Bernoulli*, τότε έχουμε, S

$$S = [A, \overline{A}] \rightarrow X = [1, 0]$$

$$P(X = 1) = P(A) = p$$

$$P(X = 0) = P(\overline{A}) = 1 - p$$

$$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

$$VAR(X) = E(X^2) - p^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p)$$

Ακολουθία Bernoulli (n δοκιμές)

Ακολουθία Bernoulli ονομάζουμε μία <u>συγκεκριμένη</u> σειρά από n δοκιμές Bernoulli, όπου παρατηρούνται:

x επιτυχίες A

n-x αποτυχίες $\bar{A}$

Τα γεγονότα A και $\bar{A}$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, για αυτό ισχύει,

$$P(AA\bar{A}AA\bar{A}AA\bar{A}AA\bar{A}\ldots n\_\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ldots) = (1-p)^{n-x}\cdot p^{x}$$

Διωνυμική Κατανομή

$$X = \{αριθμός\_επιτυχιών\_A\_σε\_n\_δοκιμές\_Bernoulli\}$$

$$p = P(\mathrm{A}) = \{η\_πιθανότητα\_να\_είναι\_ελαττωματικό\}$$

$$X = \{0,1,2,3,\ldots,n\}$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x} \qquad \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Θα πρέπει: $\displaystyle\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x} = 1$

Διωνυμική Κατανομή

Συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

πρέπει: $\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}}\, p^x(1-p)^{n-x}=1$

$$(p+(1-p))^n=1,$$

$$\alpha\pi\acute{o}\_\alpha\nu\acute{\alpha}\pi\tau\upsilon\xi\eta\_\delta\iota\omega\nu\acute{\upsilon}\mu o\upsilon\_(\alpha+\beta)^n$$

Μέση Τιμή

$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$, *n* τυχαίων μεταβλητών του Bernoulli

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)=p+p+\ldots+p=n\cdot p$$

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\cdot P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

Διακύμανση $\quad VAR(X)=E(X^2)-(n\cdot p)^2=n\cdot p(1-p)$

Διωνυμική Κατανομή

Παράδειγμα

Ρίχνω *n*=20 φορές ένα ζάρι. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρω 5 άσσους;

$$n = 20$$

$$p = \frac{1}{6} = P(A) = P(X = 1)$$

$$X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 20\}$$

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} p^5 (1 - p)^{15} \approx 0,13$$

$$E(X) = np = \frac{20}{6} \approx 3,33$$

Διωνυμική Κατανομή

Παράδειγμα

Έστω μία ηλεκτρική γραμμή έχει $n=100$ στύλους. Η πιθανότητα ένας στύλος να έχει βλάβη είναι $p=0{,}01$. Αν ελέγξουμε 100 στύλους ποια η πιθανότητα να βρεθούν το πολύ 5 στύλοι με βλάβη;

$n=100$

$p=0{,}01$

$X=\{0,1,2,\ldots,100\}$

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{n}{x} 0{,}01^{x} (0{,}99)^{n-x}$$

$E(X) = np = 1$,→ 1 στύλος ελαττωματικός στους 100

Γεωμετρική Κατανομή

$$X = \{αριθμός\_δοκιμών\_Bernoulli\_μέχρι\_εμφάνισης\_του\_A\_για\_πρώτη\_φορά\}$$

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

$$P(X = x) = P(\underbrace{\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\ldots\overline{A}}_{X\text{-}1\ φορές}A) = (1-p)^{(x-1)} \cdot p$$

πρέπει: $\sum_{x=1}^{+\infty} (1-p)^{(x-1)} \cdot p = 1$

$$1 \cdot p + (1-p) \cdot p + (1-p)^2 \cdot p + \ldots = (1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots) \cdot p$$

Περίοδος Επαναφοράς καλούμε τον μέσο αριθμό δοκιμών Bernoulli μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων των A

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x(1-p)^{(x-1)} \cdot p = \frac{1}{p}$$

Κατανομή Pascal

- (χρήσιμη σε προβλήματα αξιοπιστίας)

Πρέπει να καταλάβουμε το X_r τι παριστάνει.

$$X_r = \{αριθμός\_δοκιμών\_μέχρι\_r\_φορές\_το\_A\}$$

$$\underbrace{P(X_r = x)} = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^{(r-1)} \cdot (1-p)^{(x-1)-(r-1)} \cdot p = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{(x-r)}$$

.

$$\underbrace{P(\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}...\bar{A}A)}$$

x-1 δοκιμές

r-1 φορές το A

Το X_r παίρνει τιμές πάνω από r, $X_r = \{r, r+1, r+2, ..., ...\}$

$$E(X_r) = \frac{r}{p}$$

Κατανομή Pascal

Παράδειγμα

Σε ένα αεροπλάνο υπάρχουν τρεις υπολογιστές. Όταν το αεροπλάνο είναι σε πτήση απαιτείται η λειτουργία ενός εκ των υπολογιστών. Η πιθανότητα βλάβης του υπολογιστή ανά ώρα λειτουργίας του είναι *p=0,0005*.

Ποιος ο μέσος αριθμός ωρών πτήσης μέχρι να χαλάσουν και οι τρεις υπολογιστές.

$$X = \{αριθμός\_ωρών\_μέχρι\_να\_χαλάσουν\_και\_οι\_τρεις\_υπολογιστές\}$$

$$E(X_3) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0,0005} = 6000h$$

Κατανομή Pascal

Συνέχεια Παραδείγματος...

Σε ένα ταξίδι 6 ωρών, ποια η πιθανότητα ασφαλούς πτήσης του αεροπλάνου;

$$X_3 = \{3,4,5,6,7,...\} = \{αριθμός\_ωρών\_μέχρι\_να\_συμπληρωθούν\_οι\_3\_βλάβες\}$$

$$P(X_3 \le 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$$

$$= \binom{3-1}{3-1} \cdot p^3 \cdot (1-p)^0 + \binom{4-1}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^1 + \binom{5-1}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 + \binom{6-1}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^3$$

$$P(X_r = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

Κατανομή Poisson

$$X_t = \{τυχαίο\_αριθμό\_γεγονότων\_A\_σε\_ένα\_χωροχρονικό\_διάστημα\_t\}$$

$$X_t = \{0,1,2,\ldots\}$$

Προϋποθέσεις

1) Να συμβαίνουν τυχαία και να είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.
2) Να υπάρχει ένα ελάχιστο διάστημα Δt όπου θα μπορούν να συμβούν το πολύ ένα από τα γεγονότα $\{A, \overline{A}\}$
3) $P(A) = P(X_{\Delta t} = 1) = \Delta t \cdot \lambda$

Εξίσωση μάζας-πιθανότητας

$$P(X_t = x) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^x}{x!}$$

Μέση τιμή της X_t

$$E(X_t) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{(\lambda t)^x}{x} = \lambda t$$

Κατανομή Poisson

Διαστήματα ανά δοκιμές

$$n = \frac{t}{\Delta t} \to \infty$$

$$P = \Delta t \cdot \lambda \to 0$$

Εξίσωση μάζας-πιθανότητας

$$P(X_t = x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} \binom{n}{x} (\Delta t \cdot \lambda)^x \left(1 - \Delta t \cdot \lambda\right)^{n-x} = e^{\lambda \cdot t} \frac{(\lambda t)}{x!}$$

Μέση τιμή της X_t

$$E(X_t) = n \cdot p = \frac{t}{\Delta t} \cdot \lambda \cdot \Delta t = \lambda \cdot t$$

Διακύμανση της X_t

$$VAR(X_t) = np(1-p) = np = \lambda \cdot t$$

Κατανομή Poisson

Παράδειγμα

Σε έναν μετρητή καταφθάνουν $\lambda = 10^2$ σωματίδια ανά λεπτό.
Ποια η πιθανότητα άφιξης 100 σωματιδίων σε ένα λεπτό;

$X_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 100, 101, \ldots\}$, άπειρες οι τιμές που μπορεί να πάρει.

$$P(X_{1\min} = 100) = e^{-100 \cdot 1} \cdot \frac{100^{100}}{100!} \approx 0,04$$

Ποια η πιθανότητα να καταφθάσουν 100 σωματίδια στο επόμενο δευτερόλεπτο;

$$P(X_{1\sec} = 100) = e^{-\frac{100}{60} \cdot 1} \cdot \frac{\left(\frac{100}{60} \cdot 1\right)^{100}}{100!}$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης