



# Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 1<sup>η</sup>: Βασικές Έννοιες Πιθανότητας

Γεώργιος Ζιούτας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών  
Α.Π.Θ.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Βασικές Έννοιες Πιθανότητας

# Περιεχόμενα ενότητας

1. Αβεβαιότητα, Τυχαία Διαδικασία και Συναφείς Έννοιες.
  - i. Αβεβαιότητα και Τυχαίο Πείραμα
  - ii. Δειγματοχώρος και Δειγματοσημεία
  - iii. Σύνθετος Δειγματοχώρος
  - iv. Γεγονότα
2. Πράξεις και Σχέσεις Γεγονότων.
  - i. Πράξεις Γεγονότων
  - ii. Ασυμβίβαστα Γεγονότα ή Αμοιβαίως Αποκλειόμενα
  - iii. Κανόνες Πράξεων Γεγονότων
3. Χώρος Γεγονότων - Δυναμοσύνολο



# Περιεχόμενα ενότητας

4. Η Έννοια της Πιθανότητας.
  - i. Κλασική Θεωρία
  - ii. Θεωρία Σχετικής Συχνότητας
  - iii. Υποκειμενική Θεωρία
5. Αξιώματα και Θεωρήματα Πιθανότητας.
6. Αρχές Απαρίθμησης.
  - i. Ο Κανόνας του Γινομένου
  - ii. Μεταθέσεις
  - iii. Συνδυασμοί
  - iv. Μεταθέσεις (όταν όλα τα αντικείμενα δεν είναι ίδια)



# 1<sup>η</sup> Διάλεξη

---



# Αβεβαιότητα και Τυχαίο Πείραμα

## Τα Δύο Είδη Γεγονότων

- Καθοριστικά
  - Το αποτέλεσμα καθορίζεται από τις συνθήκες (π.χ. ο νόμος πτώσης ενός αντικειμένου)
- Στοχαστικά
  - Το αποτέλεσμα δεν μπορεί να καθοριστεί από τις συνθήκες (π.χ. η ρίψη του ζαριού)





# Αβεβαιότητα και Τυχαίο Πείραμα

Το σπουδαιότερο «εργαλείο» → Πείραμα τύχης (E),  
(στοχαστικό φαινόμενο)

1. Μπορούμε να το διεξάγουμε όσες φορές θέλουμε.
2. Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το αποτέλεσμα της έκβασης του πειράματος.
3. Εκτελείται πάντοτε κάτω από τις ίδιες συνθήκες.



# Αβεβαιότητα και Τυχαίο Πείραμα

4. Γνωρίζουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης:

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

όπου το σύνολο  $S$  καλείται δειγματικός χώρος ή αλλιώς δειγματοχώρος.



# Δειγματοχώροι

**Παράδειγμα 1:** Η ρίψη ζαριού,

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

**Παράδειγμα 2:** Στη ρίψη νομίσματος 3 φορές,

$$S_2 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$$

όπου Κ: Κεφαλή και Γ: Γράμμα

**Παράδειγμα 3:** Έλεγχος ελαττωματικών τεμαχίων:

$$S_3 = \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

μπορούμε να έχουμε άπειρα στοιχεία, αλλά αριθμήσιμα.



# Δειγματοχώροι

- **Παράδειγμα 4:** Αριθμός σωματιδίων που εκπέμπει ένα ραδιενεργό σώμα:

μπορούμε να έχουμε άπειρα στοιχεία, αλλά μετρήσιμα.

$$S_4 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- **Παράδειγμα 5:** Διάρκεια καλής λειτουργίας του λαμπτήρα:

άπειρα αλλά μη μετρήσιμα.

$$S_5 = \{X / X \in \mathbb{R}_+\}$$



# Δειγματοχώροι

- **Παράδειγμα 6:** Μέτρηση θερμοκρασίας σε έναν τόπο ώρα 12 το μεσημέρι:

$$S_6 = \{X / m = X \leq M\}$$

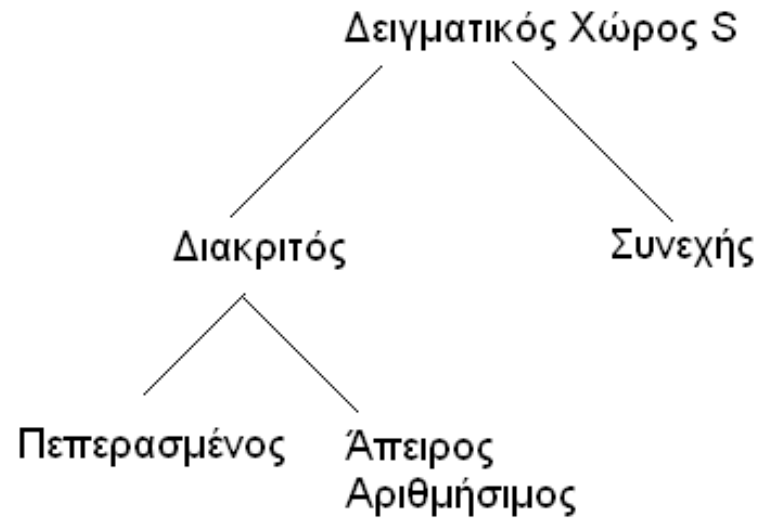
όπου  $m$  ελάχιστη και  $M$  μέγιστη θερμοκρασία

Σε αυτό το πείραμα μπορούμε να έχουμε παραπάνω από ένα δειγματοχώρο, π.χ. η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία, η μέση ημερήσια θερμοκρασία κ.τ.λ.

Τους Δειγματοχώρους τους διακρίνουμε σε διακριτούς και συνεχείς, όπως φαίνεται στο επόμενο σχεδιάγραμμα.



# Δειγματοχώροι



# Γεγονότα

## Ορισμός

Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου είναι γεγονός. Τα γεγονότα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα ,π.χ.

$$A, B, W, R$$

- Παράδειγμα:

Έστω,  $S$  ο δειγματικός χώρος της ρίψης του ζαριού, και το γεγονός  $A$  να έχουμε άρτιο αριθμό,

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{\text{άρτιος \_ αριθμός}\}$$

$$A = \{2, 4, 6\} \subseteq S$$



# Γεγονότα

Ένα γεγονός συμβαίνει όταν το αποτέλεσμα του πειράματος ανήκει στο σύνολο του γεγονότος, έτσι:

- Το  $S$  είναι και αυτό ένα γεγονός,  $S \in S$ .
- Το  $S$  ονομάζεται σίγουρο γεγονός, διότι πάντα το αποτέλεσμα του πειράματος ανήκει στο  $S$ .
- Το κενό σύνολο  $\emptyset = \{\}$  είναι ένα γεγονός,  $\emptyset \subseteq S$ .
- Το αποτέλεσμα του πειράματος δεν ανήκει ποτέ στο κενό σύνολο  $\{\}$ , έτσι το γεγονός  $\emptyset$  δεν πραγματοποιείται ποτέ και γιαυτό ονομάζεται αδύνατο γεγονός





# Δυναμοσύνολο

## Ορισμός

- Δυναμοσύνολο είναι το σύνολο  $S^*$  όλων των δυνατών υποσυνόλων του δειγματικού χώρου .
- Όλα τα δυνατά γεγονότα του δυναμοσυνόλου που προκύπτουν από τον δειγματικό χώρο  $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$  είναι:
- $S^* = (\{\}, \{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}, \{s_1, s_3\}, \dots, \{s_{n-1}, s_n\}, \dots, \{s_1, s_2, s_3\}, \dots, \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}) \rightarrow 2^n$  γεγονότα



# Δυναμοσύνολο

- Δηλαδή:  
Αν ο αριθμός των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης είναι  $n$ ,

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

όλα τα δυνατά γεγονότα θα είναι οι δυνατοί συνδυασμοί των δειγματοσημείων ανά μηδέν, ένα, δύο κ.τ.λ., που συνδέονται με το πείραμα τύχης, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους, και είναι  $2^n$ .

## Απόδειξη

Θα είναι:  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 1 + n + \dots = (1+1)^n = 2^n$  γεγονότα



# Δυναμοσύνολο

## Παράδειγμα

Έστω ο δειγματικός χώρος για  $n=3$

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}$$

Όλα τα δυνατά γεγονότα του αποτελούν το δυναμοσύνολο,

$$S^* = (\{\}, \{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}, \{s_1, s_3\}, \{s_1, s_2, s_3\})$$

Το οποίο περιέχει  $2^3=8$  γεγονότα



# Πράξεις Γεγονότων $A, B$ που ανήκουν στον δειγματικό χώρο $S$ ενός πειράματος

- 1) Ισότης  $A = B$  , περιέχουν τον ίδιο αριθμό δειγματοσημείων
- 2) Περιεκτικότητα  $A \subset B$  , κάθε στοιχείο του  $A$  εμπεριέχεται στο  $B$
- 3) Ένωση  $A \cup B$  , όλα τα σημεία που ανήκουν είτε στο  $A$  είτε στο  $B$  είτε και στα δύο
- 4) Τομή  $A \cap B$  , όλα τα σημεία που ανήκουν είτε στο  $A$  είτε στο  $B$  και όχι στην τομή τους
- 5) Διαφορά  $A - B = A \cap \bar{B}$  , τα σημεία που ανήκουν στο  $A$  και όχι στο  $B$
- 6) Συμπλήρωμα  $A, \bar{A}$  , η ένωσή τους θα καλύψει όλο το δειγματικό χώρο



# Συμβολισμοί και νόημα

$$AND \equiv \cap$$

$$OR \equiv \cup$$

$$NOT \equiv \bar{\phantom{x}}$$

De Morgan-Αρχή του δυϊσμού

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cap (B \cup C)} = \bar{A} \cup \overline{(B \cup C)} = \bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C})$$



# Ιδιότητες

- 1)  $A \cap B = B \cap A$  , αντιμεταθετική
- 2)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  , προσεταιριστική
- 3)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  , επιμεριστική

Με τις παραπάνω πράξεις μπορούμε να ορίσουμε πιο σύνθετα γεγονότα.



# Παράδειγμα

Έστω δειγματοχώρος  $S$  και τρία γεγονότα του  $A, B, C$   
Να συμβολισθούν με άλγεβρα γεγονότων τα εξής:

- 1) Τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα  $A, B, C$

$$A \cup B \cup C$$

- 2) Το γεγονός μόνο ένα από τα γεγονότα  $A, B, C$

$$((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B)))$$

$$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

- 3) Το γεγονός μόνο δύο από τα γεγονότα  $A, B, C$

Παρόμοια με την περίπτωση 2.

- 4) Το γεγονός το πολύ δύο από τα γεγονότα  $A, B, C$

$$\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$



# Παράδειγμα

Ρίψη νομίσματος 2 φορές

Δειγματικός χώρος  $S$  ,

$$S = \{ΚΚ, ΓΓ, ΚΓ, ΓΚ\}$$

όπου Κ: κεφαλή και Γ: γράμματα

Γεγονότα:

$$A = \{\text{τουλάχιστον 1 φορά Κ}\}, A = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ\}$$

$$B = \{\text{Γ στη 2}^{\text{η}} \text{ ρίψη}\}, B = \{ΓΓ, ΚΓ\}$$

$$\text{εδώ τυχαίνει η ένωση } A \cup B = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$$

να ταυτίζεται με τον δειγματοχώρο  $S$ , το οποίο δεν συμβαίνει πάντα.





# Έννοια Πιθανότητας

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Μέθοδοι εκτίμησης (πιθανότητας)

1. Κλασική  $P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$  όπου  $N(A)$  τα δειγματοσημεία του γεγονότος  $A$   
– Ισχύει εφόσον τα δειγματοσημεία του  $S$  είναι ισοπίθانا.

2. Σχετική Συχνότητα  $P(A) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{f(A)}{N}$

3. Αξιώματα Kolmogorov

Έστω ότι έχουμε τον χώρο πιθανότητας  $S, S^*, P(A)$

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$

2.  $P(S) = 1$

3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  όταν  $A \cap B = \emptyset$



# Βασικά Θεωρήματα Πιθανότητας

## Θεώρημα 1

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S)$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

## Θεώρημα 2

$$P(\{\}) = 0$$

$$P(\{\} \cup S) = P(S) = 1$$

$$P(\{\}) + P(S) = 1$$

## Θεώρημα 3

Για  $A \subset B$ , ισχύει  $P(A) \leq P(B)$

$$B = A \cup (B - A)$$

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$$



# Βασικά Θεωρήματα Πιθανότητας

## Θεώρημα 4

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$B = (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \Rightarrow$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

## Θεώρημα 5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$$



# Βασικοί Τύποι Πιθανότητας

Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο  $S$  και 3 γεγονότα  $A, B, C$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A - (B \cup C)) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned} P(A) - P(A \cap (B \cup C)) &= P(A) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$P(\text{μόνο } \_ \text{ δύο}) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C)$$



# Παράδειγμα

Τρεις παίκτες A, B και C ρίχνουν ένα νόμισμα με την σειρά ξεκινώντας από τον A παίκτη. Ο πρώτος που θα φέρει κεφαλή κερδίζει το παιχνίδι. Να συμβολισθεί με άλγεβρα συνόλων το γεγονός ότι κερδίζει ο A παίκτης.

Συμβολίζουμε με  $A_i, B_i, C_i$  τα γεγονότα ότι στην  $i$  ρίψη του παιχνιδιού ο αντίστοιχος παίκτης φέρει κεφαλή. Το γεγονός να κερδίσει ο A παίκτης συμβολίζεται με την ακόλουθη άλγεβρα συνόλων,

$$W_A = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_3} \cap A_4) \cup (\dots)$$

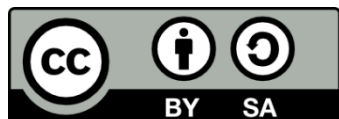




# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-  
Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ