ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 5η: Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή.

Γεώργιος Ζιούτας
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή.

Περιεχόμενα ενότητας

10^{η} Διάλεξη

Πρόβλημα

Έστω τηλεφωνικό κέντρο με κ γραμμές και περισσότερους από κ συνδρομητές, έστω 10. Πόσες τουλάχιστον γραμμές πρέπει να διαθέτει το τηλεφωνικό κέντρο, έτσι ώστε αν ένας πελάτης επιχειρεί να τηλεφωνήσει, η γραμμή εννέα φορές στις δέκα να είναι ελεύθερη;

$$P(X \le \kappa) = 0,90$$

Ο κάθε συνδρομητής μιλάει κατά μέσο όρο 12 λεπτά την ώρα στο τηλέφωνο. Άρα η πιθανότητα μια στιγμή να θέλει να μιλήσει είναι:

$$p = \frac{12}{60} = 0,20$$

$X = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$, παριστάνει πόσοι από τους 10 συνδρομητές θέλουν να τηλεφωνήσουν

$$n = 10\_\delta o\kappa\iota\mu\acute{\varepsilon}\varsigma\_Bernoulli$$

$$\sum_{x=0}^{\kappa} \binom{10}{x} 0,20^{x} \cdot 0,80^{10-x} \ge 0,90$$, το οποίο ισχύει για κ=4

Πρόβλημα

Ο αριθμός ψεγαδιών στην επιφάνεια της ταπετσαρίας σε μία βιομηχανία είναι τυχαία μεταβλητή, X, Poisson κατανομής με $\lambda = 0,08 / \tau\mu$. Αν η επιφάνεια της ταπετσαρίας του αυτοκινήτου είναι 6 τ.μ. , ποια η πιθανότητα η ταπετσαρία του να είναι καθαρή χωρίς ψεγάδια;

$$X_{t=6} = \{0,1,2,\ldots\} \qquad P(X_{t=6} = 0) = e^{-\lambda(6)} \cdot \frac{(6\lambda)^0}{0!} = e^{-0,48}$$

Αν ελέγξουμε $n=10$ αυτοκίνητα, ποια η πιθανότητα κανένα να μην φέρει ψεγάδι στην ταπετσαρία του;

$$Y = \{0,1,2,\ldots,10\}$$

$$p = e^{-0,48}$$

Έχουμε διωνυμική κατανομή, $P(Y=10) = \binom{10}{10} p^{10} (1-p)^0$

Πρόβλημα

Σε μία διασταύρωση υπάρχει μία εσοχή για τα αυτοκίνητα που θέλουν να στρίψουν αριστερά, η οποία χωράει 3 αυτοκίνητα. Το κόκκινο σήμα για αριστερά διαρκεί 1min. Τα αυτοκίνητα πλησιάζουν στο φανάρι με μία διαδικασία Poisson, και αυτά που θέλουν να στρίψουν αριστερά είναι 150 ανά ώρα.

Ανάβει κόκκινο βέλος προς τα αριστερά. Ποια η πιθανότητα να χωρέσουν τα αυτοκίνητα στην αριστερή εσοχή;

$$X_{t=1\min} = \{0,1,2,\ldots\} \qquad \lambda = \frac{150}{60} = 2,5 \qquad P(X_1 \le 3) = \sum_{x=0}^{3} e^{-\lambda(1)} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Κατά πόσο τουλάχιστον πρέπει να αυξήσουμε την εσοχή ώστε η παραπάνω πιθανότητα να ξεπεράσει το 90%;

Με τη μέθοδο δοκιμής και λάθους έχουμε:

$$P(X_1 \le \kappa) = \sum_{x=0}^{3} e^{-\lambda(1)} \frac{\lambda^x}{x!} \ge 0,90$$, για κ=4 έχουμε $P(X_1 \le 4)=0,82$

Αυξάνουμε την εσοχή για $\kappa=5$, κ.ο.κ.

Πρόβλημα

Ένας καπνιστής έχει στην τσέπη του δύο κουτιά σπίρτα με N σπίρτα ανά κουτί. Για να ανάψει το τσιγάρο του διαλέγει πάντα στην τύχη ένα από τα δύο. Ποια η πιθανότητα να διαλέξει για πρώτη φορά ένα άδειο κουτί και το άλλο να είναι επίσης άδειο; Ως δοκιμή Bernoulli θεωρούμε την επιλογή του Α κουτιού με σταθερή πιθανότητα 0,5 και προφανώς η επιλογή του Β είναι επίσης 0,5.

Εάν την πρώτη φορά που διαλέγουμε ένα άδειο κουτί το άλλο έχει k σπίρτα, τότε έχουμε διαλέξει $N+1$ το Α και N-k φορές το Β. Έστω X={πλήθος των δοκιμών μέχρι της $N+1$ εμφάνισης του Α}

Ακολουθούμε την κατανομή Pascal,

$$P(X_r = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

Ο γενικός τύπος όπου το Α κουτί είναι άδειο, αλλά το Β να έχει μέσα k σπίρτα είναι,

$$P(X_{r=N+1} = 2N-k+1) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}$$

Για $k=0$ βρίσκουμε το ζητούμενο

Πρόβλημα

Σε ένα μεγάλο αριθμό καλωδίων το 80% έχουν διάμετρο 8mm και το 20% 6mm. Επιλέγουμε τυχαία $n=10$ καλώδια. Ποια η πιθανότητα ότι ακριβώς 5 έχουν διάμετρο 8mm;

$$X = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$$

$$P(X=5) = \binom{10}{5} 0,80^5 \cdot 0,20^5$$

Ποια η πιθανότητα ότι τα 10 καλώδια είναι ενός είδους;

$$P((X=10)\cup(Y=10)) = P(X=10) + P(Y=10)$$

Ποια η πιθανότητα ότι υπάρχουν 6 καλώδια ενός είδους;

$$P((X=6)\cup(X=4)) = P(X=6) + P(X=4)$$

Πρόβλημα

- Σε ένα ηλεκτρικό σύστημα Α ο αριθμός βλαβών είναι 1,1 βλάβες ανά έτος.

$\lambda_A = 1{,}1$ βλάβες/έτος

$$X_A = \{1, 2, 3, \ldots\} = \{\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\varepsilon\varsigma\_\alpha\nu\acute{\alpha}\_\acute{\varepsilon}\tau o\varsigma\_\sigma\tau o\_\mathrm{A}\_\sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\}$$

- Σε ένα ηλεκτρικό σύστημα Β ο αριθμός βλαβών είναι 2 βλάβες ανά έτος.

$\lambda_B = 2$ βλάβες/έτος

- Ποια η πιθανότητα το σύστημα Α να παρουσιάσει 2 βλάβες σε ένα εξάμηνο;

$$X_B = \{1, 2, 3, \ldots\} = \{\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\varepsilon\varsigma\_\alpha\nu\acute{\alpha}\_\acute{\varepsilon}\tau o\varsigma\_\sigma\tau o\_\mathrm{B}\_\sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha\}$$

$$P(X_A = 2) = e^{-\lambda \cdot 0,5} \cdot \frac{(0,5\lambda)^2}{2!}$$

συνέχεια…

- Ποια η πιθανότητα το σύστημα Β θα παρουσιάσει λιγότερες βλάβες από ότι το Α σε έναν χρόνο;

$$P(X_B < X_A) = P(X_A = 1)\cdot P(X_B < 1) + P(X_A = 2)\cdot P(X_B < 2) + \ldots =$$

$$= e^{-\lambda_A}\cdot\frac{(\lambda_A)}{1!}\cdot e^{-\lambda_B} + e^{-\lambda_A}\cdot\frac{(\lambda_A)^2}{2!}\cdot\sum_{x=0}^{1} e^{-\lambda_B}\cdot\frac{\lambda_B{}^x}{x!}$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης