Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Στατιστική για Πολιτικούς Μηχανικούς

Λυμένες ασκήσεις μέρους Α’

Κουγιουμτζής Δημήτρης
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2014

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Λυμένες Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστικής στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Μέρος Α – Θεωρία Πιθανοτήτων

Άσκηση 1 *[Θέμα στις εξετάσεις Φεβρουαρίου 2002]*

Το νερό για μία κατοικημένη περιοχή πρώτα αντλείται από μία γεώτρηση, μετά περνά από ένα σύστημα χλωρίωσης, και τέλος μέσα από ένα φίλτρο νερού. Η πιθανότητα αποτυχίας της άντλησης, χλωρίωσης και φιλτραρίσματος μέσα σε ένα χρόνο είναι 0,1, 0,2 και 0,1 αντίστοιχα.

Η αποτυχία άντλησης προκαλεί έλλειψη ικανοποιητικής παροχής νερού, ενώ η αποτυχία της χλωρίωσης ή φιλτραρίσματος ελαττώνει την ποιότητα νερού κάτω από τα επιτρεπτά όρια. Το γεγονότα αποτυχίας άντλησης νερού, χλωρίωσης, και φιλτραρίσματος θεωρούνται στατιστικά ανεξάρτητα.

(α) Ποια η πιθανότητα αυτόν τον χρόνο η κατοικημένη περιοχή να έχει ικανοποιητική παροχή νερού παραδεκτής ποιότητας;

(β) Όταν η κατοικημένη περιοχή πίνει νερό χαμηλής ποιότητας (κάτω από τα επιτρεπτά όρια), ποια η πιθανότητα να οφείλεται στην αποτυχία της χλωρίωσης;

(γ) Εάν το σύστημα χλωρίωσης αντικατασταθεί με ένα ποιο αξιόπιστο, πιθανότητα αποτυχίας 0,1, κατά πόσο περιορίζεται το ποσοστό ευθύνης της χλωρίωσης της ερώτησης (β);

Λύση

Θεωρώ τα γεγονότα

A={ικανοποιητική παροχή νερού}
X={επιτυχή χλωρίωση}
Φ={επιτυχή φιλτράρισμα}

(α) Το γεγονός *E* του οποίου ζητώ την πιθανότητα γράφεται με την ακόλουθη άλγεβρα γεγονότων

$$E=A\cap(X\cap \Phi)$$

Η πιθανότητά του *E* υπολογίζεται από την τομή των ανεξάρτητων γεγονότων ***A, X, Φ.***

$$P(E)=P(A\cap(X\cap \Phi))=P(A)P(X)P(\Phi)$$
$$=0{,}9*0{,}8*0{,}0{,}9=\ldots$$

(β) Ζητώ την πιθανότητα

$$P(\overline{X}\,|\,(\overline{X}\cup\overline{\Phi}))$$

Εφαρμόζω τον κανόνα της υπό συνθήκη πιθανότητας,

$$P(\overline{X}\,|\,(\overline{X}\cup\overline{\Phi}))=\frac{P(\overline{X}\cap(\overline{X}\cup\overline{\Phi}))}{P(\overline{X}\cup\overline{\Phi})}=\frac{P(\overline{X})}{P(\overline{X}\cup\overline{\Phi})}=\frac{0{,}2}{0{,}2+0{,}1-0{,}2*0{,}1}$$
$$=\frac{0{,}2}{0{,}28}$$

(γ) Βασικά υπολογίζω την πιθανότητα όπως και στην ερώτηση (β),

$$P(\overline{X}\,|\,(\overline{X}\cup\overline{\Phi}))=\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}1-0{,}1*0{,}1}=\frac{0{,}1}{0{,}19}$$

Άσκηση 2 *[Θέμα στις εξετάσεις Φεβρουαρίου 2002]*

(α) Η αντοχή συμπίεσης τσιμέντου έχει μία μέση τιμή 60.0 N/mm^2 και μία τυπική απόκλιση 5.0 N/mm^2 και υποτίθεται ότι ακολουθεί κανονική κατανομή.

(i) Ποια η πιθανότητα ότι σε ένα έλεγχο η αντοχή συμπίεσης τσιμέντου θα βρεθεί στο διάστημα από 50 μέχρι 75 N/mm^2;

(ii) Ποια η πιθανότητα ότι σε ένα έλεγχο 10 δοκιμών αντοχής συμπίεσης τσιμέντου όλες οι τιμές θα βρεθούν στο διάστημα από 50 μέχρι 75 N/mm^2;

(β) Η πιθανότητα ότι μία μηχανή κατασκευής πασσάλων θα πάθει βλάβη για κάθε 100 μέτρα πασσάλων που κάνει είναι 0,02.

(i) Ποια η πιθανότητα να παρουσιάσει βλάβη για πρώτη φορά μεταξύ της κατασκευής 1000 και 1100 μέτρων πασσάλων;

(ii) Αν η μηχανή κατασκευάζει 1000 μέτρα την εβδομάδα, κατά μέσο όρο κάθε πόσες εβδομάδες η μηχανή παρουσιάζει βλάβη;

Λύση

(α) Σε κάθε δοκιμή έχω μία σταθερή πιθανότητα ***p*** ότι η αντοχή του τσιμέντου θα πέσει μεταξύ 50 και 75 *N/mm^2*.

$$
\begin{aligned}
p = P(50 < X < 75) &= \Phi\left(\frac{75-60}{5}\right) - \Phi\left(\frac{50-60}{5}\right) = \Phi(3) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(3) - (1-\Phi(2)) = 0{,}9987 - 1 + 0{,}9772 \\
&= 0{,}9759
\end{aligned}
$$

διότι η τυχαία μεταβλητή ***X*** παριστάνει αντοχή και ακολουθεί **κανονική κατανομή** με **μέση τιμή 60** και τυπική **απόκλιση 5**.

Η πιθανότητα του γεγονότος ότι και στις δέκα δοκιμές η αντοχή θα βρεθεί στο διάστημα 50 με 75 μπορεί να βρεθεί από την **Διωνυμική κατανομή** αν θεωρήσω

n= 10 (δοκιμές)

p=0,9759

και αν Y είναι η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των επιτυχιών στις δέκα δοκιμές, Y={0, 1, 2, 3, …,10}, από τον τύπο της διωνυμικής έχω

$$
P(Y=10) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} p^{10}(1-p)^{10-10} = 1 * 0{,}9759^{10} * 1 = 0{,}9759^{10}
$$

(β) Εδώ θεωρώ ότι σε κάθε παραγωγή 100 μέτρων πασσάλων έχω μία δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα βλάβης (*επιτυχία*) ***p=0,02***.

Ζητώ την πιθανότητα να συμβεί η *επιτυχία* για πρώτη φορά στην ενδέκατη δοκιμή. Συμβολίζω με *X* την τυχαία μεταβλητή η οποία παριστάνει τον αριθμό δοκιμών μέχρι να φανεί για πρώτη φορά η *επιτυχία.* Η *X* ακολουθεί **Γεωμετρική κατανομή,**

$$
P(X = 11) = p(1-p)^{11-1} = 0{,}02(0{,}98)^{10}
$$

1. Βασικά, ζητώ τον μέσο αριθμό δοκιμών μεταξύ δύο διαδοχικών βλαβών ή ***περίοδο επαναφοράς*** της βλάβης όπως αλλιώς λέγεται. Δηλαδή, θέλουμε την μέση τιμή της μεταβλητής *X.* Στην γεωμετρική κατανομή η μέση τιμή της *X*, *E(X)* δίνεται από τον τύπο

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}02} = 50 \ \textit{δοκιμές}$$

Αφού την εβδομάδα έχουμε δέκα δοκιμές, συμπεραίνουμε ότι η *περίοδος επαναφοράς* της βλάβης είναι 5 εβδομάδες.

Άσκηση 3 *[Θέμα στις εξετάσεις Φεβρουαρίου 2004]*

Ένα φράγμα τεχνητής λίμνης βρίσκεται σε μία σεισμογενή περιοχή. Όταν συμβεί σεισμός, η πιθανότητα αστοχίας του φράγματος εξαρτάται από την ένταση του σεισμού και από το ύψος της επιφάνειας του νερού στη λίμνη την ώρα του σεισμού. Από παρατηρήσεις στο παρελθόν, μπορούμε να υποθέτουμε ότι το ύψος της επιφάνειας του νερού στην λίμνη μπορεί να είναι ψηλά ή χαμηλά με αντίστοιχες πιθανότητες 0,3 και 0,7. Ο σεισμός μπορεί να είναι ισχυρός, μέτριος ή ασθενής με αντίστοιχες πιθανότητες 0,2, 0,4 και 0,4.

Όταν συμβαίνει ισχυρός σεισμός, το φράγμα αστοχεί, άσχετα από το ύψος της επιφάνειας νερού στην λίμνη. Σε περίπτωση σεισμού μετρίας έντασης το φράγμα αστοχεί, αν το ύψος της επιφάνειας νερού βρίσκεται ψηλά, με πιθανότητα 70%. Στον ασθενή σεισμό το φράγμα δεν διατρέχει κανένα κίνδυνο.

(α) Ποια η πιθανότητα ότι το φράγμα θα υποχωρήσει στον επόμενο σεισμό;

(β) Γίνεται σεισμός και το φράγμα υποχωρεί. Ποια η πιθανότητα ότι η επιφάνεια του νερού της λίμνης ήταν ψηλά την ώρα του σεισμού;

Λύση

Όταν συμβαίνει σεισμός θεωρώ τα γεγονότα:

*Α*1={*η επιφάνεια του νερού είναι ψηλά*}
*Α*2={ *η επιφάνεια του νερού είναι χαμηλά*}
ΙΣ={*ο σεισμός είναι ισχυρός*}
Μ={*ο σεισμός είναι μέτριος*}
Α={*ο σεισμός είναι ασθενής*}

Επίσης, όταν συμβαίνει σεισμός θεωρώ το γεγονός

Ε={*το φράγμα αστοχεί*}.

(α) Ζητώ την πιθανότητα του γεγονότος *Ε*, **P(*E*)**. Αφού τα γεγονότα *Α1, Α2* αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου μπορώ να υπολογίσω *την* **P(*E*)** με τον νόμο της ολικής πιθανότητας,

$$\mathbf{P(E)} = P(E \mid A1)P(A1) + P(E \mid A2)P(A2)$$

Γνωρίζω τις πιθανότητες

$P(A1)=0{,}30$

$P(A2)=0{,}70$

Υπολογίζω τις πιθανότητες **$P(E \mid A1)$ και $P(E \mid A2)$** ως ακολούθως.

Επειδή τα γεγονότα ΙΣ, Μ, Α αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου για να υπολογίσω την πιθανότητα του γεγονότος **$(E \mid A1)$** εφαρμόζοντας πάλι τον νόμο της ολικής πιθανότητας

$$\mathbf{P(E \mid A1)} = P((E \mid A1) \mid \mathbf{ΙΣ})P(\mathbf{ΙΣ}) + P((E \mid A1) \mid \mathbf{M})P(\mathbf{M}) + P((E \mid A1) \mid \mathbf{A})P(\mathbf{A})$$
$$= P((E \mid (A1 \cap \mathbf{ΙΣ})) P(\mathbf{ΙΣ}) + P((E \mid (A1 \cap \mathbf{M}))P(\mathbf{M}) + P((E \mid (A1 \cap \mathbf{A}))P(\mathbf{A})$$
$$= 1(0{,}2) + 0{,}7(0{,}4) + 0(0{,}4) = \mathbf{0{,}48}$$

Η πιθανότητα του γεγονότος **$(E \mid A2)$** βρίσκεται εύκολα αν σκεφτούμε ότι σε περίπτωση σεισμού με χαμηλά την επιφάνεια του νερού το φράγμα αστοχεί μόνον αν ο σεισμός είναι ισχυρός, δηλαδή

$$\mathbf{P(E \mid A2) = 0{,}2}$$

Αντικαθιστώ τις πιθανότητες στον νόμο της ολικής πιθανότητας

***P*(*E*)=** $P(E|A1)\,P(A1)+P(E|A2)\,P(A2)$

***P*(*E*)=**0,48*0,3+0,2*0,7=0,144+0,14**=0,284**

(β) Ζητώ την πιθανότητα **P(A1|E).** Εφαρμόζω το Θεώρημα Bayes,

P(A1|E)= $P(E|A1)\,P(A1)/$ ***P*(*E*)**

=0,48*0,3/0,284=0,144/0,284

Άσκηση 4 *[Θέμα στις εξετάσεις Φεβρουαρίου 2004]*

Σε μία περιοχή ο αριθμός ισχυρών νεροποντών ακολουθεί Poisson κατανομή με μέσο αριθμό 1 νεροποντή στα 4 χρόνια.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι στα επόμενα 8 χρόνια

- δεν θα έχουμε ισχυρή νεροποντή;
- θα έχουμε πάνω από 2 ισχυρές νεροποντές;

Στην περιοχή αυτή βρίσκεται ένας ποταμός ο οποίος όταν συμβαίνει ισχυρή νεροποντή ξεχειλίζει με πιθανότητα 0,06.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα πλημμύρας του ποταμού σε 4 ισχυρές νεροποντές.

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα πλημμύρας του ποταμού στα επόμενα 4 χρόνια.

Λύση

Ο μέσος αριθμός νεροποντών ανά χρόνο είναι

λ=1/4=0,25

(α) Θεωρώ σαν X_8 την τυχαία μεταβλητή η οποία παριστάνει τον αριθμό νεροποντών σε οκτώ χρόνια και η οποία ακολουθεί Poisson κατανομή

- **P(X$_8$=0)=**$e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^0}{0!}=e^{-0,25(8)}\dfrac{(0,25(8))^0}{0!}=e^{-2}=\ldots$
- **P(X$_8$>2)=1- P(X$_8$≤2)=1- (P(X$_8$=0)+ P(X$_8$=1)+ P(X$_8$=2))**

$$=1-(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!}+e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^1}{1!}+e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!}0$$

$$=1-(e^{-2}\frac{(2)^0}{0!}+e^{-2}\frac{(2)^1}{1!}+e^{-2}\frac{(2)^2}{2!})=\ldots$$

(β) Θα υπολογίσω την πιθανότητα του συμπληρωματικού γεγονότος και θα την αφαιρέσω από την μονάδα. Δηλαδή θα υπολογίσω την πιθανότητα να μην υπάρξει πλημμύρα σε 4 νεροποντές και θα το αφαιρέσω από την μονάδα.

P({*πλημμύρας σε 4 νεροποντές*})=1-P({*όχι πλημμύρα σε 4 νεροποντές*})

=1-0,94*0,94*0,94*0,94=….

Διότι σε κάθε νεροποντή η πιθανότητα πλημμύρας είναι ανεξάρτητη από τι συνέβη στις προηγούμενες νεροποντές (γεγονότα ανεξάρτητα).

(γ) Συμβολίζω με *E* το γεγονός

E*={όχι** *πλημμύρα στα επόμενα 4 χρόνια}**

Την πιθανότητα του *E* να την υπολογίσω αν ξέρω ότι στα επόμενα 4 χρόνια θα συμβούν

A0={ 0 νεροποντές}
A1={1 νεροποντή}
A2={2 νεροποντές}
A3={3 νεροποντές}
A4={4 νεροποντές}
A5={5 νεροποντές}

Α6={6 νεροποντές}

……….

Τις πιθανότητες των γεγονότων *Α0, Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6,* ……… τα οποία αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου μπορώ να υπολογίσω όπως ακολουθεί

$$P(A0)=P(X_4=0)=e^{-1}\frac{(1)^0}{0!}=e^{-1}=\dots$$

$$P(A1)=P(X_4=1)=e^{-1}\frac{(1)^1}{1!}=e^{-1}=\dots$$

$$P(A2)=P(X_4=2)=e^{-1}\frac{(1)^2}{2!}=0{,}5e^{-1}=\dots$$

$$P(A3)=P(X_4=3)=e^{-1}\frac{(1)^3}{3!}=(1/6)e^{-1}=\dots$$

$$P(A4)=P(X_4=4)=e^{-1}\frac{(1)4}{4!}=(1/24)e^{-1}=\dots$$

………………………

συνεχίζουμε μέχρι που η πιθανότητα ***P(Ακ)*** γίνεται αμελητέα.

Η πιθανότητα του *Ε* προκύπτει από τον νόμο της ολικής πιθανότητας

$$\boldsymbol{P(E)}=P(E/A0)P(A0)+P(E/A1)P(A1)+P(E/A2)P(A2)+\dots\dots$$

όπου *P(A0), P(A1), P(A2),* … υπολογίστηκαν παραπάνω, τα δε *P(E/A0), P(E/A1), P(E/A2)*…....υπολογίζονται όπως στην απάντηση (β),

P(E/A0)=1

P(E/A1)=0,94

P(E/A2)=0,94*0,94

P(E/A3)=0,94*0,94*0,94

....

Τέλος, η ζητούμενη πιθανότητα βρίσκεται αν από την μονάδα αφαιρέσω την πιθανότητα του γεγονότος *Ε*,

1-***P(E)***