ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αναλυτική Φωτογραμμετρία

Ενότητα # **3**: Μαθηματικό υπόβαθρο Αναλυτικής Φωτογραμμετρίας

Καθηγήτρια Όλγα Γεωργούλα
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μαθηματικό υπόβαθρο Αναλυτικής Φωτογραμμετρίας

Ενότητα 3

Περιεχόμενα 3ης ενότητας

1. Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας
    1. Διανυσματική Εξίσωση Συγγραμμικότητας
    2. Διανυσματική Εξίσωση Συνεπιπεδότητας
    3. Αλλαγή βάσης στο επίπεδο και στο χώρο
    4. Πίνακας στροφής
2. Συστήματα αναφοράς στη φωτογραμμετρία
    - Αναλογική από αέρα λήψη
    - Ο πίνακας στροφής R
    - Επίγεια ψηφιακή λήψη
3. Συνορθώσεις
    1. Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων
    2. Η μέθοδος των μικτών εξισώσεων

Στόχοι ενότητας

- Η θεωρητική κατανόηση του βασικού μαθηματικού υπόβαθρου της αναλυτικής φωτογραμμετρίας. Αναλυτικότερα:
- Δίνονται στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας, στα οποία βασίζονται οι διανυσματικές σχέσεις της συγγραμμικότητας και της συνεπιπεδότητας.
- Περιγράφονται και επεξηγούνται τα συστήματα αναφοράς των από αέρα και επιγείων λήψεων καθώς και ο πίνακας στροφής R, ο οποίος περιγράφει τον προσανατολισμό του άξονα λήψης.
- Γίνεται μια ανασκόπηση των μεθόδων συνόρθωσης βάσει των οποίων επιλύονται τα προβλήματα της Αναλυτικής Φωτογραμμετρίας

Λέξεις κλειδιά

- Διανυσματική Εξίσωση Συγγραμμικότητας
- Διανυσματική Εξίσωση Συνεπιπεδότητας
- Συστήματα αναφοράς στη φωτογραμμετρία
- Ο πίνακας στροφής R στη φωτογραμμετρία

1. Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας

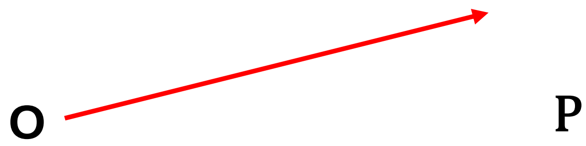
Διανύσματα

- Διάνυσμα: φυσικό μέγεθος με διεύθυνση και φορά

- Διάνυσμα θέσης: έχοντας ορίσει σημείο O, σε κάθε σημείο P αντιστοιχεί ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, με αρχή το O και κορυφή το P

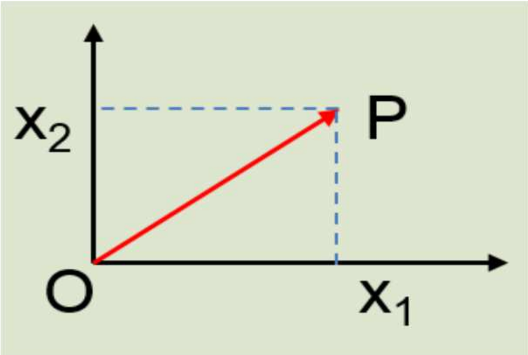
- Τα σημεία του επιπέδου και του χώρου αντίστοιχα παριστάνονται με τη βοήθεια της επιλεγμένης αρχής των συντεταγμένων O, από τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP}$$

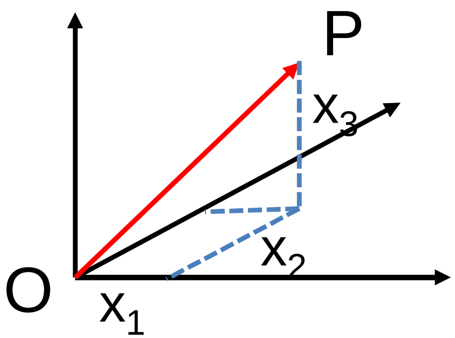


Διάνυσμα θέσης – σημείο (1/2)

Σημείο στο επίπεδο



Σημείο στο χώρο



$\vec{x} = \overrightarrow{OP}$

=

$x= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ όπου x_1, x_2 οι συνιστώσες

του διανύσματος θέσης $\overrightarrow{OP}$
ή οι συντεταγμένες του σημείου P

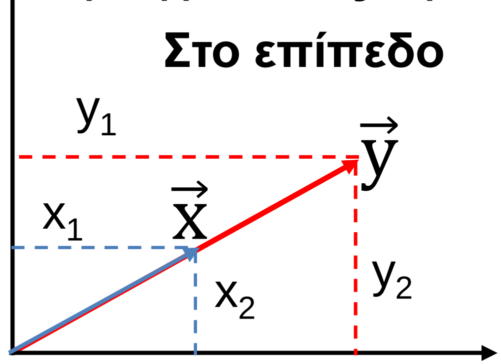
$x= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

όπου x_1, x_2, x_3 οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης $\overrightarrow{OP}$ ή οι συντεταγμένες του σημείου P

Διάνυσμα θέσης – σημείο (2/2)

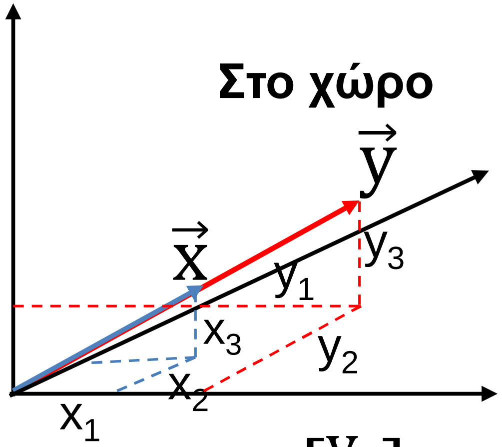
Συγγραμμικά ονομάζονται δύο διανύσματα θέσης $\vec{x}$ και $\vec{y}$, εφαρμοστά στην αρχή O συν/νων όταν οι κορυφές τους είναι σημεία πάνω σε ευθεία που να διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων. Αν λ πραγματικός αριθμός, τότε :

Στο επίπεδο



$$\vec{y} = \lambda\,\vec{x} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Στο χώρο



$$\vec{y} = \lambda\,\vec{x} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Η διανυσματική εξίσωση συγγραμμικότητας $\boxed{\vec{y} = \lambda\,\vec{x}}$ **αποτελεί βασική συνθήκη της Αναλυτικής Φωτογραμμετρίας**

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Αν συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{x} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{y} = \overrightarrow{OB}$ και θ η μεταξύ τους γωνία, τότε ορίζεται ως

Εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{x}.\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta$$

Ορθογώνια διανύσματα όταν $\vec{x}.\vec{y} = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Το εσ. γινόμενο εκφράζεται ως:

$$\vec{x}.\vec{y} = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x^T y = y^T x$$

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{x} \Lambda \vec{y}$ δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα $\vec{z}$ κάθετο στο επίπεδο των $\vec{x}$ και $\vec{y}$, με φορά τέτοια ώστε η τριάδα $\vec{x}$,$\vec{y}$ και $\vec{x} \Lambda \vec{y}$ να είναι δεξιόστροφη και μήκος

$|\vec{x} \Lambda \vec{y}|=|\vec{z}| = |\vec{x}|\ |\vec{y}|$sinθ

Οι συνιστώσες του $\vec{z}$ είναι $\mathbf{z} = |\mathbf{x} \Lambda |\ \mathbf{y}$

ή αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Μικτό γινόμενο διανυσμάτων

Ως μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ ορίζεται το τριπλό γινόμενο

$$\vec{x} \,.\, (\vec{y} \wedge \vec{z}) = \mathbf{x}^{T}[\,\mathbf{y}\wedge]\mathbf{z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Όταν $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ συνεπίπεδα τότε $\mathbf{x}^{T}[\,\mathbf{y}\wedge]\mathbf{z} = 0$

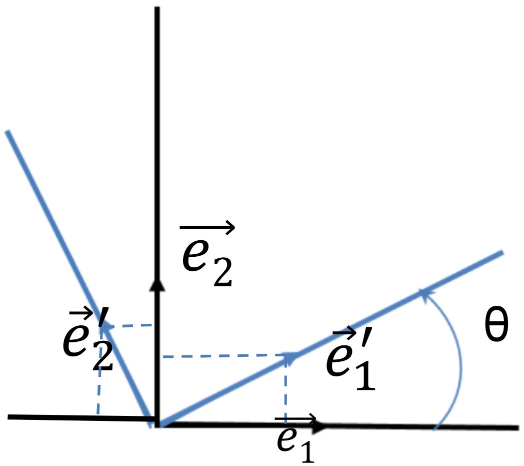
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0$$

Η διανυσματική εξίσωση συνεπιπεδότητας τριών διανυσμάτων

$$\boxed{\mathbf{x}^{T}[\,\mathbf{y}\wedge]\mathbf{z} = 0}$$

αποτελεί βασική συνθήκη της Α.Φ

Αλλαγή βάσης και συνιστωσών στο επίπεδο (1/2)



$\vec{e}'_1 = b_{11}\overrightarrow{e_1} + b_{12}\,\overrightarrow{e_2}$

$\vec{e}'_2 = b_{21}\overrightarrow{e_1} + b_{22}\,\overrightarrow{e_2}$ και

$\overrightarrow{e_1} = c_{11}\vec{e}'_1 + c_{12}\,\vec{e}'_2$

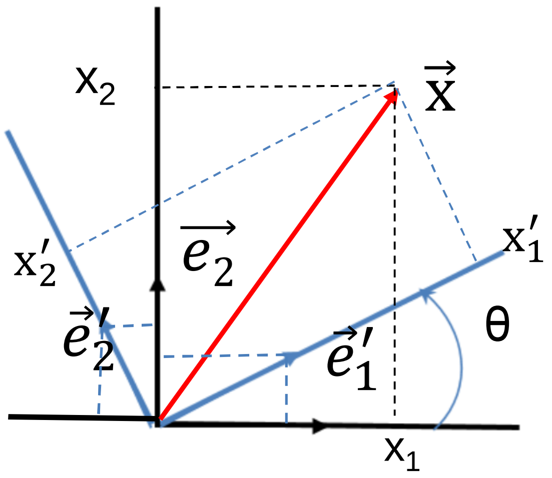
$\overrightarrow{e_2} = c_{21}\vec{e}'_1 + c_{22}\,\vec{e}'_2$

$$e' = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\, e \rightarrow e = \mathbf{B}^{-1}\, e'$$

$$e = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C\, e'}$$

Προφανώς $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}$

Αλλαγή βάσης και συνιστωσών στο επίπεδο (2/2)



Επίσης αν $\vec{x}$ διάνυσμα θέσης, αυτό εκφράζεται ως:

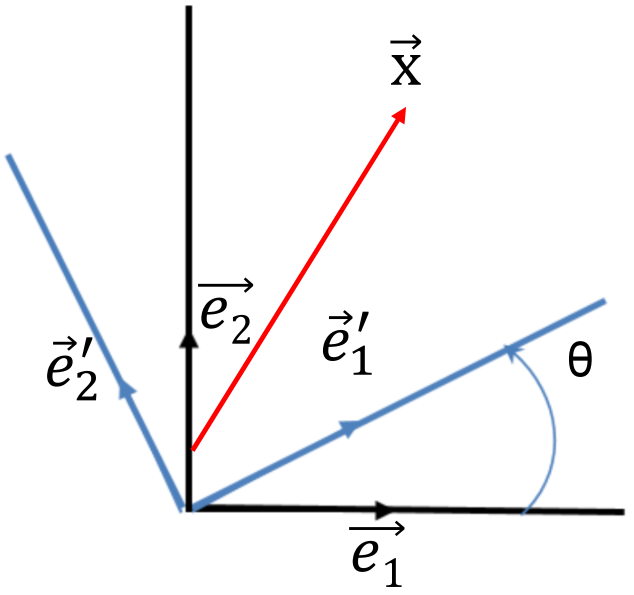
$$\vec{x} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} = x_1' \vec{e}_1' + x_2' \vec{e}_2'$$

$$\vec{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{e} = (\mathbf{x}')^T \mathbf{e}' = (\mathbf{x}')^T \mathbf{B}\mathbf{e} \rightarrow$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^T \mathbf{x}' = (\mathbf{C}^{-1})^T \mathbf{x}' \quad \text{και}$$

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}$$

Πίνακας περιστροφής στο επίπεδο



Ισχύει

$=x_1 \; + x_2 \;\; = + =.$ και

$= \, . \, = \, .= {}_i$

$b_{11}=. \; =\cos\theta = \cos\theta$

$b_{12}=. \; =\cos(- \theta) = \sin\theta$

$b_{21}=. \; =\cos(+ \theta) = -\sin\theta$

$b_{22}=. \; =\cos\theta = \cos\theta$

Ο πίνακας **B**= **R**(θ) = $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ονομάζεται πίνακας περιστροφής

Πίνακας περιστροφής

Οι πίνακες περιστροφής είναι ορθογώνιοι πίνακες και ισχύει

$$\mathbf{R}_{(\theta)}\,\mathbf{R}^{T}_{(\theta)} = \mathbf{I}$$

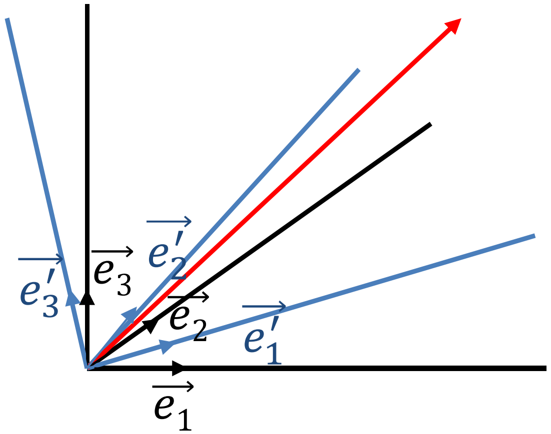
επίσης

$$\mathbf{R}^{-1}_{(\theta)} = \mathbf{R}^{T}_{(\theta)} = \mathbf{R}_{(-\theta)}$$

$$\left[\mathbf{R}^{T}_{(\theta)}\right]^{-1} = \mathbf{R}_{(\theta)}$$

$$\mathbf{R}_{(0)} = \mathbf{I}$$

Αλλαγή βάσης στο χώρο



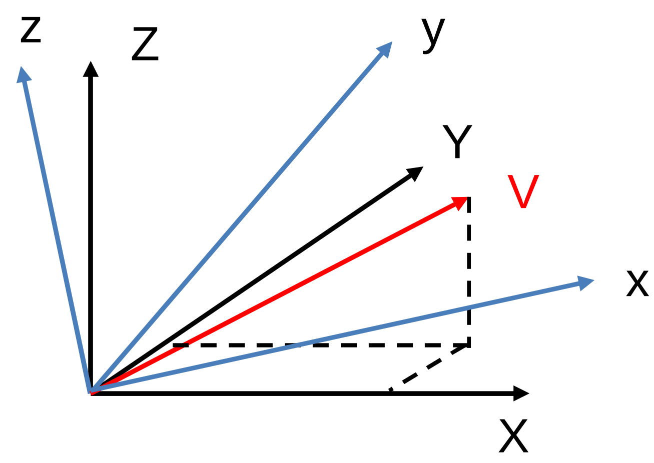
Αντίστοιχα η αλλαγή βάσης στο χώρο περιγράφεται από πίνακα R

$$e' = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix} = \mathbf{R\ e}$$

$$r_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e_j}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\vec{e}_1' \ \vec{e_1}) & \cos(\vec{e}_1' \ \vec{e_2}) & \cos(\vec{e}_1' \ \vec{e_3}) \\ \cos(\vec{e}_2' \ \vec{e_1}) & \cos(\vec{e}_2' \ \vec{e_2}) & \cos(\vec{e}_2' \ \vec{e_3}) \\ \cos(\vec{e}_3' \ \vec{e_1}) & \cos(\vec{e}_3' \ \vec{e_2}) & \cos(\vec{e}_3' \ \vec{e_3}) \end{bmatrix}$$

Αλλαγή συνιστωσών στο χώρο



$$R = \begin{bmatrix} \cos xX & \cos yX & \cos zX \\ \cos xY & \cos yY & \cos zY \\ \cos xZ & \cos yZ & \cos zZ \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας R εκφράζεται με τα συνημίτονα διευθύνσεως, ενώ επίσης είναι δυνατό να εκφρασθεί με τη βοήθεια τριών γωνιών π.χ

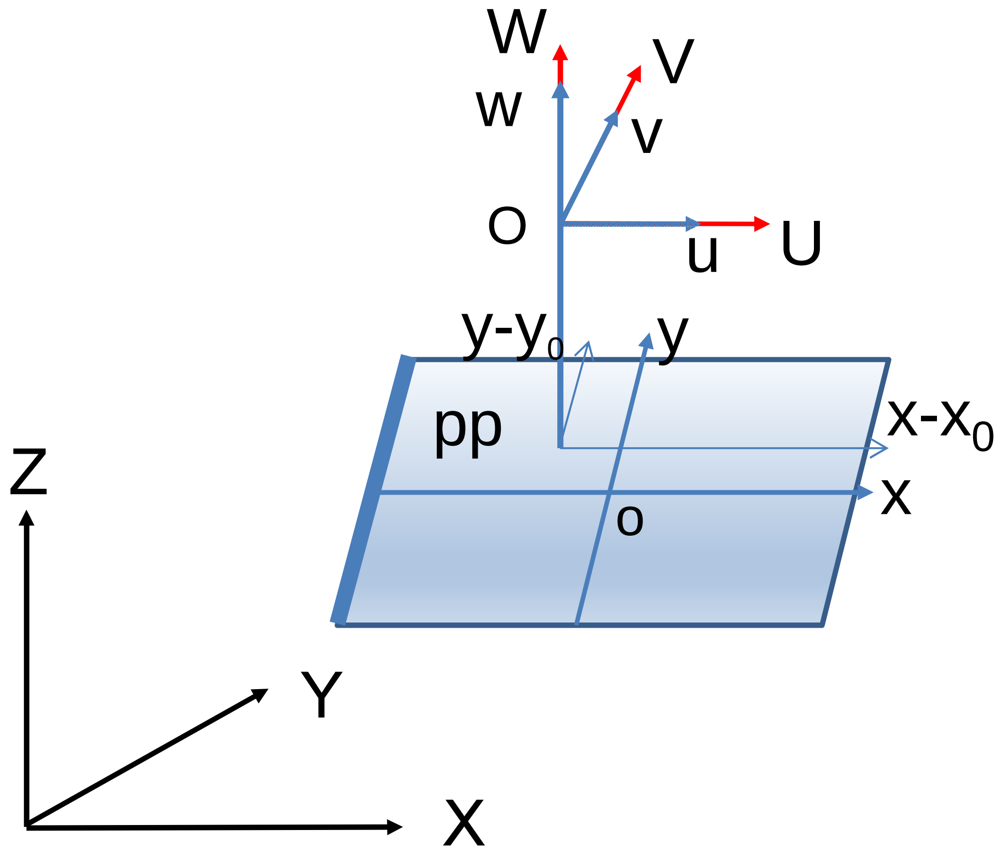
- γωνίες Euler(φ,θ,ψ) ή
- γωνίες Gardan(ω,φ,κ) ή
- γωνίες α, t, s (αζιμούθιο, κλίση, στρέψη)

Αν V διάνυσμα στο χώρο, τότε οι συνιστώσες του (ή οι συν/νες της κορυφής του) στα δύο συστήματα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

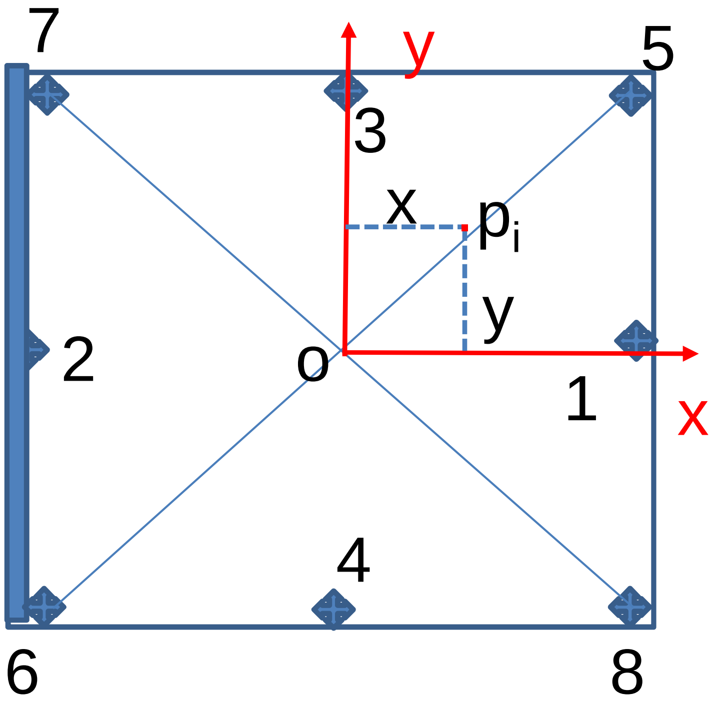
2. Συστήματα αναφοράς στη Φωτογραμμετρία

Συστήματα αναφοράς στη Φωτογραμμετρία



- Σύστημα αναφοράς φωτογραφικού επιπέδου ή σύστημα εικονοσημείων (x,y)
- Σύστημα αναφοράς της φωτογραφίας (u,v,w)
- Σύστημα αναφοράς της φωτογραφικής λήψης (U,V,W)
- Επίγειο σύστημα αναφοράς (X,Y,Z)

Σύστημα φωτογραφικού επιπέδου ή σύστημα εικονοσημείων (x,y) αναλογικής φωτογραφίας

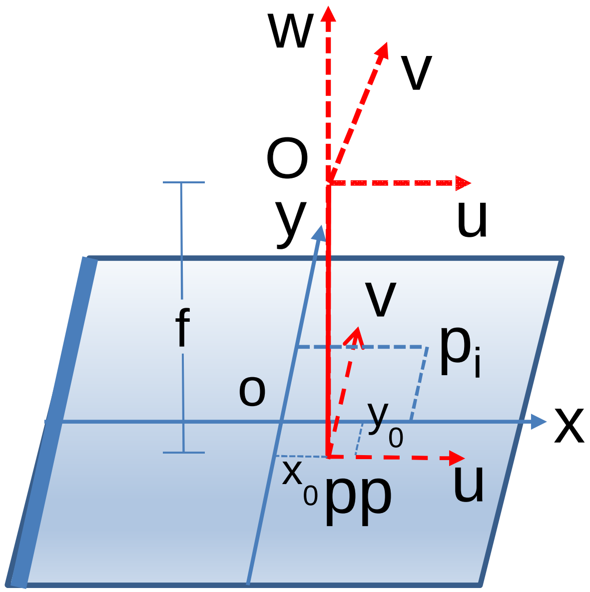


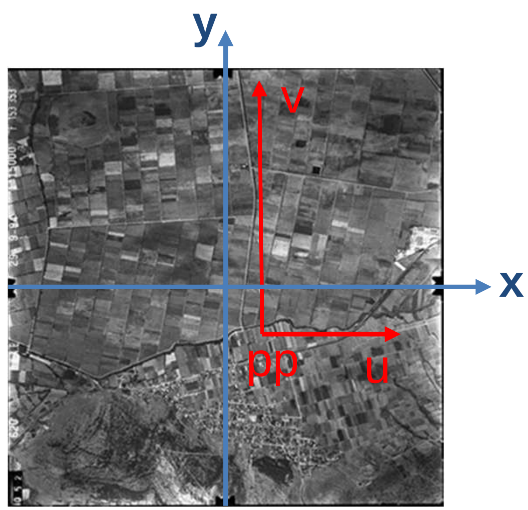
Συν/νες εικονοσημείων

	x(mm)	y (mm)
1	112.997	-0.005
2	-113.001	-0.006
3	-0.004	112.999
4	-0.005	-112.993
5	112.989	112.996
6	-113.002	-113.000
7	-113.006	112.995
8	112.991	-113.010

Ορίζεται με τη βοήθεια των (4 ή 8) εικονοσημείων. Στο σύστημα (x,y) αναφέρονται οι συν/νες των εικονοσημείων οι οποίες δίνονται στην αναφορά βαθμονόμησης της μηχανής (calibration report)
Στο σύστημα αυτό οι συντεταγμένες ενός σημείου i είναι p_i (x,y)

Σύστημα αναφοράς της φωτογραφίας (u,v,w) (ενδιάμεσο βοηθητικό σύστημα)





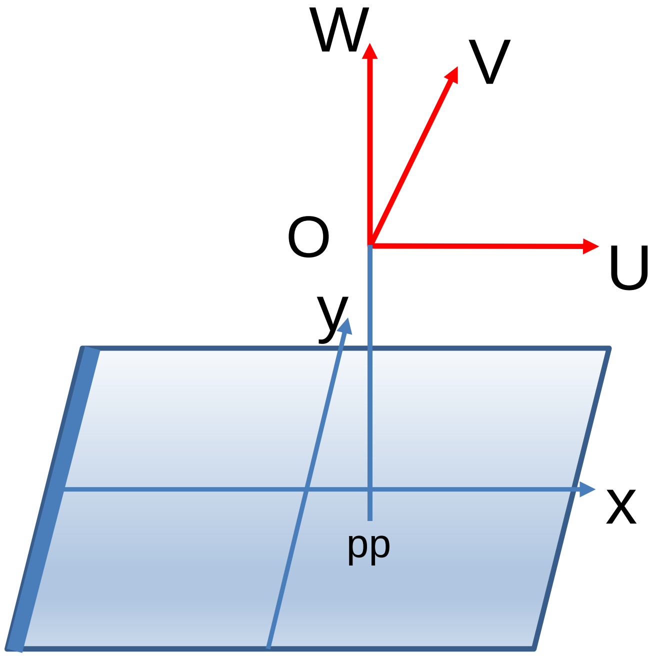
PP → πρωτεύον σημείο, με συν/νες
x_0 = 0.007mm
y_0 = -0.015mm

Στο σύστημα (u,v,w), οι 3D συν/νες ενός σημείου p_i της εικόνας είναι:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \\ -f \end{bmatrix}$$

Πρόκειται για σύστημα 3D συν/νων με αρχή το κέντρο λήψης O.
Ο προσανατολισμός των αξόνων και η θετική φορά είναι:
u//x → ίδια φορά
v//y → ίδια φορά
w → στη διεύθυνση του άξονα λήψης και αντίθετη φορά

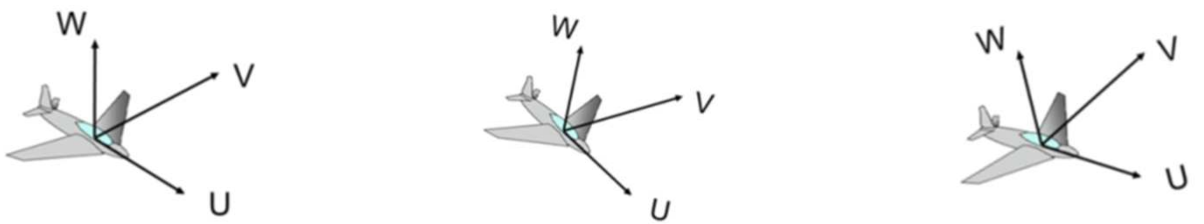
Σύστημα αναφοράς της λήψης (U,V,W)



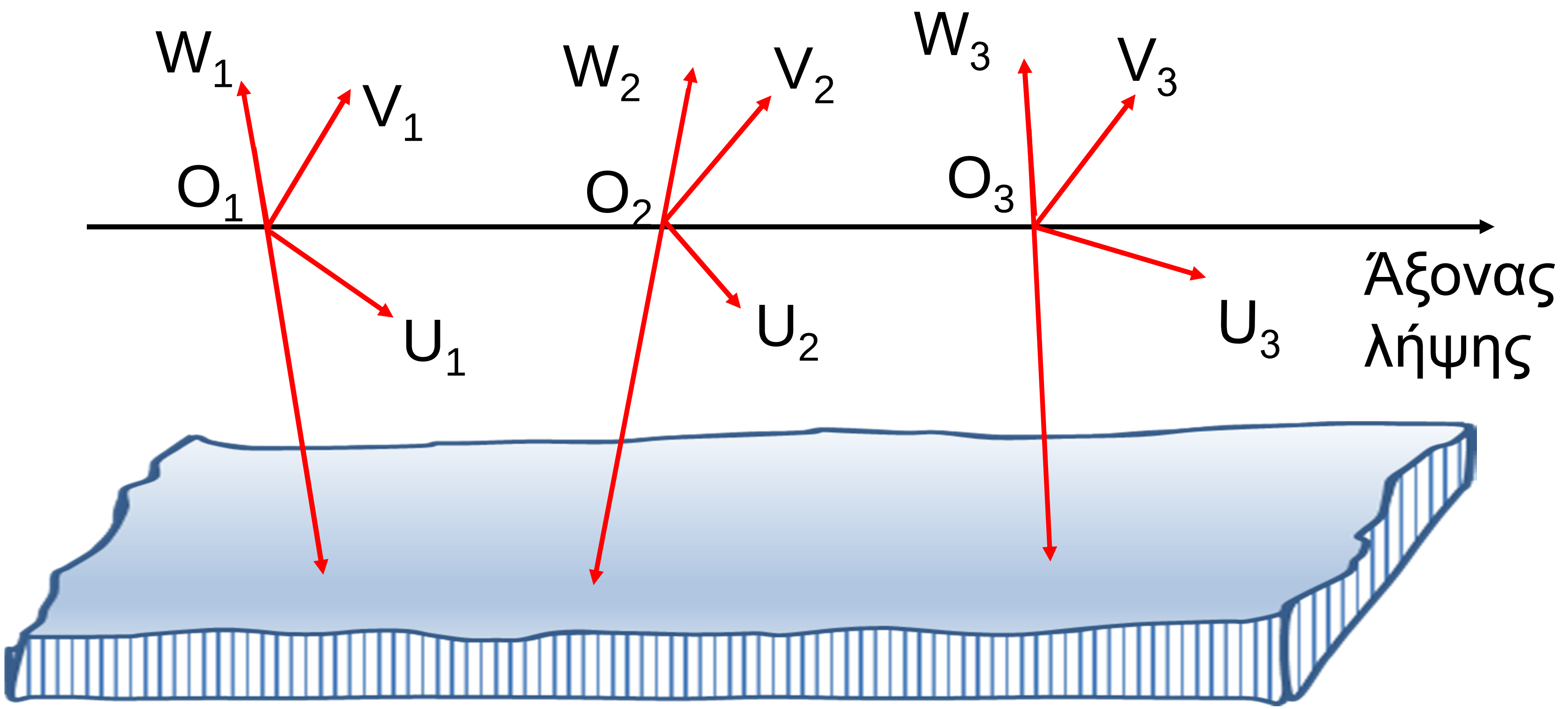
Το σύστημα (U,V,W) της λήψης, έχει αρχή το κέντρο λήψης Ο.
Ο προσανατολισμός των αξόνων και η θετική φορά είναι:

U//x → ίδια φορά
V//y → ίδια φορά
W → στη διεύθυνση του άξονα λήψης και αντίθετη φορά

Το σύστημα (U,V,W) είναι άκαμπτα συνδεδεμένο με τη μηχανή λήψης



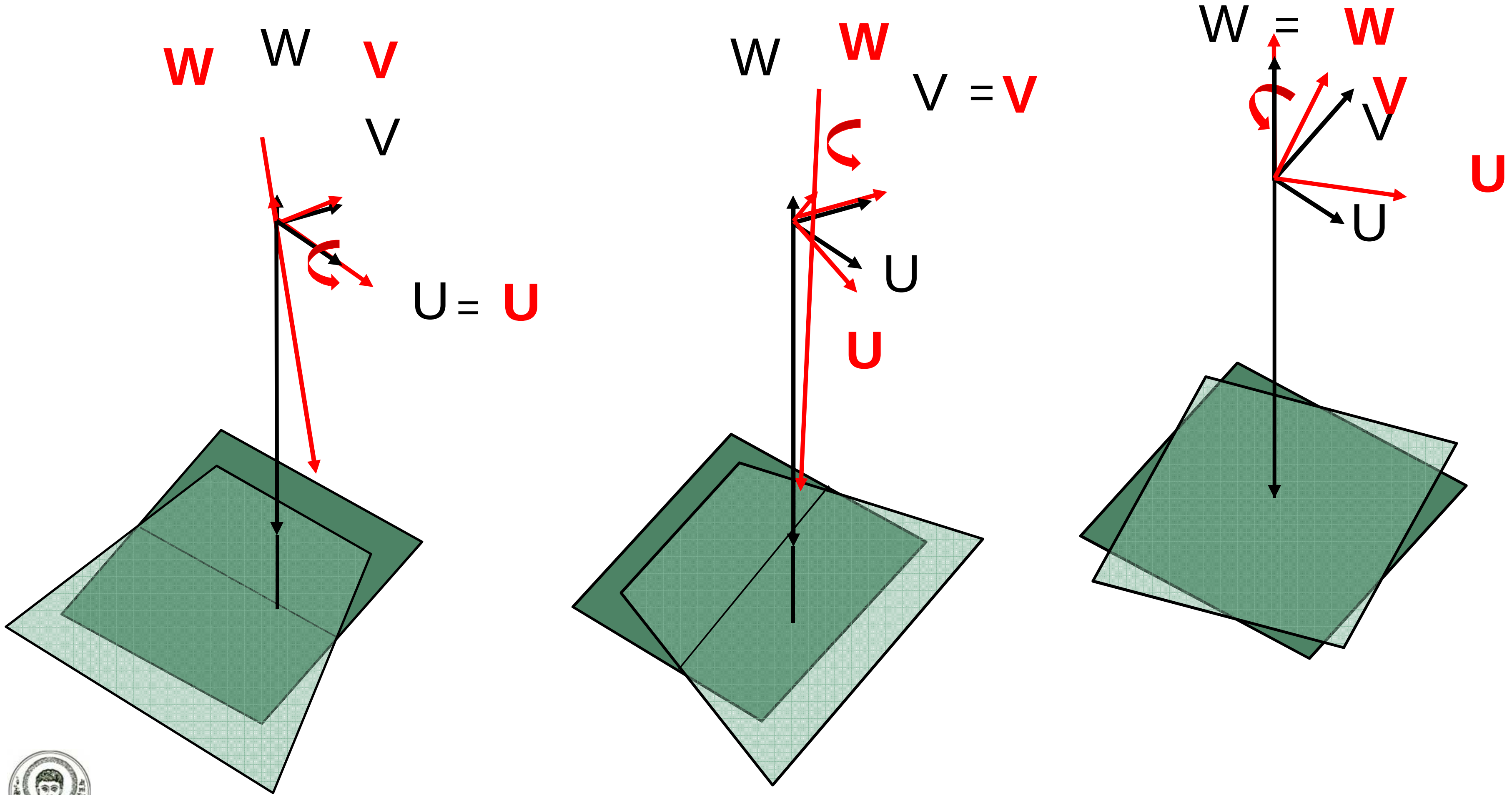
Σύστημα αναφοράς της λήψης j



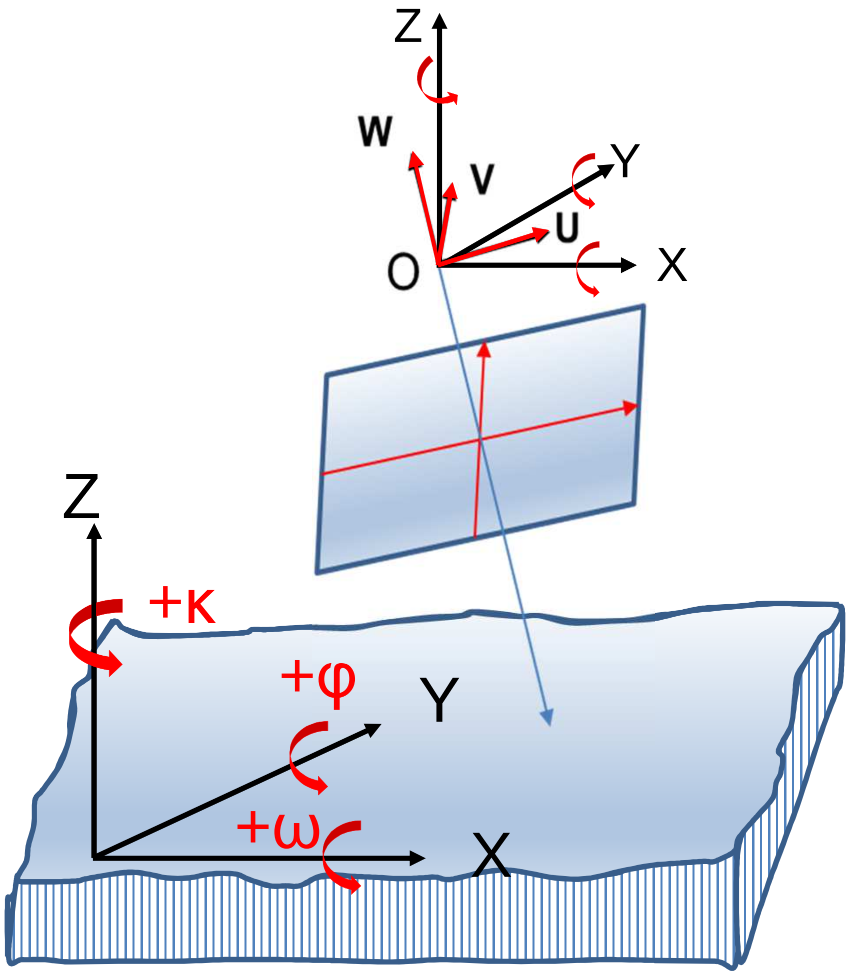
- Σε κάθε θέση λήψης O_j όπου j=1,2,…, υλοποιείται ένα αντίστοιχο σύστημα αναφοράς λήψης $(U,V,W)_j$
- Με τη βοήθεια του συστήματος $(U,V,W)_j$ προσδιορίζεται η θέση λήψης και ο προσανατολισμός του άξονα λήψης ως προς επίγειο σύστημα αναφοράς (X,Y,Z), δηλαδή ο Εξ.προσανατολισμός της λήψης j

Αποτέλεσμα στροφών περί τους άξονες U, V, W

Διαφορετικοί προσανατολισμοί άξονα λήψης



Προσανατολισμός λήψης



Περιγράφεται με τη βοήθεια του πίνακα R, ο οποίος εκφράζεται συναρτήσει τριών γωνιών, τις:

(Roll) ω: περιστροφή περί τον X
(Pitch) φ: περιστροφή περί τον Y
(Yaw) κ: περιστροφή περί τον Z

ώστε το σύστημα (X,Y,Z) να ταυτισθεί με το σύστημα (U,V,W)
Διεθνώς, είναι ο επικρατέστερος τρόπος ορισμού του πίνακα R

Πίνακας στροφής R (1/2)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\kappa)\ \mathbf{R}(\varphi)\ \mathbf{R}(\omega)$$

$$\mathbf{R}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\kappa) = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

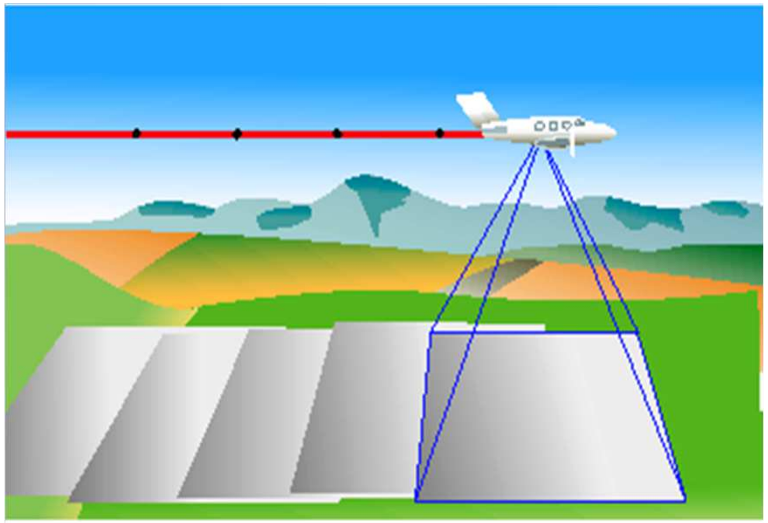
Πίνακας στροφής R (2/2)

Αναλυτικά τα στοιχεία του πίνακα **R** είναι:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\kappa)\,\mathbf{R}(\varphi)\,\mathbf{R}(\omega) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\kappa \cos\varphi & \cos\kappa \sin\varphi \sin\omega + \sin\kappa\cos\omega & -\cos\kappa \sin\varphi \cos\omega + \sin\kappa \sin\omega \\ -\sin\kappa \cos\varphi & -\sin\kappa \sin\varphi \sin\omega + \cos\kappa \cos\omega & \sin\kappa \sin\varphi \cos\omega + \cos\kappa \sin\omega \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\omega & \cos\varphi \cos\omega \end{bmatrix}$$

Προσανατολισμός λήψης



Η γεωμετρία λήψης στις εναέριες λήψεις είναι τυπική → επικαλυπτόμενες κατακόρυφες λήψεις

- Οι γωνίες στροφής ω και φ είναι πολύ μικρές, δηλαδή προσεγγιστικά $\omega \sim \varphi \sim 0$
- Η γωνία κ, αντιστοιχεί στο αζιμούθιο του άξονα λήψης

Επίγειο Σύστημα Αναφοράς

Το επίγειο σύστημα αναφοράς, στο οποίο θα προσδιοριστούν φωτογραμμετρικά τα στοιχεία εξωτερικού προσανατολισμού λήψεων ή/και οι συν/νες αγνώστων σημείων ορίζεται από το σύστημα στο οποίο έχουν μετρηθεί τα γνωστά σημεία (Ground Control Points) τα οποία είναι απαραίτητα και χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία των εικόνων

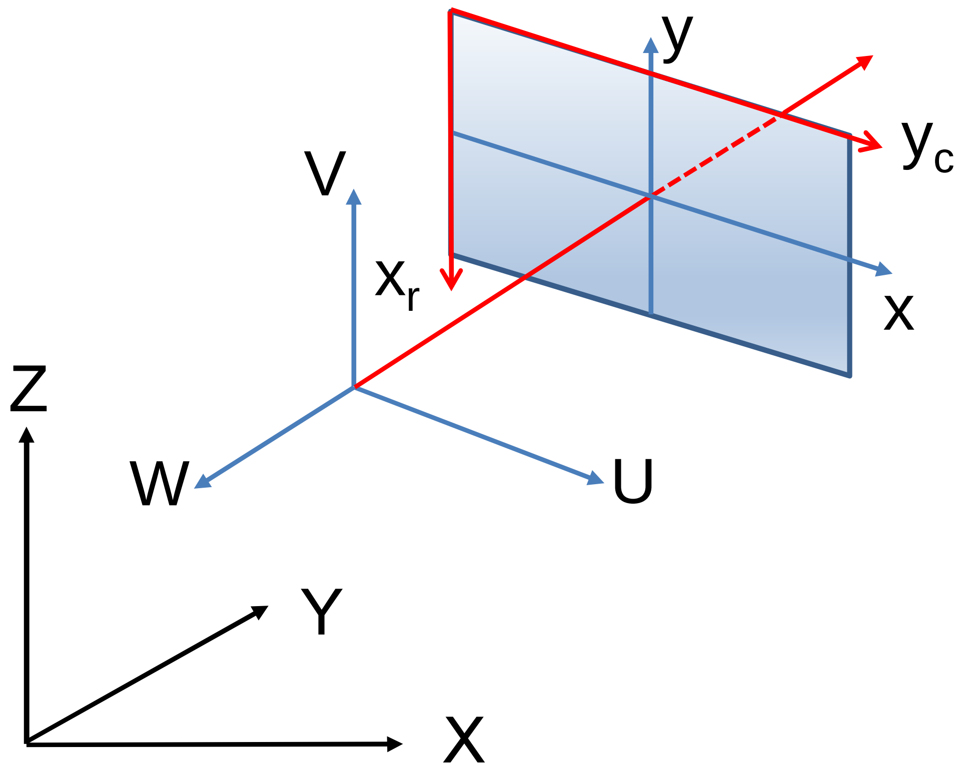
Επίγειο Σύστημα Αναφοράς Εναέριες εφαρμογές

Τα Σημεία ελέγχου προσδιορίζονται:

- Επίγειες μετρήσεις με Τοπογραφικά όργανα ή GPS
- Από ψηφιοποίηση υπάρχοντος και κατάλληλης κλίμακας χαρτογραφικού υπόβαθρου

Ανεξάρτητα από τη μέθοδο, η οποία εφαρμόσθηκε για τον προσδιορισμό τους, τα σημεία ελέγχου μετασχηματίζονται, έτσι ώστε τελικά να αναφέρονται στο Ελληνικό Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (Γεωδαιτικό datum) → **ΕΓΣΑ 87**

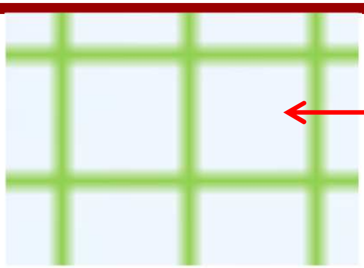
Συστήματα αναφοράς σε επίγειες λήψεις



Σήμερα, οι επίγειες λήψεις, ή γενικότερα οι λήψεις εγγύς απόστασης, πραγματοποιούνται με ερασιτεχνικές ψηφιακές μηχανές

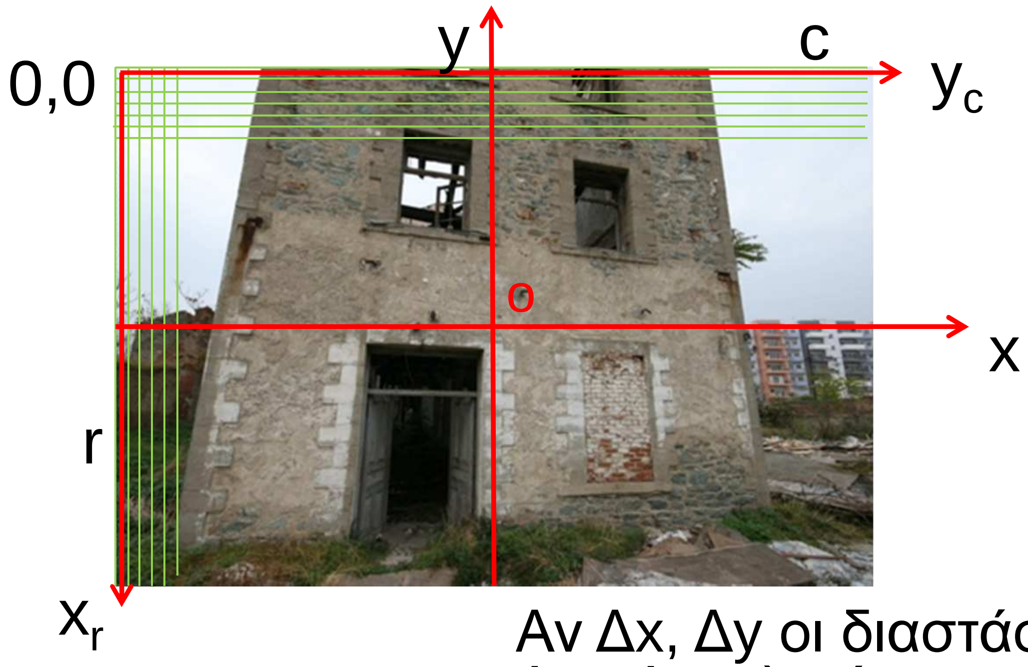
- Σύστημα εικονοψηφίδων x_r, y_c
- Σύστημα αναφοράς φωτογραφικού επιπέδου (x,y)
- Σύστημα αναφοράς της φωτογραφικής λήψης (U,V,W)
- Επίγειο σύστημα αναφοράς (X,Y,Z)

Σύστημα εικονοψηφίδων x_r, y_c

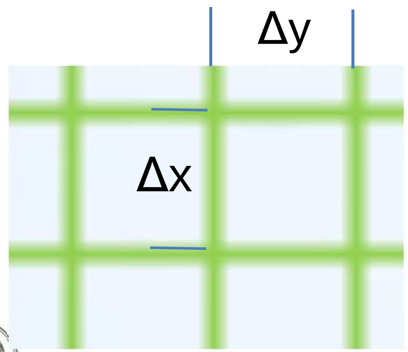


Ένα σημείο έχει συντεταγμένες $p(x_r, y_c)$

Σύστημα αναφοράς φωτογραφικού επιπέδου (x,y)



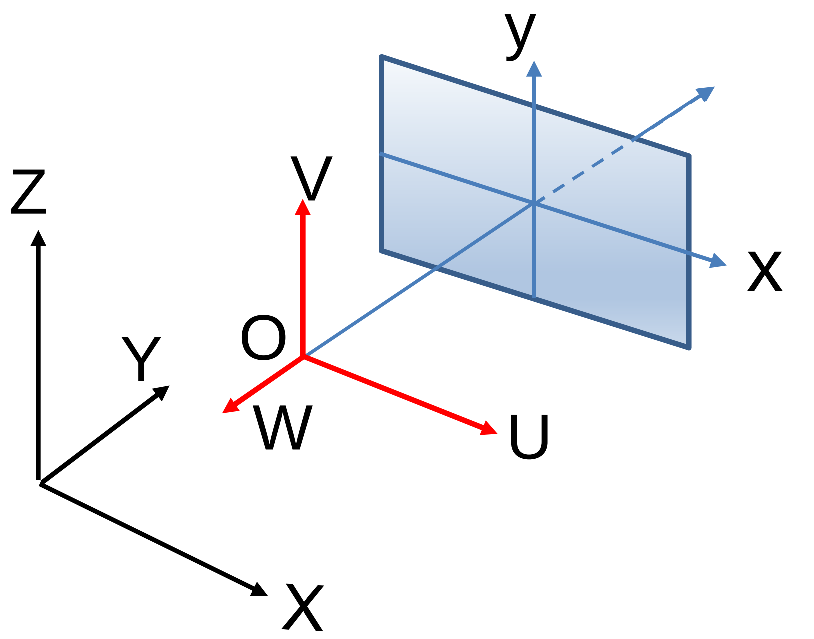
Αρχή του συστήματος θεωρείται η κεντρική ψηφίδα o(n,m)
O άξονας x αντιστοιχεί στην μεσαία γραμμή (n) και ο άξονας y στη μεσαία στήλη (m) εικονοψηφίδων



Αν Δx, Δy οι διαστάσεις της ψηφίδας (συνήθως Δx= Δy=s), τότε οι συν/νες ενός σημείου $p(x_r,y_c)$ στο σύστημα (x,y) είναι

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_c - co)\Delta y \\ -(x_r - ro)\Delta x \end{bmatrix}$$ όπου c_o, r_o οι συν/νες της κεντρικής ψηφίδας

Σύστημα φωτογραφικής λήψης (U,V,W)



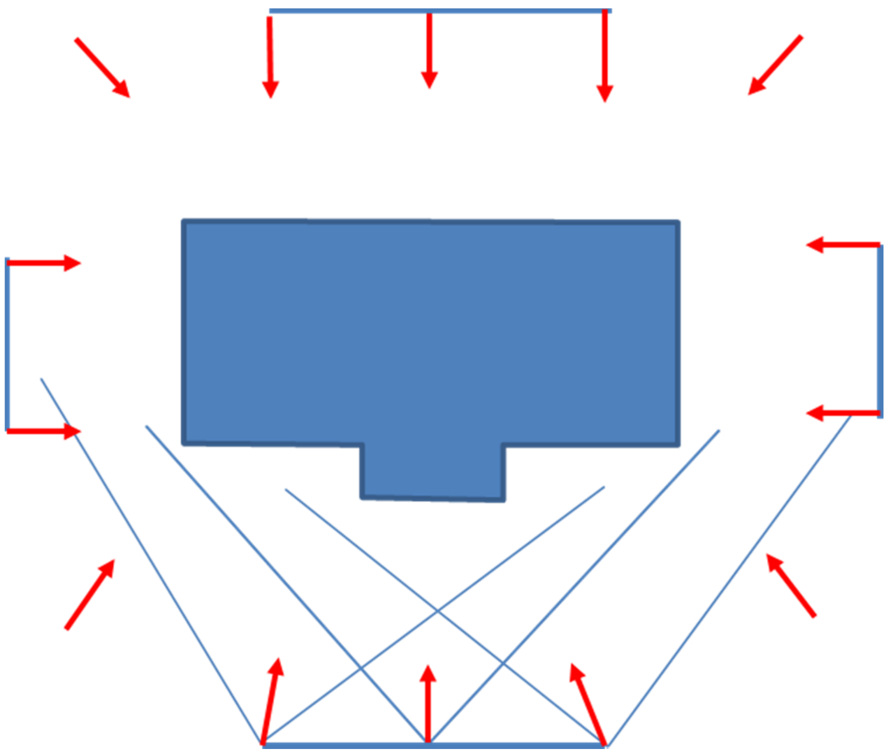
Έχει αρχή το κέντρο λήψης Ο

Ο προσανατολισμός των αξόνων και η θετική φορά είναι:

U//x → ίδια φορά
V//y → ίδια φορά
W → στη διεύθυνση του άξονα λήψης και αντίθετη φορά

Ορίζοντας ένα επίγειο σύστημα αναφοράς (X,Y,Z), με τη βοήθεια του συστήματος (U,V,W) προσδιορίζεται η θέση και ο προσανατολισμός της λήψης

Προσανατολισμός επιγείων λήψεων (1/2)



Σχηματικό διάγραμμα γεωμετρίας περιμετρικών λήψεων για την 3D αποτύπωση κτιρίου

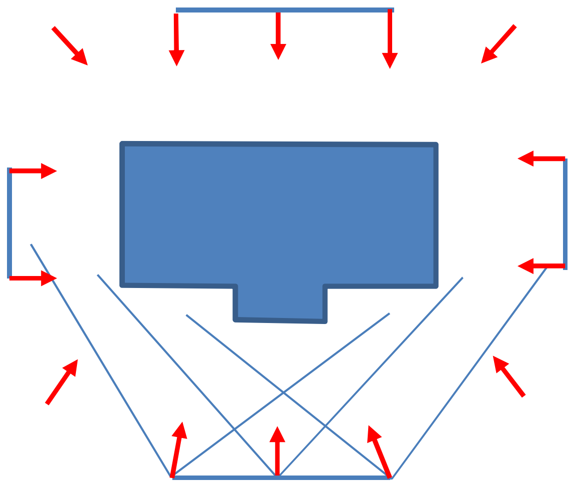
Η γεωμετρία λήψεων στις επίγειες εφαρμογές δεν είναι τυπική αλλά σχεδιάζεται ανάλογα με

- το αντικείμενο,
- τον περιβάλλοντα χώρο και
- το είδος της εφαρμογής

Ο προσανατολισμός των λήψεων μπορεί να μεταβάλλεται σημαντικά σε διαδοχικές λήψεις

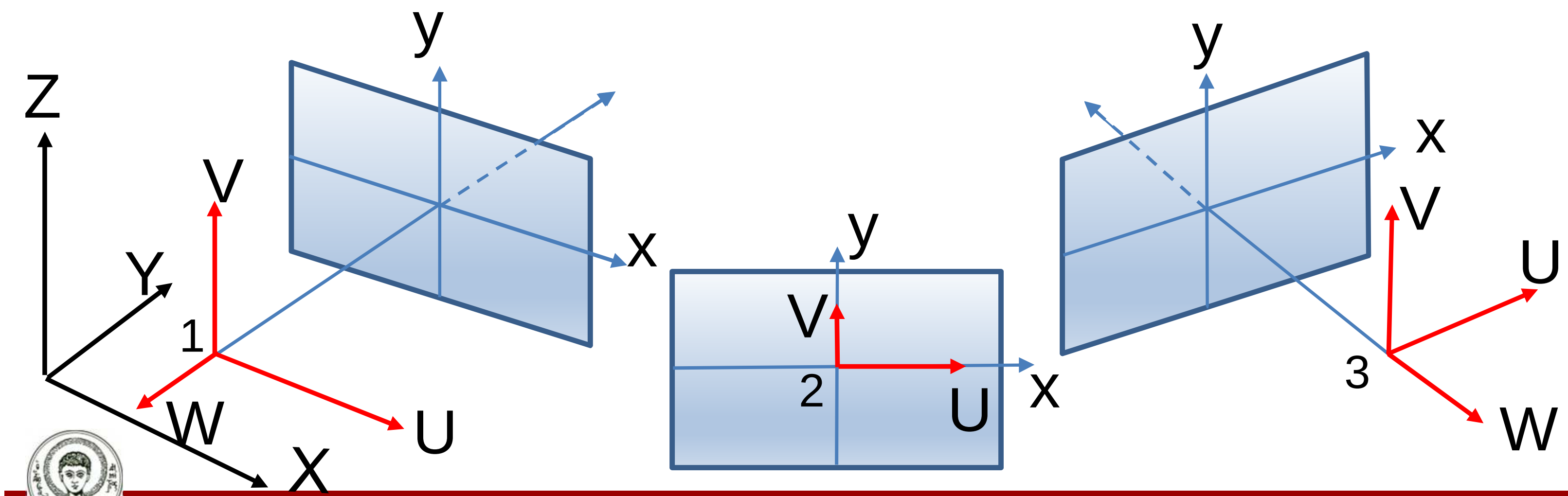
Προσανατολισμός επιγείων λήψεων (2/2)

Παράδειγμα

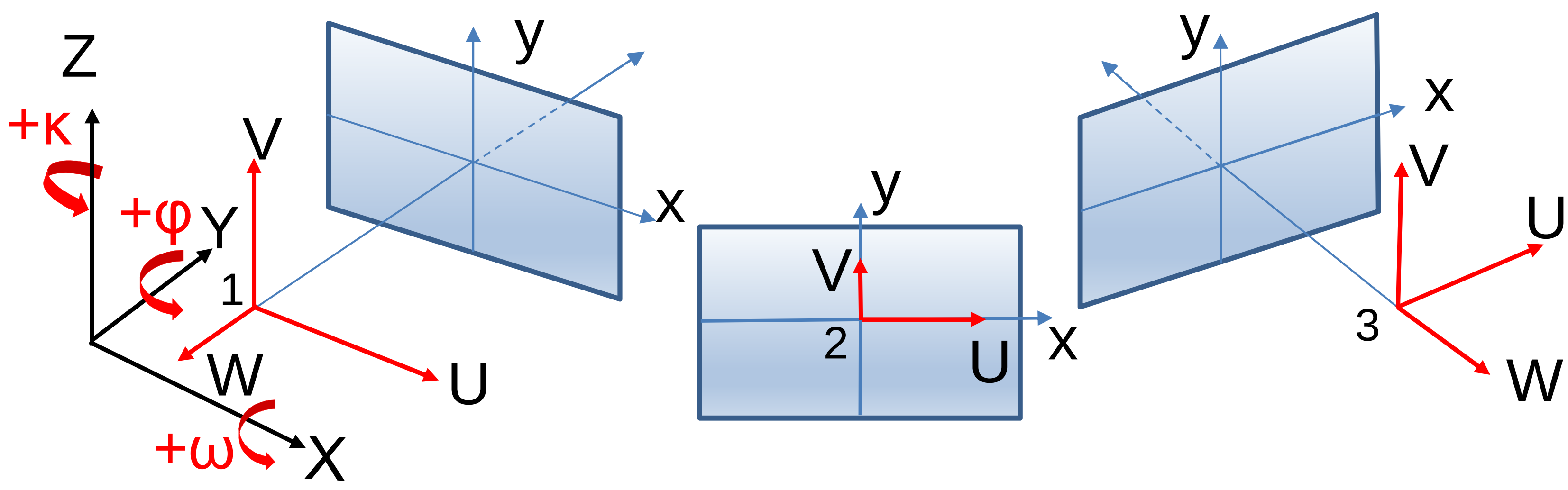


Οι λήψεις 1, 2 και 3 έχουν πραγματοποιηθεί με διαφορετικούς προσανατολισμούς των αξόνων λήψης, οι οποίοι επίσης περιγράφονται με τη βοήθεια πινάκων στροφής

R = **R**(κ) **R**(φ) **R**(ω)



Παράδειγμα προσδιορισμού των γωνιών ω,φ,κ



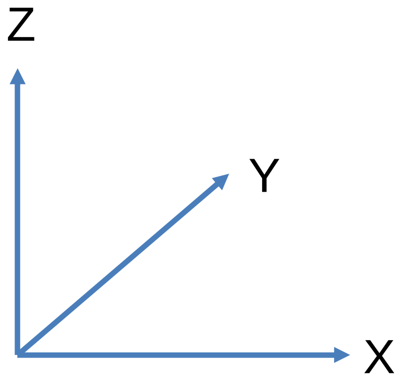
Λήψη 1: ω=90°,φ=κ=0 → **R** = **R**(ω=90)

Λήψη 2: ω=90°, φ= 45°, κ=0 → **R** = **R**(φ=45) **R**(ω=90)

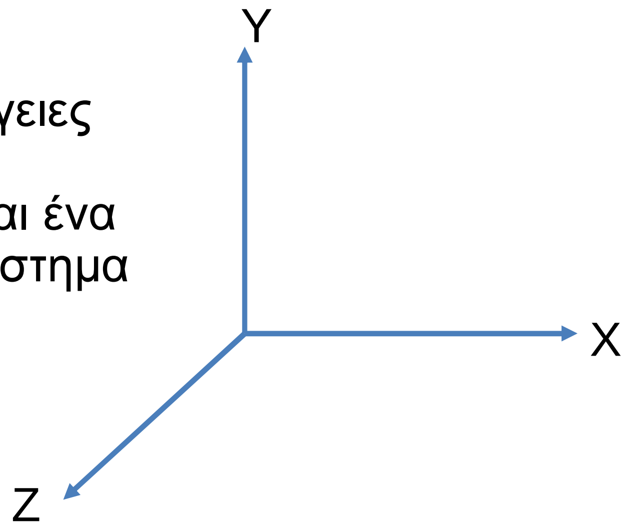
Λήψη 3: ω=90°, φ-90°, κ=0 → **R** = **R**(φ=-90) **R**(ω=90)

Επίγειο Σύστημα αναφοράς Επίγειες εφαρμογές

Συνήθως στις επίγειες εφαρμογές χρησιμοποιείται ένα τοπικό σύστημα αναφοράς (X,Y,Z), στο οποίο προσδιορίζονται τα σημεία ελέγχου, στα οποία βασίζεται η φωτογραμμετρική επεξεργασία των εικόνων



Σε πολλές επίγειες εφαρμογές χρησιμοποιείται ένα στραμμένο σύστημα αναφοράς



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

3. Συνορθώσεις

Συνορθώσεις στην Αναλυτική Φωτογραμμετρία

Τα προβλήματα της αναλυτικής φωτογραμμετρίας είναι τυπικά προβλήματα προσδιορισμού ενός αριθμού αγνώστων από ένα αριθμό παρατηρήσεων οι οποίες είναι επηρεασμένες από

- ✓ Τυχαία
- ✓ Συστηματικά και
- ✓ Χονδροειδή σφάλματα

Ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των αγνώστων →

→ Επίλυση των προβλημάτων με εφαρμογή μεθόδων συνόρθωσης

Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων (1/4)

Μαθηματικό μοντέλο = f_i(, ,…,)   i=1,2,.., n

$$\mathbf{y}^{\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha})$$

$\mathbf{x}^{\alpha}$ → διάνυσμα mx1 αληθινών τιμών αγνώστων παραμέτρων

$\mathbf{f}$ → nx1 γνωστές συναρτήσεις

$\mathbf{y}^{\alpha}$ → nx1 αληθινών τιμών παρατηρούμενων μεγεθών

Όμως

Η παρατήρηση = + v_i όπου v_i σφάλμα παρατήρησης

$$\mathbf{y}^{b} = \mathbf{y}^{\alpha} + \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha}) + \mathbf{v}$$

Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων (2/4)

$$\mathbf{y}^b = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\alpha) + \mathbf{v}$$

Στη γενική περίπτωση η συνάρτηση $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\alpha)$ είναι μη γραμμική → γραμμικοποίηση → γραμμικοποιημένες εξισώσεις παρατηρήσεων

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

Με στοιχεία:

$b_i = y_i^b - f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = y_i^b - y_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$x_j = x_j^\alpha - x_j^0$, $j = 1, 2, \ldots, m$

$A_{ji} = \left.\frac{\partial y_i^\alpha}{\partial x_j^\alpha}\right|_0$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων (3/4)

n εξισώσεις , m άγνωστοι n>m → άπειρες λύσεις

$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \mathbf{v}$ επιλέγεται εκείνη που ικανοποιεί

$\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = \min$

Για πίνακα βάρους $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$ → βέλτιστες ανεπηρέαστες γραμμικές εκτιμήσεις

Συνήθως $\mathbf{C} = \sigma^2\,\mathbf{Q}$ → $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ όπου σ άγνωστη μεταβλητότητα αναφοράς

Κανονικές εξισώσεις $(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{b} \rightarrow \boxed{\mathbf{N}\ \mathbf{x} = \mathbf{u}}$

Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων (4/4)

$$\underset{m\times m}{N}\ \underset{m\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{u}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{n-m}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{\alpha} = \mathbf{x}^0 + \hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2 \left(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\ \mathbf{N}^{-1}\ \mathbf{A}^T \right)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}^{\alpha} = \mathbf{y}^b - \hat{\mathbf{v}}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^2\ \mathbf{A}\ \mathbf{N}^{-1}\ \mathbf{A}^T$$

ii. Η μέθοδος των μικτών εξισώσεων (1/3)

Μαθηματικό μοντέλο $u_k(\mathrm{x}_1^{\alpha}, \mathrm{x}_2^{\alpha}, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{m}^{\alpha}, \mathrm{y}_1^{\alpha}, \mathrm{y}_2^{\alpha}, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{n}^{\alpha})$
k=1,2,.., s

s εξισώσεις

m άγνωστες παράμετροι

n παρατηρήσεις

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^{\alpha}, \mathbf{y}^{\alpha}) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}^{\alpha}$ → διάνυσμα mx1 αληθινών τιμών αγνώστων παραμέτρων

u → nx1 γνωστές συναρτήσεις

$\mathbf{y}^{\alpha}$ → nx1 αληθινών τιμών παρατηρούμενων μεγεθών

ii. Η μέθοδος των μικτών εξισώσεων (2/3)

→ γραμμικοποίηση $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{0}, \mathbf{y}^{b}) = \mathbf{0}$ →

γραμμικοποιημένες μικτές εξισώσεις

$$\underset{(sx1)}{\mathbf{w}} + \underset{(sxm)}{\mathbf{A}}\ \underset{(mx1)}{\mathbf{x}} - \underset{(sxn)}{\mathbf{B}}\ \underset{(nx1)}{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

Με στοιχεία:

$$w_i = u_i(x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha}, \ldots, x_m^{\alpha}, y_1^{\alpha}, y_2^{\alpha}, \ldots, y_n^{\alpha})$$

$$A_{ji} = \left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j^{\alpha}}\right|_{0,\,b} \quad \text{και} \quad B_{ji} = \left.\frac{\partial u_i}{\partial y_j^{\alpha}}\right|_{0,\,b}$$

ii. Η μέθοδος των μικτών εξισώσεων (3/3)

$$\boxed{-\,w + Ax - Bv = 0}$$

$$\mathbf{M = BP^{-1}B^{T}}$$

$$\mathbf{N = A^{T}\,M^{-1}\,A}$$

$$\mathbf{u = A^{T}\,M^{-1}\,w}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{-N^{-1}\,u}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{\alpha} = \mathbf{x^{0}} + \hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{P^{-1}\,B^{T}\,M^{-1}\,(w + A}\hat{\mathbf{x}}\,)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}^{\alpha} = \mathbf{y^{b}} - \hat{\mathbf{v}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{T}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{s-m}}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^{2}\mathbf{N^{-1}}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^{2}\,\mathbf{P^{-1}B\,M^{-1}\,(w + A}\hat{\mathbf{x}}\,)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^{2}\,\mathbf{P^{-1}} - \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}}$$

Βιβλιογραφία

- Δερμάνης Α., Γραμμική άλγεβρα
- Δερμάνης Α., Αναλυτική Γεωμετρία
- Δερμάνης Α. Αναλυτική Φωτογραμμετρία
- Michail E., Bethel J., McGlone Ch., *“Introduction to Modern Photogrammetry”*

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Φραγκουλίδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης