ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αναλυτική Φωτογραμμετρία

Ενότητα # **4** Μαθηματικά μοντέλα Συγγραμμικότητας και Συνεπιπεδότητας

Καθηγήτρια Όλγα Γεωργούλα
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μαθηματικά μοντέλα Συγγραμμικότητας και Συνεπιπεδότητας

Ενότητα 4

Περιεχόμενα 4ης ενότητας

1. Εξισώσεις Συγγραμμικότητας
   i. Διανυσματική και αναλυτική έκφραση μιας ακτίνας
   ii. Γραμμικοποίηση των εξισώσεων συγγραμμικότητας
   iii. Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις παρατηρήσεων
   iv. Η βασική γραμμικοποιημένη εξίσωση παρατήρησης
   v. Φωτογραμμετρικές Μέθοδοι που βασίζονται στο μαθηματικό μοντέλο των Εξισώσεων Συγγραμμικότητας
2. Εξίσωση συνεπιπεδότητας
   i. Γεωμετρία λήψης στερεοζεύγους
   ii. Διανυσματική έκφρασης συνεπιπεδότητας
   iii. Αναλυτική εξίσωση συνεπιπεδότητας
   iv. Γραμμικοποίηση

Στόχοι ενότητας

Η θεωρητική κατανόηση:

του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων συγγραμμικότητας, στο οποίο βασίζονται βασικές φωτογραμμετρικές μέθοδοι της Αναλυτικής Φωτογραμμετρίας

του μαθηματικού μοντέλου συνεπιπεδότητας, στο οποίο βασίζεται το πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού

Λέξεις κλειδιά

- Διανυσματική και αναλυτική έκφραση μιας ακτίνας, Γραμμικοποίηση των εξισώσεων συγγραμμικότητας
- Γεωμετρία λήψης στερεοζεύγους
- Διανυσματική και αναλυτική έκφραση συνθήκης συνεπιπεδότητας
- Γραμμικοποίηση εξίσωσης συνεπιπεδότητας

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

1. Εξισώσεις Συγγραμμικότητας

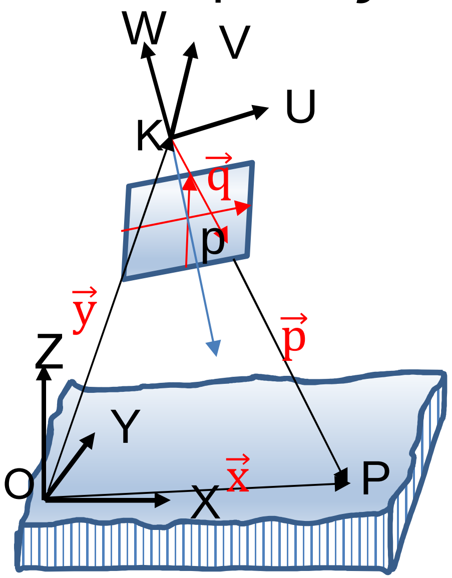
i. Διανυσματική και αναλυτική έκφραση μιας ακτίνας

Διανυσματική και αναλυτική έκφραση μιας ακτίνας (1/3)

Σε πρώτη προσέγγιση, στη φωτογραμμετρία θεωρείται ότι:

Σημείο του εδάφους P, η εικόνα του p στο επίπεδο της λήψης και το κέντρο λήψης O είναι συνευθειακά ή αλλιώς ότι τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ και $\overrightarrow{Op} = \vec{q}$ είναι συγγραμμικά,

και επομένως αν λ συντελεστής κλίμακας, ισχύει

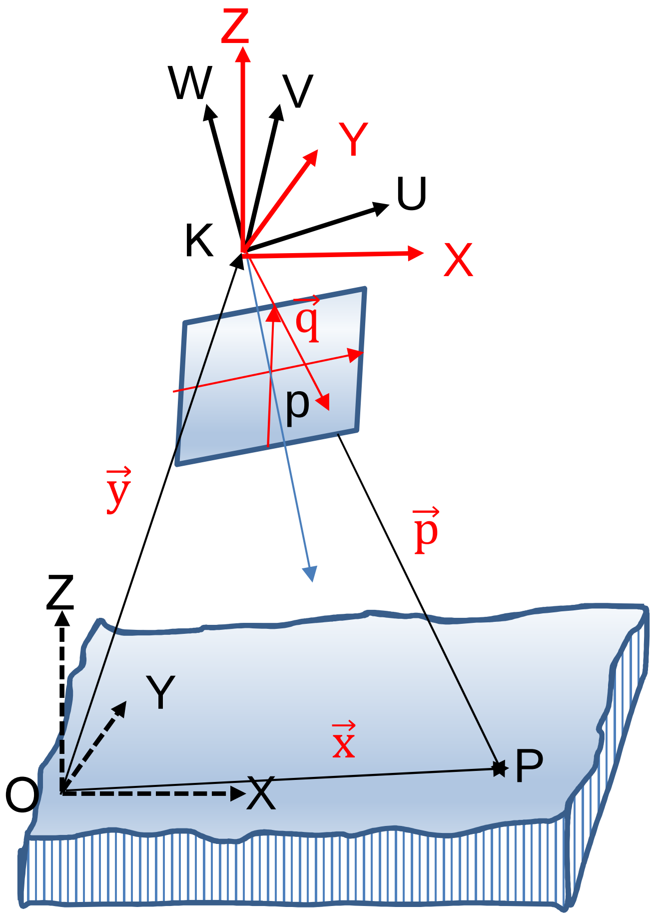


$$\vec{p} = \lambda\, \vec{q} \quad (1)$$

Επίσης από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{p} \;\rightarrow\; \vec{p} = \vec{x} - \vec{y} \quad (2)$$

Διανυσματική και αναλυτική έκφραση μιας ακτίνας (2/3)



Η αναλυτική έκφραση του $\vec{p}$ στο σύστημα (U,V,W) της λήψης είναι:

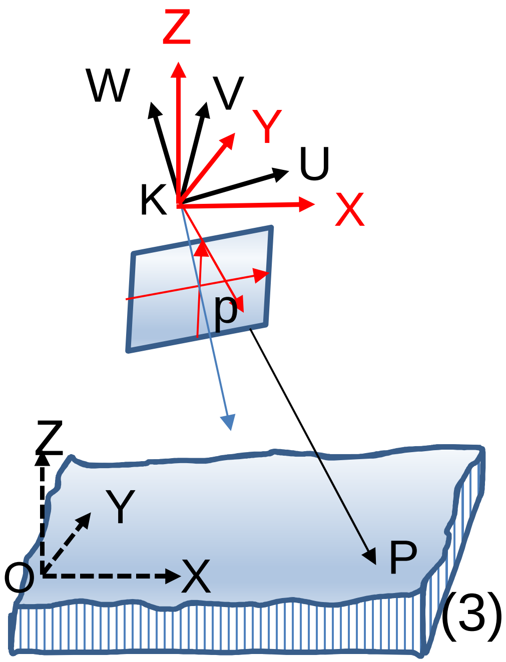
$$(1) \rightarrow p = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x - xo \\ y - yo \\ -f \end{bmatrix} \quad (3)$$

Η αναλυτική έκφραση του $\vec{p}$ στο σύστημα (X,Y,Z) είναι

$$(2) \rightarrow p = x - y = \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Η σχέση (4) ουσιαστικά περιγράφει τη μετάθεση του συστήματος (X,Y,Z) στο K

Διανυσματική και αναλυτική έκφραση μιας ακτίνας (3/3)



Τα δύο συστήματα συνδέονται με τη σχέση

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ο πίνακας R της σχέσης (5) είναι της μορφής

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\kappa)\ \mathbf{R}(\varphi)\ \mathbf{R}(\omega) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

$$(3)\ ,(5) \rightarrow \lambda \begin{bmatrix} x - xo \\ y - yo \\ -f \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Η σχέση (6) αποτελεί την αναλυτική έκφραση της διανυσματικής σχέσης συγγραμμικότητας, από την οποία προκύπτουν οι εξισώσεις

Αναλυτική έκφραση μιας ακτίνας

$$U = \lambda(x - xo) = R_{11}(X - Xo) + R_{12}(Y - Yo) + R_{13}(Z - Zo) \qquad (6.1)$$

$$V = \lambda(y - yo) = R_{12}(X - Xo) + R_{22}(Y - Yo) + R_{23}(Z - Zo) \qquad (6.2)$$

$$W = -\lambda f = R_{31}(X - Xo) + R_{32}(Y - Yo) + R_{33}(Z - Zo) \qquad (6.3)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν τη σχέση ενός σημείου του εδάφους P (X,Y,Z) και της εικόνας του p(x,y) σε μια λήψη η οποία έχει πραγματοποιηθεί με μια μηχανή εσ. προσανατολισμού (x_o, y_o,f). Η λήψη έγινε από το σημείο K (X_0 , Y_0, Z_0) ενώ ο προσανατολισμός του άξονα λήψης περιγράφεται από τον πίνακα R= R(κ) R(φ) R(ω)

Ο συντελεστής λ εκφράζει την κλίμακα με την οποία αποτυπώνεται το σημείο P στην εικόνα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά και μπορεί να είναι διαφορετικός από σημείο σε σημείο στην ίδια λήψη. Ο συντελεστής λ απαλείφεται διαιρώντας τις (6.1) και (6.2) με την (6.3)

Εξισώσεις συγγραμμικότητας

Οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις συγγραμμικότητας

$$x = x_o - f\frac{R_{11}(X-Xo)+R_{12}(Y-Yo)+R_{13}(Z-Zo)}{R_{31}(X-Xo)+R_{32}(Y-Yo)+R_{33}(Z-Zo)} = x_o - f\frac{U}{W}$$

$$y = y_o - f\frac{R_{21}(X-Xo)+R_{22}(Y-Yo)+R_{23}(Z-Zo)}{R_{31}(X-Xo)+R_{32}(Y-Yo)+R_{33}(Z-Zo)} = y_o - f\frac{V}{W}$$

Πρόκειται για συναρτήσεις της μορφής

$$x = x\,(X_0, Y_0, Z_0, \kappa, \varphi, \omega, X, Y, Z)$$

$$y = y\,(X_0, Y_0, Z_0, \kappa, \varphi, \omega, X, Y, Z)$$

μη γραμμικές ως προς τα στοιχεία εξ.προσανατολισμού $(X_0, Y_0, Z_0, \kappa, \varphi, \omega, X, Y, Z)$ και τις συν/νες (X, Y, Z) του σημείου στο έδαφος

Η γραμμικοποίησή τους γίνεται με ανάπτυξη σε σειρές Taylor χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές τιμές $(X_0^0,\ Y_0^0,\ Z_0^0,\ \kappa^0,\ \varphi^0,\ \omega^0)$

και $(X^0,\ Y^0,\ Z^0)$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

1. Εξισώσεις Συγγραμμικότητας

ii. Γραμμικοποίηση εξισώσεων συγγραμμικότητας

Γραμμικοποίηση εξισώσεων συγγραμμικότητας

$$x = x(X_0^0, Y_0^0, Z_0^0, \kappa^0, \varphi^0, \omega^0, X^0, Y^0, Z^0) +$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial X_0}(X_0 - X_0^0) + \frac{\partial x}{\partial Y_0}(Y_0 - Y_0^0) + \frac{\partial x}{\partial Z_0}(Z_0 - Z_0^0) + \frac{\partial x}{\partial \kappa}(\kappa - \kappa^0) + \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi - \varphi^0) + \frac{\partial x}{\partial \omega}(\omega - \omega^0)$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial X}(X - X^0) + \frac{\partial x}{\partial Y}(Y - Y^0) + \frac{\partial x}{\partial Z}(Z - Z^0) \rightarrow$$

$$x = x^0 + \frac{\partial x}{\partial X_0}\delta X_0 + \frac{\partial x}{\partial Y_0}\delta Y_0 + \frac{\partial x}{\partial Z_0}\delta Z_0 + \frac{\partial x}{\partial \kappa}\delta\kappa + \frac{\partial x}{\partial \kappa}\delta\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega}\delta\omega +$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial X}\delta X + \frac{\partial x}{\partial Y}\delta Y \frac{\partial x}{\partial Z}\delta Z \quad (7.1)$$

$$y = y(X_0^0, Y_0^0, Z_0^0, \kappa^0, \varphi^0, \omega^0, X^0, Y^0, Z^0) +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial X_0}(X_0 - X_0^0) + \frac{\partial y}{\partial Y_0}(Y_0 - Y_0^0) + \frac{\partial y}{\partial Z_0}(Z_0 - Z_0^0) + \frac{\partial y}{\partial \kappa}(\kappa - \kappa^0) + \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi - \varphi^0) + \frac{\partial y}{\partial \omega}(\omega - \omega^0) +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial X}(X - X^0) + \frac{\partial y}{\partial Y}(Y - Y^0) + \frac{\partial y}{\partial Z}(Z - Z^0) \rightarrow$$

$$y = y^0 + \frac{\partial y}{\partial X_0}\delta X_0 + \frac{\partial y}{\partial Y_0}\delta Y_0 + \frac{\partial y}{\partial Z_0}\delta Z_0 + \frac{\partial y}{\partial \kappa}\delta\kappa + \frac{\partial y}{\partial \kappa}\delta\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega}\delta\omega +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial X}\delta X + \frac{\partial y}{\partial Y}\delta Y \frac{\partial y}{\partial Z}\delta Z \quad (7.2)$$

1. Εξισώσεις Συγγραμμικότητας

iii. Γραμμικοποιημένες εξισώσεις παρατηρήσεων

Γραμμικοποιημένες εξισώσεις παρατηρήσεων (1/3)

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες x, y με τις παρατηρήσεις x΄,y΄ των φωτογραφικών συν/νων , οι οποίες είναι επηρεασμένες από τα τυχαία σφάλματα παρατήρησης v_x, v_y οι εξισώσεις (7.1),(7.2) Γίνονται

$$x = x' - v_x \rightarrow x' - x^0 = \frac{\partial x}{\partial X_0}\delta X_0 + \frac{\partial x}{\partial Y_0}\delta Y_0 + \frac{\partial x}{\partial Z_0}\delta Z_0 + \\ + \frac{\partial x}{\partial \kappa}\delta\kappa + \frac{\partial x}{\partial \kappa}\delta\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega}\delta\omega + \\ + \frac{\partial x}{\partial X}\delta X + \frac{\partial x}{\partial Y}\delta Y \ \frac{\partial x}{\partial Z}\delta Z + vx \qquad (8.1)$$

$$y = y' - v_y \rightarrow y' - y^0 = \frac{\partial y}{\partial X_0}\delta X_0 + \frac{\partial y}{\partial Y_0}\delta Y_0 + \frac{\partial y}{\partial Z_0}\delta Z_0 + \\ + \frac{\partial y}{\partial \kappa}\delta\kappa + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega}\delta\omega + \\ + \frac{\partial y}{\partial X}\delta X + \frac{\partial y}{\partial Y}\delta Y \ \frac{\partial y}{\partial Z}\delta Z + vy \qquad (8.2)$$

Γραμμικοποιημένες εξισώσεις παρατηρήσεων (2/3)

Οι εξισώσεις (8.1), (8.2) με τη μορφή πινάκων δίνονται ως:

$$
\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_{ji} = \begin{bmatrix} x' - x^0 \\ y' - y^0 \end{bmatrix}_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X_0} & \frac{\partial x}{\partial Y_0} & \frac{\partial x}{\partial Z_0} & \frac{\partial x}{\partial \kappa} & \frac{\partial x}{\partial \kappa} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial X_0} & \frac{\partial y}{\partial Y_0} & \frac{\partial y}{\partial Z_0} & \frac{\partial y}{\partial \kappa} & \frac{\partial y}{\partial \kappa} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{bmatrix}_{ji} \begin{bmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \\ \delta \kappa \\ \delta \varphi \\ \delta \omega \end{bmatrix}_j +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \end{bmatrix}_{ji} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{ji}
$$

Και συνοπτικά με τον κατάλληλο συμβολισμό ως:

$$
\boxed{\mathbf{b}_{ji} = \dot{\mathbf{A}}_{ji}\,\dot{\mathbf{x}}_j + \ddot{\mathbf{A}}_{ji}\,\ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{v}_{ji}}
$$

Οι δείκτες j και i δηλώνουν αντίστοιχα λήψεις και σημεία

Γραμμικοποιημένες εξισώσεις παρατηρήσεων (3/3)

Η παραγώγιση των εξισώσεων συγγραμμικότητας και η αναλυτική έκφραση όλων των στοιχείων των πινάκων $\dot{\mathbf{A}}_{ji}$ και $\ddot{\mathbf{A}}_{ji}$ δίνονται στο Δερμάνης Α. (1990)

Ενδεικτικά δίνεται:

$$\frac{\partial x}{\partial X} = - \frac{\partial x}{\partial X_0} = \frac{f}{W^2}\left[R_{23}\,(Y - Y_0) - R_{22}\,(Z - Z_0)\right] =$$

$$= \frac{f}{W^2}\left[R_{31}\,U - R_{11}\,W\right]$$

1. Εξισώσεις Συγγραμμικότητας

iv. Βασική εξίσωση παρατήρησης

Βασική εξίσωση παρατήρησης

$$\underset{2x1}{\mathbf{b}_{ji}} = \underset{2x6}{\dot{\mathbf{A}}_{ji}} \; \underset{6x1}{\dot{\mathbf{x}}_{j}} + \underset{2x3}{\ddot{\mathbf{A}}_{ji}} \; \underset{3x1}{\ddot{\mathbf{x}}_{i}} + \underset{2x1}{\mathbf{v}_{ji}}$$

Όπου:

- j κωδικός λήψης
- i κωδικός σημείου
- $\mathbf{b}_{ji}$ πίνακας ανηγμένων παρατηρήσεων (υπολογίζεται)
- $\dot{\mathbf{A}}_{ji}$ πίνακας μερικών παραγώγων στοιχείων
- εξ.προσανατολισμού (υπολογίζεται)
- $\dot{\mathbf{x}}_{j}$ διάνυσμα διορθώσεων προσ. τιμών παραμέτρων
- εξ.προσανατολισμού (άγνωστες)
- $\ddot{\mathbf{A}}_{ji}$ πίνακας μερικών παραγώγων συντεταγμένων (υπολογίζεται)
- $\ddot{\mathbf{x}}_{i}$ διάνυσμα διορθώσεων προσ. τιμών συντεταγμένων
- (άγνωστες)
- $\mathbf{v}_{ji}$ σφάλματα παρατήρησης (άγνωστα)

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

1. Εξισώσεις Συγγραμμικότητας

v. Φωτογραμμετρικές Μέθοδοι που βασίζονται στο μαθηματικό μοντέλο των Εξισώσεων Συγγραμμικότητας

Φωτογραμμετρικές Μέθοδοι

Φωτογραμμετρικές Μέθοδοι που βασίζονται στο μαθηματικό μοντέλο των Εξισώσεων Συγγραμμικότητας :

1. Φωτογραμμετρική Οπισθοτομία
2. Φωτογραμμετρική Εμπροσθοτομία
3. Ταυτόχρονος σχετικός και απόλυτος προσανατολισμός (mini Δέσμη)
4. Δέσμη και Δέσμη με πρόσθετες παραμέτρους
5. Βαθμονόμηση μηχανής

2. Εξίσωση Συνεπιπεδότητας

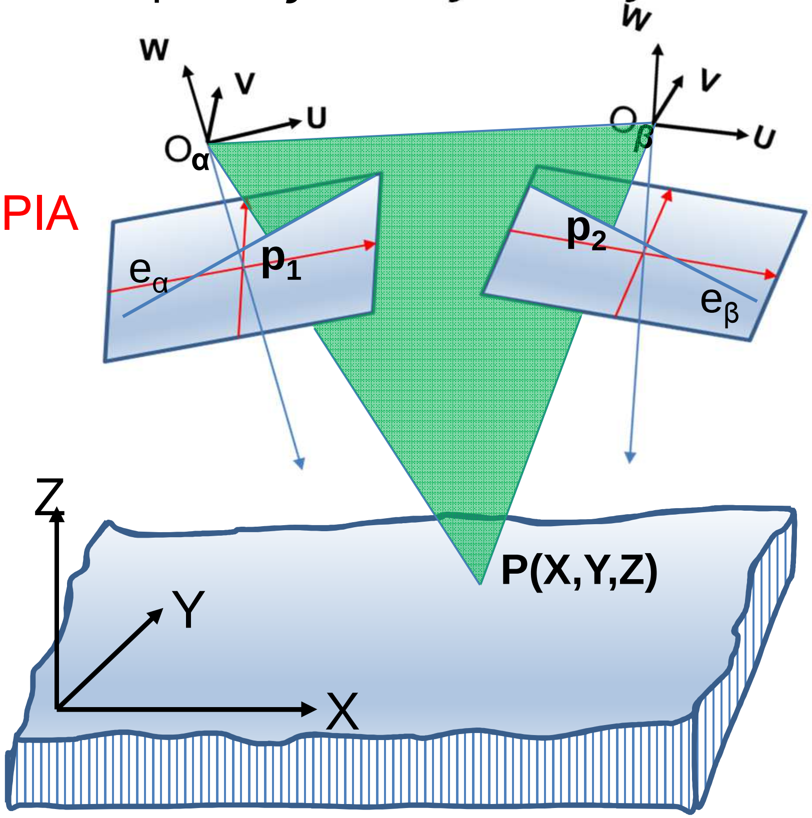
i. Γεωμετρία λήψης στερεοζεύγους

i. Γεωμετρία λήψης στερεοζεύγους

Κατά τη λήψη στερεοζεύγους:

Σε κάθε φωτογραφούμενο σημείο P του χώρου δημιουργείται το επιπολικό επίπεδο ($O_\alpha O_\beta P$), το οποίο τέμνει τις εικόνες κατά τις επιπολικές ευθείες (e_α) και (e_β)

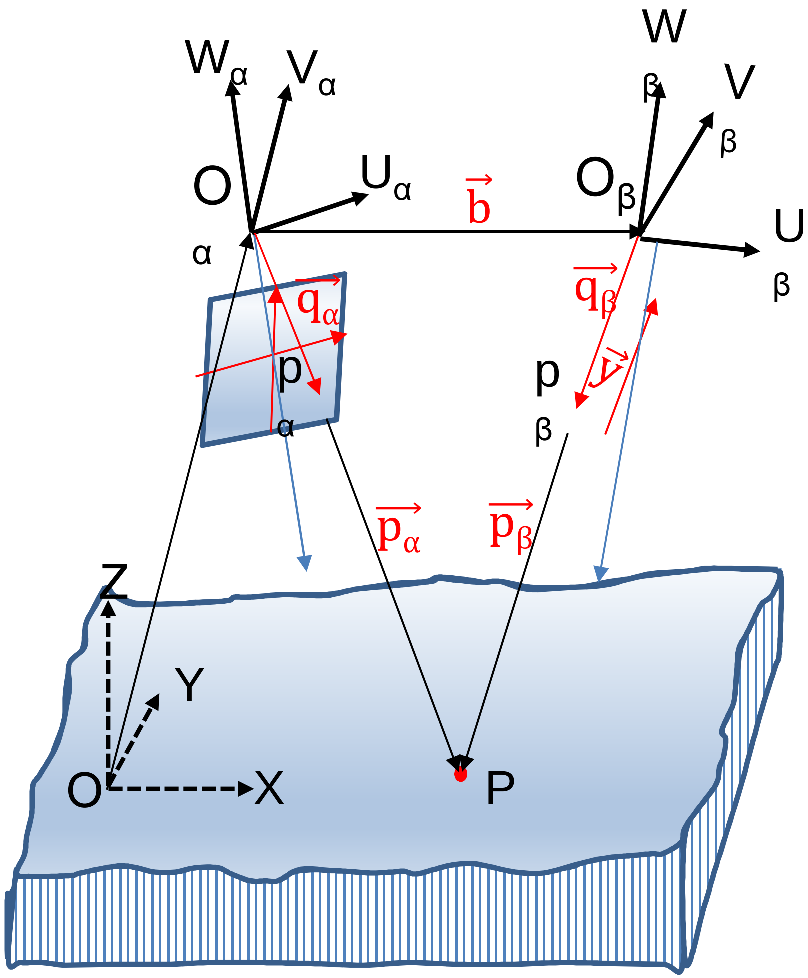
ΕΠΙΠΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



2. Εξίσωση Συνεπιπεδότητας

ii. Διανυσματική έκφραση συνεπιπεδότητας

Διανυσματική έκφραση συνεπιπεδότητας



$(O_\alpha O_\beta P)$ → επιπολικό επίπεδο →

$\vec{p_\alpha}$, $\vec{p_\beta}$ και $\vec{b}$ συνεπίπεδα και άρα ισχύει

$\vec{b} \cdot (\vec{p_\alpha} \times \vec{p_\beta}) = 0$ → (3)

διανυσματική σχέση συνεπιπεδότητας

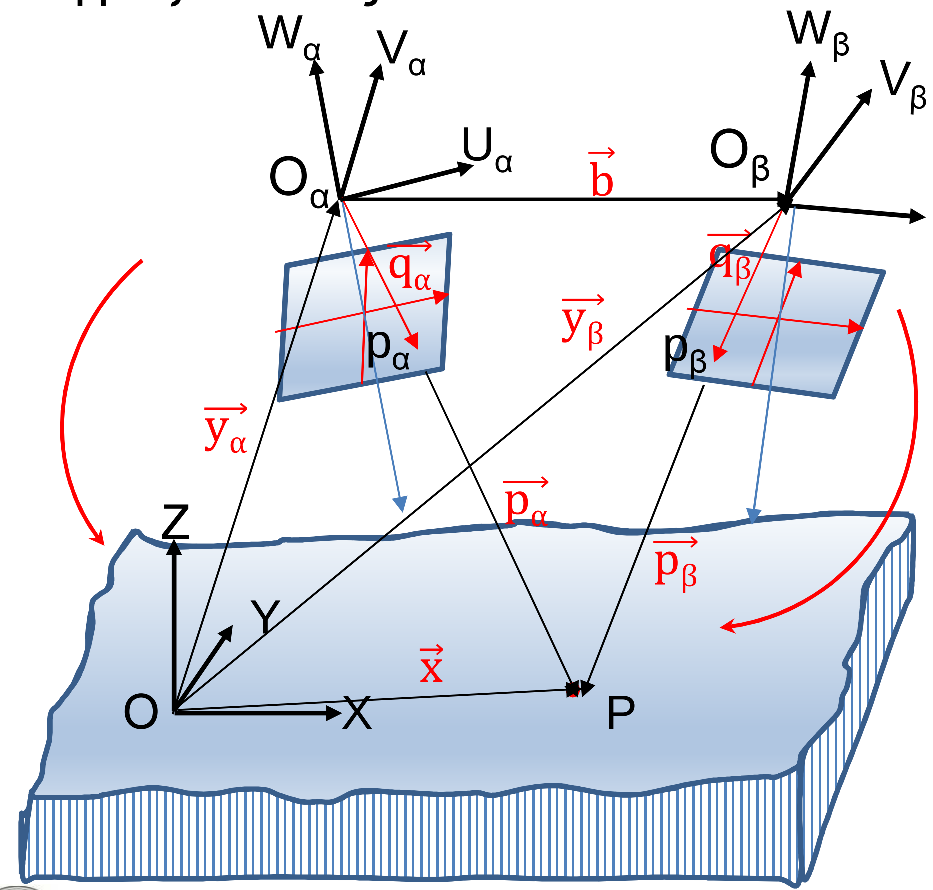
Η αναλυτική μορφή της διανυσματικής σχέσης συνεπιπεδότητας εξαρτάται από το σύστημα στο οποίο επιλέγεται να εκφρασθούν τα διανύσματα $\vec{p_\alpha}$, $\vec{p_\beta}$ και $\vec{b}$.

2. Εξίσωση Συνεπιπεδότητας

iii. Αναλυτική εξίσωση συνεπιπεδότητας στο σύστημα (X,Y,Z)

Αναλυτική εξίσωση συνεπιπεδότητας (1/5)

Στο επίγειο σύστημα αναφοράς (X,Y,Z), τα διανύσματα της σχέσης (3) εκφράζονται ως:



$$\vec{b} = \vec{y_\beta} - \vec{y_\alpha}$$

$$\vec{p}_\alpha = \vec{x} - \vec{y_\alpha} = \lambda_\alpha R_\alpha^T \vec{q}_\alpha$$

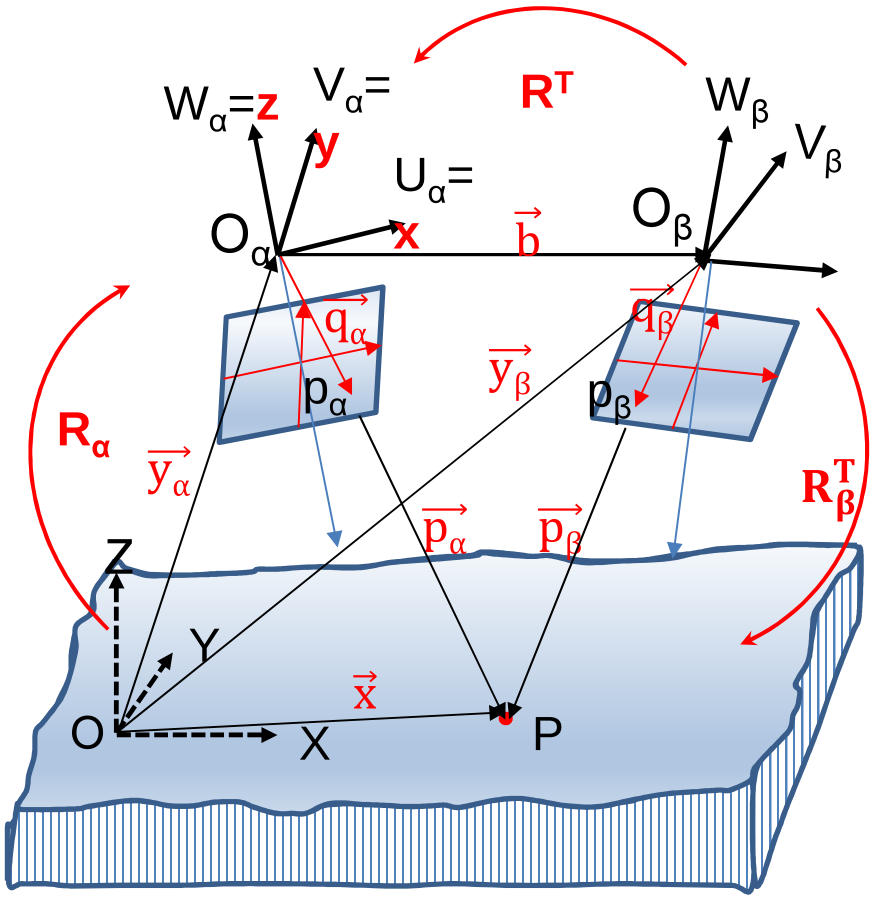
$$\vec{p}_\beta = \vec{x} - \vec{y_\beta} = \lambda_\beta R_\beta^T \vec{q}_\beta$$

Η σχέση (3) συναρτήσει των συνιστωσών των διανυσμάτων στο σύστημα (X,Y,Z) γίνεται:

$$(y_\beta - y_\alpha)^T \, [\, (R_\alpha^T \, q_\alpha) \, x] \, R_\beta^T \, q_\beta = 0 \quad (4)$$

Αναλυτική εξίσωση συνεπιπεδότητας (2/5)

Επιλέγοντας ένα νέο σύστημα, το σύστημα μοντέλου (x,y,z), το οποίο ταυτίζεται με το σύστημα (U_α, V_α, W_α), τα διανύσματα $\vec{p}_\alpha$, $\vec{p}_\beta$ και $\vec{b}$, εκφράζονται ως:



$\vec{b} = R_\alpha (\vec{y}_\beta - \vec{y}_\alpha)$

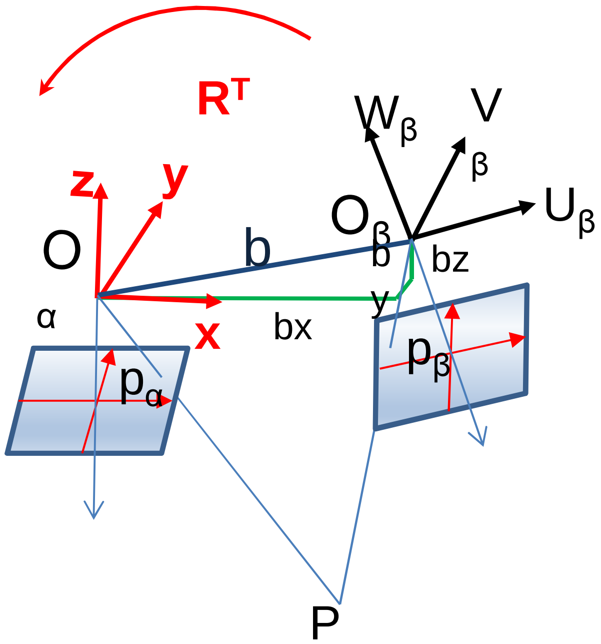
$\vec{p}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{q}_\alpha$

$\vec{p}_\beta = \lambda_\beta R_\alpha R_\beta^T \vec{q}_\beta$

Η σχέση (3) συναρτήσει των συνιστωσών των διανυσμάτων στο σύστημα (x,y,z) γίνεται:

$(R_\alpha (y_\beta - y_\alpha))^T [q_\alpha x] R_\alpha R_\beta^T q_\beta = 0$ (5)

Αναλυτική εξίσωση συνεπιπεδότητας (3/5)



Αν αντικαταστήσουμε

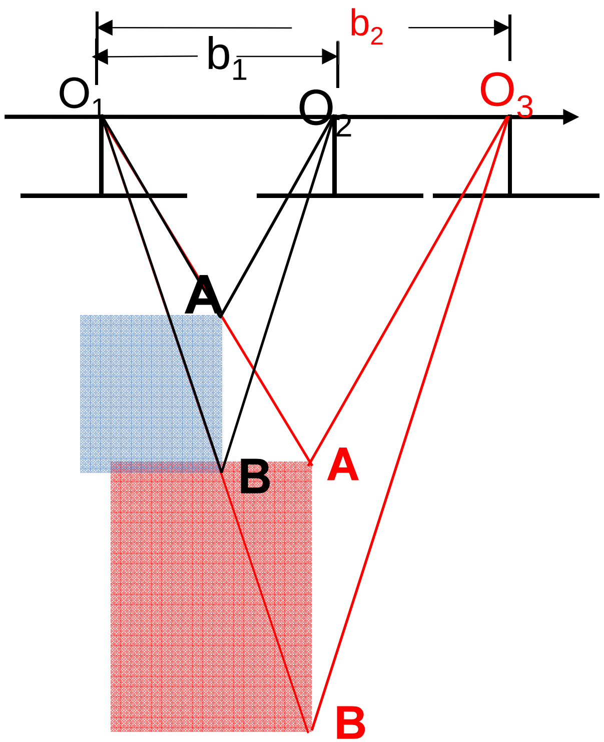
$$R_\alpha(y_\beta - y_\alpha) = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R_\alpha R_\beta^T = R^T$$

Προκύπτει η αναλυτική έκφραση της εξίσωσης συνεπιπεδότητας

$$b^T[q_\alpha x]R^T q_\beta = 0$$

$$\begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & f & (y\alpha - y_o) \\ -f & 0 & -(x\alpha - x_o) \\ -(y\alpha - y_o) & (x_\alpha - x_o) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\beta - x_o \\ y_\beta - y_o \\ -f \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

Αναλυτική εξίσωση συνεπιπεδότητας (4/5)



Μεταβολή της κλίμακας του μοντέλου λόγω μεταβολής της βάσης b

Επειδή η συνιστώσα b_x της βάσης b σχετίζεται με την κλίμακα του μοντέλου, η εξίσωση (6) ισχύει εξίσου αν διαιρεθεί με b_x, οπότε

$$\begin{bmatrix}\frac{b_x}{b_x} & \frac{b_y}{b_x} & \frac{b_z}{b_x}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & f & (y\alpha - y_o) \\ -f & 0 & -(x\alpha - x_o) \\ -(y\alpha - y_o) & (x\alpha - x_o) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\beta - x_o \\ y_\beta - y_o \\ -f \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

Αναλυτική εξίσωση συνεπιπεδότητας (5/5)

$$[1 \quad \beta y \quad \beta z]^{T}\begin{bmatrix} 0 & f & (y\alpha - y_o) \\ -f & 0 & -(x\alpha - x_o) \\ -(y\alpha - y_o) & (x\alpha - x_o) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_\beta - x_o \\ y_\beta - y_o \\ -f \end{bmatrix}=0 \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας με

$$\begin{bmatrix} u_\beta \\ v_\beta \\ w_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_\beta - x_o \\ y_\beta - y_o \\ -f \end{bmatrix}=0$$

Η εξίσωση (8), γίνεται:

$$(y_\alpha - y_o)w_\beta + f\,v_\beta - \beta_y\,[(x_\alpha - x_o)w_\beta + f\,u_\beta] + \beta_z\,[(x_\alpha - x_o)v_\beta - (y_\alpha - y_o)u_\beta] = 0 \quad (9)$$

Η εξίσωση (9) είναι η τελική αναλυτική μορφή της εξίσωσης συνεπιπεδότητας στο σύστημα του μοντέλου (x,y,z)

2. Εξίσωση Συνεπιπεδότητας

iv. Γραμμικοποίηση

Γραμμικοποίηση (1/3)

$(y_\alpha\text{-}y_o)w_\beta + f\, v_\beta - \beta_y[(x_\alpha\text{-}x_o)w_\beta + f\, u_\beta] + \beta_z\, [(x_\alpha\text{-}x_o)v_\beta - (y_\beta\text{-}y_o)u_\beta] = 0$

$F(x_\alpha, y_\alpha, x_\beta, y_\beta, \beta_y, \beta_z, \kappa, \varphi, \omega) = 0$ → γραμμικοποίηση

$$F(x_\alpha^0, y_\alpha^0, x_\beta^0, y_\beta^0, \beta y^0\, \beta z^0, \omega^0, \varphi^0, \kappa^0) +$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(x_\alpha - x_\alpha^0) + \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(y_\alpha - y_\alpha^0) + \frac{\partial F}{\partial x_\beta}(x_\beta - x_\beta^0) + \frac{\partial F}{\partial y_\beta}(y_\beta - y_\beta^0) +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial \beta y}(\beta y - \beta y^0) + \frac{\partial F}{\partial \beta z}(\beta z - \beta z^0) + \frac{\partial F}{\partial \kappa}(\kappa - \kappa^0) + \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi - \varphi^0) + \frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega - \omega^0) =$$

$$F^0 + \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\delta x_\alpha + \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}\delta y_\alpha + \frac{\partial F}{\partial x_\beta}\delta x_\beta + \frac{\partial F}{\partial y_\beta}\delta y_\beta +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial \beta y}\delta\beta y + \frac{\partial F}{\partial \beta z}\delta\beta z + \frac{\partial F}{\partial \kappa}\delta\kappa + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \omega}\delta\omega = 0$$

Γραμμικοποίηση (2/3)

$$F^0 - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} vx_\alpha - \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} vy_\alpha - \frac{\partial F}{\partial x_\beta} vx_\beta - \frac{\partial F}{\partial y_\beta} vy_\beta +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \beta y}\delta\beta y + \frac{\partial F}{\partial \beta z}\delta\beta z + \frac{\partial F}{\partial \kappa}\delta\kappa + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \omega}\delta\omega = 0$$

$$F_i^0 + \left[\frac{\partial F}{\partial \beta y} \; \frac{\partial F}{\partial \beta z} \; \frac{\partial F}{\partial \kappa} \; \frac{\partial F}{\partial \varphi} \; \frac{\partial F}{\partial \omega}\right]_i \begin{bmatrix} \delta\beta y \\ \delta\beta z \\ \delta\kappa \\ \delta\varphi \\ \delta\omega \end{bmatrix} -$$

$$- \left[\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \; \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}\right]_i \begin{bmatrix} vx_\alpha \\ vy_\alpha \end{bmatrix} - \left[\frac{\partial F}{\partial x_\beta} \; \frac{\partial F}{\partial y_\beta}\right]_i \begin{bmatrix} vx_\beta \\ vy_\beta \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{w_i + a_i^T x - b_{\alpha i}^T v_{\alpha i} - b_{\beta i}^T v_{\beta i} = 0} \quad (9)$$

Γραμμικοποίηση (3/3)

Η παραγώγιση της εξίσωσης συνεπιπεδότητας και η αναλυτική έκφραση όλων των στοιχείων των πινάκων a_i^T, $b_{\alpha i}^T$, $b_{\beta i}^T$ δίνονται στο Δερμάνης Α. (1990)

Ενδεικτικά δίνεται:

$= -f\, u_\beta - (x_\alpha - x_o) w_\beta$

1. Στο μαθηματικό μοντέλο της εξίσωσης συνεπιπεδότητας βασίζεται η επίλυση του αναλυτικού σχετικού προσανατολισμού

Βιβλιογραφία

- Δερμάνης Α. (1990): Αναλυτική Φωτογραμμετρία, Εκδόσεις ΖΗΤΗ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Φραγκουλίδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης