



Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 1: Από τον Λογισμό των Μεταβολών στην
Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα

- Το πρόβλημα της Διδούς ή Ισοπεριμετρικό πρόβλημα.
- Το πρόβλημα της αλυσίδας.
- Ο νόμος της ανάκλασης.
- Ο νόμος της διάθλασης.
- Πρόβλημα αεροδυναμικής.
- Βραχυστόχρονο πρόβλημα.
- Λογισμός των Μεταβολών.
- Το πρόβλημα του Βέλτιστου Ελέγχου.

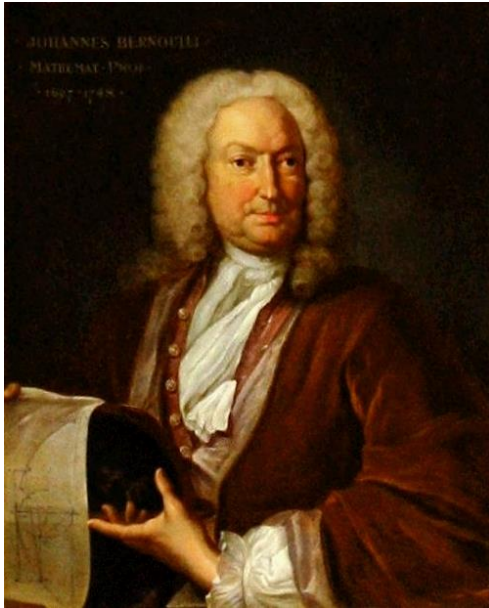


Σκοποί Ενότητας

- Να κάνει μια ιστορική επισκόπηση στον Λογισμό των Μεταβολών καθώς και στην Θεωρία του Βέλτιστου Ελέγχου και να δείξει το πέρασμα από έναν καθαρά θεωρητικό τομέα σε έναν καθαρά πρακτικό τομέα.

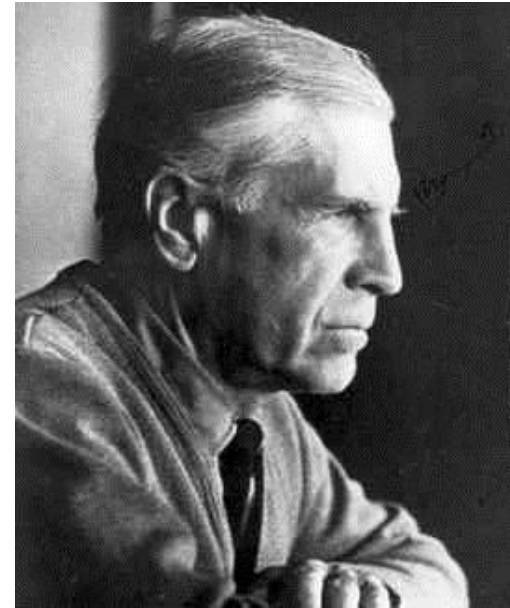


Από τον Λογισμό των Μεταβολών στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου



Johann Bernoulli (1667 - 1748)

Εικόνα 1



Lev Semenovich Pontryagin (1908-1988)

Εικόνα 2



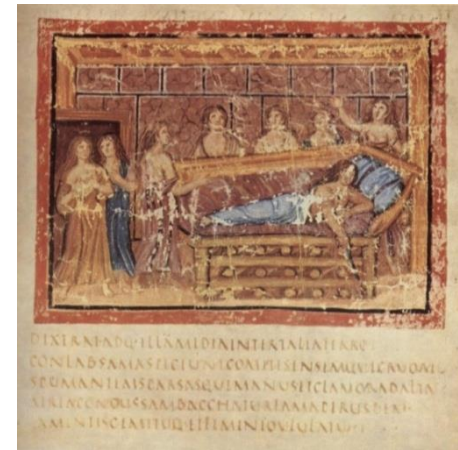
...αρκετά πριν την γέννηση του Λογισμού των Μεταβολών

Το πρόβλημα της Διδούς ή Ισοπεριμετρικό πρόβλημα
Αγόρασαν τόση γη – και την ονόμασαν Βύρσα – όση μπορούσε να κυκλωθεί με τη δορά ενός ταύρου.

Βιργιλίου Αινειάδα (70-19 π.Χ.)



Εικόνα 3



Εικόνα 4



Ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Ισοεπιφανειακό πρόβλημα

- **Ισοπεριμετρικό πρόβλημα**

«Μεταξύ όλων των κλειστών επίπεδων καμπύλων με δεδομένο μήκος να βρεθεί εκείνη η οποία περικλείει το χωρίο με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.»

- **Ισοεπιφανειακό πρόβλημα**

«Μεταξύ όλων των στερεών σχημάτων με την ίδια επιφάνεια να βρεθεί εκείνο το οποίο περιέχει τον μεγαλύτερο όγκο.»



Πολλοί ασχολήθηκαν με το ισοπεριμετρικό πρόβλημα (1)

- **Αριστοτέλης** (4^{ος} π.Χ. αιώνας) – ήταν γνωστή η λύση
- **Αρχιμήδης** (287π.Χ.-212π.Χ.) - *Περί Σφάιρας και Κυλίνδρου, Κύκλου Μέτρησις*
- **Ζηνόδωρος** (200π.Χ.-140π.Χ.), *Περί Ισομερών Σχημάτων*



Αρχιμήδης
Εικόνα 5



Πολλοί ασχολήθηκαν με το ισοπεριμετρικό πρόβλημα (2)

- **Πάππος** από την Αλεξάνδρεια (290-350μ.Χ.) - 5ο βιβλίο της *Συναγωγής*
 - Μεταξύ επιπέδων σχημάτων με την ίδια περίμετρο, ο κύκλος περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
 - Μεταξύ στερεών σχημάτων με το ίδιο εμβαδόν, η σφαίρα έχει τον μεγαλύτερο όγκο.
 - Υπάρχουν πέντε και μόνο πέντε κανονικά στερεά.
- **Schwartz – Weierstrass – Blaschke** κ.α. αργότερα.



Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα Σύγχρονη διατύπωση (1)

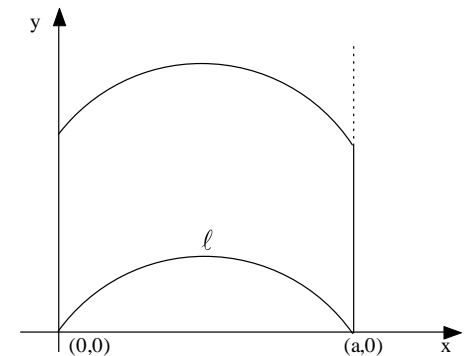
Ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του μέγιστου της παρακάτω ποσότητας :

$$J(y) = \int_0^a \underbrace{y(x)}_F dx$$

υπό τον περιορισμό

$$L(y) = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = l$$

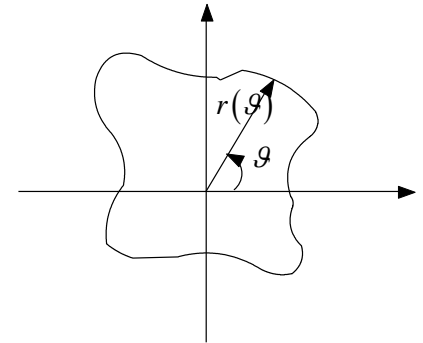


Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα Σύγχρονη διατύπωση (2)

ή σε πολικές συντεταγμένες

$$J(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r(\theta))^2 d\theta$$

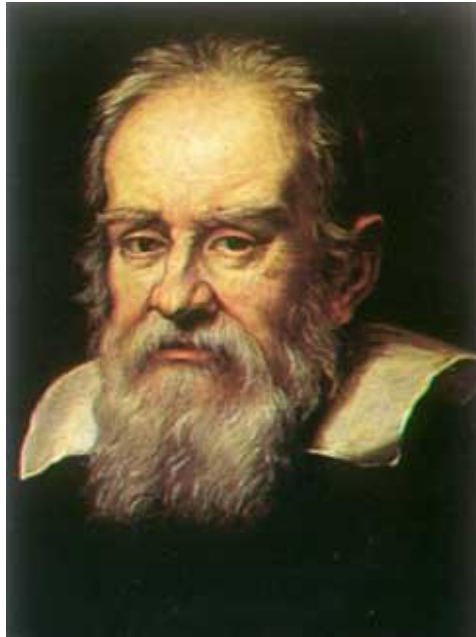
$$L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta = l$$



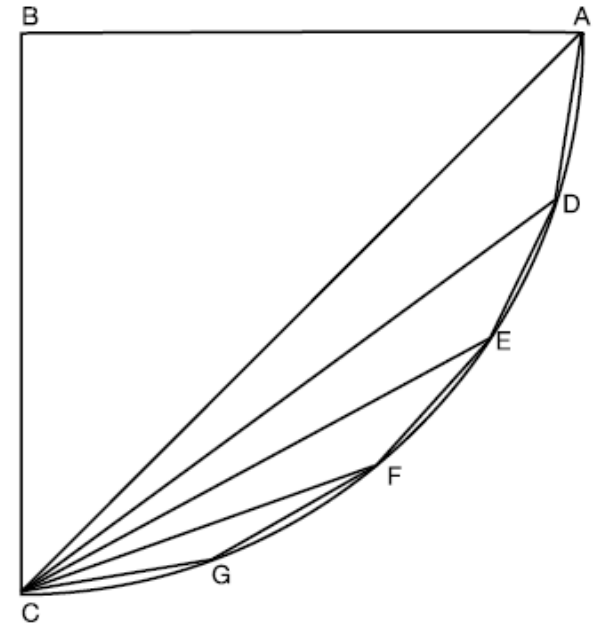
* Η $J(\mathbf{y})$ ($J(\mathbf{r})$) που δεν είναι τίποτα άλλο από ένας κανόνας αντιστοίχισης από ένα σύνολο συναρτήσεων Ω σε έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό ονομάζεται **συναρτησιακό**.



Galileo Galilei (1564-1642)



Galileo Galilei
Εικόνα 6



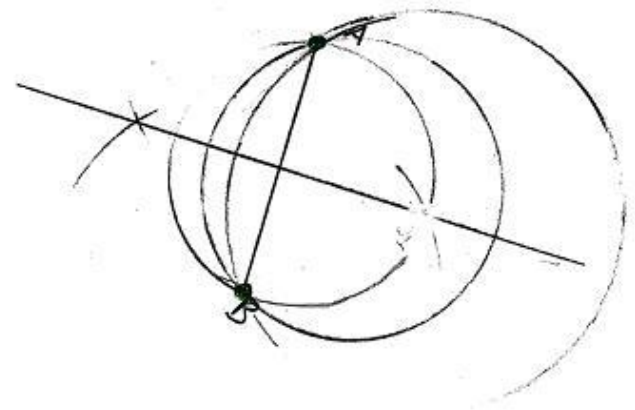
Σχήμα 1: δείχνει την διαδρομή από το A στο C μέσω χορδών ως πιο σύντομος δρόμος από ότι η ευθεία που ενώνει τα σημεία.



Galileo Galilei



Εικόνα 7



Σχήμα 2: τόξα που ενώνουν δύο σημεία που αποτελούν καλύτερη λύση από ότι οι χορδές, αλλά όπως φαίνεται υπάρχουν πολλές λύσεις.

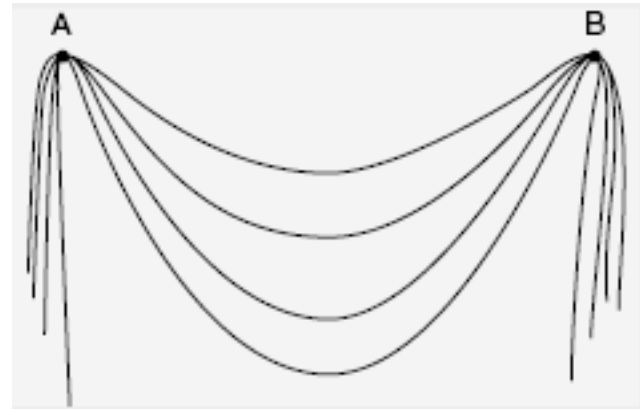


Το πρόβλημα της αλυσίδας

$$J(y) = \int_{x_a}^{x_b} \underbrace{y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}}_F dx$$

$$l = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

$$y(x_a) = y_a, y(x_b) = y_b$$



Διατυπώνεται το 1690

$$y(x) = C \cosh\left(\frac{x + C_1}{C}\right) + C_2$$

Αλυσοειδής καμπύλη



Ποιοι έλυσαν το πρόβλημα της αλυσίδας ; (1)



Jacob Bernoulli (1654-1705)

Εικόνα 8

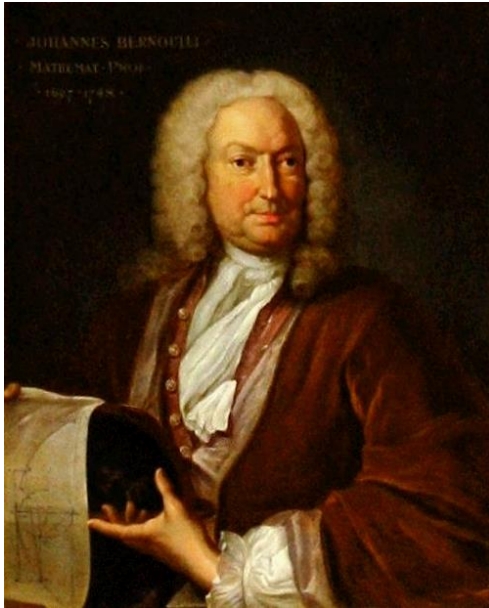


Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Εικόνα 9



Ποιοι έλυσαν το πρόβλημα της αλυσίδας ; (2)



Johann Bernoulli (1667-1748)

Εικόνα 10



Christiaan Huygens (1629-1695)

Εικόνα 11



Έρων από την Αλεξάνδρεια (150-300)

Ο νόμος της ανάκλασης

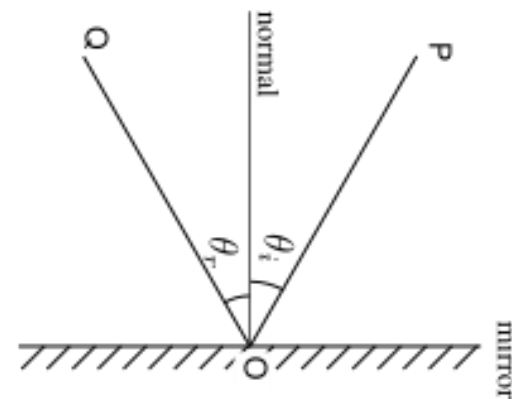


Έρων από την Αλεξάνδρεια
Εικόνα 12

«Το φως ταξιδεύει στο ίδιο μέσο στον **συντομότερο δυνατό δρόμο**»

Γωνία πρόσπτωσης ίση με την γωνία ανάκλασης

$$\theta_1 = \theta_2$$

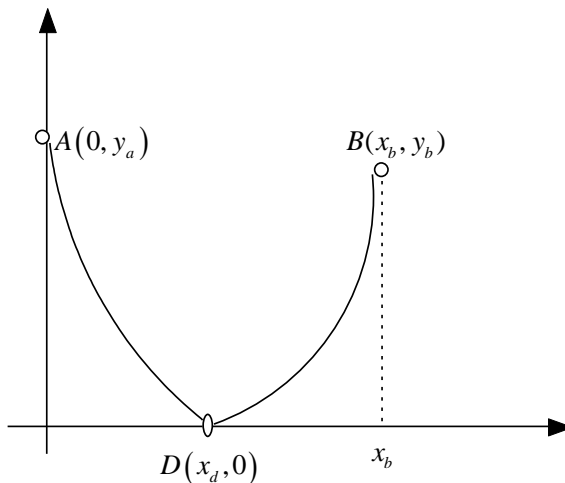


Σύγχρονη μαθηματική διατύπωση

Σύγχρονη μαθηματική διατύπωση

$$J(y) = \int_0^{x_b} \underbrace{\sqrt{1 + y'(x)^2}}_F dx$$

$$y(0) = y_a, y(x_d) = 0, y(x_b) = y_b$$



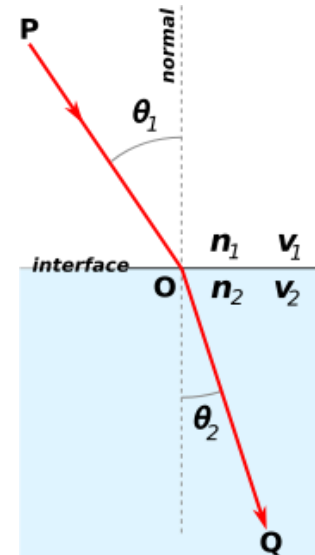
Pierre de Fermat (1601-1655)



"Pierre de Fermat"

Εικόνα 13

«Το φως ταξιδεύει διαμέσου μιας ακολουθίας οπτικών μέσων στον *ελάχιστο δυνατό χρόνο*» (1662)



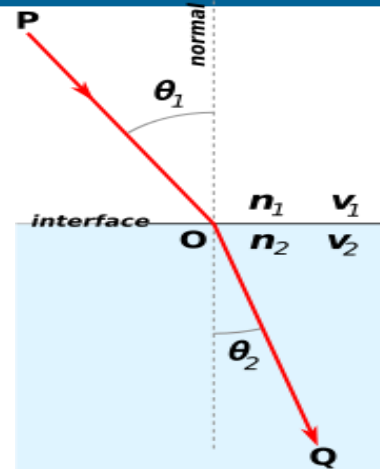
Pierre de Fermat

Ο νόμος της διάθλασης

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

ή

$$\frac{\sin(\theta_1)}{n_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{n_2}$$

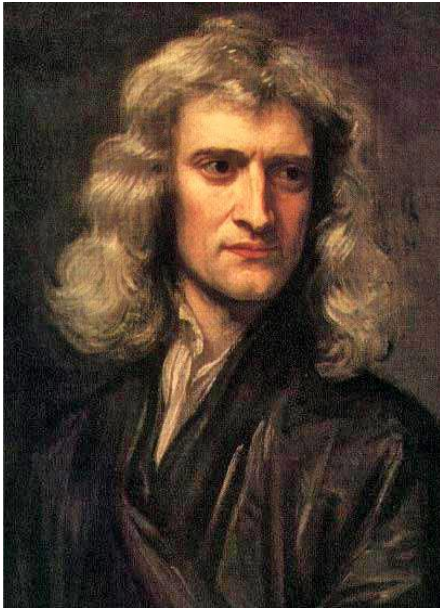


- Ο νόμος της διάθλασης από ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n_1 σε ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n_2 .
- Δείκτης διάθλασης (n_i) = λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς την ταχύτητα του φωτός v_i στο μέσο i .

«Η φύση ακολουθεί πάντα τον ευκολότερο και γρηγορότερο δρόμο και όχι κατ' ανάγκη τον συντομότερο»

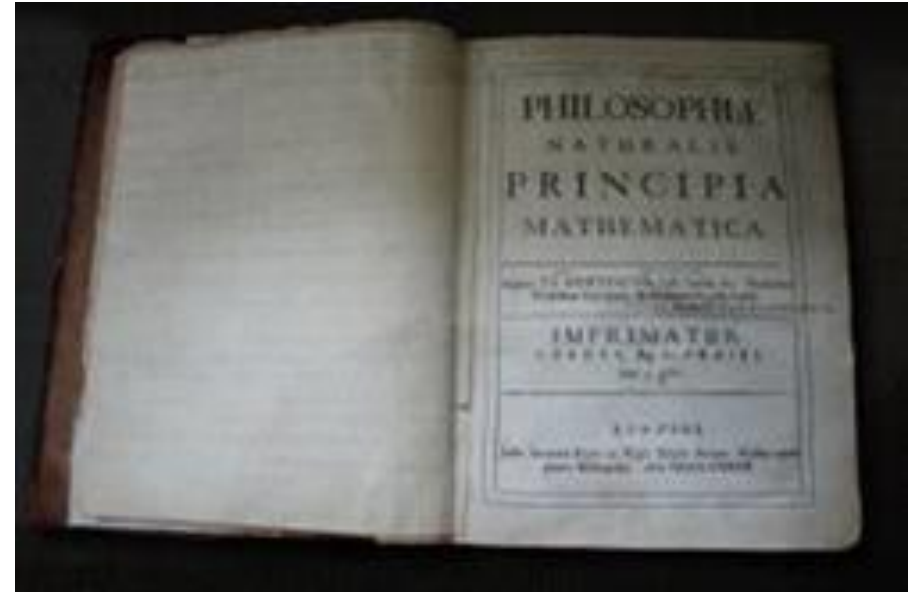


Sir Isaac Newton (1643-1727)



Sir Isaac Newton (1643-1727)

Εικόνα 14



Newton's Principia

Εικόνα 15

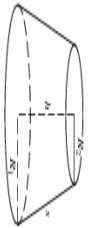


Πρόβλημα αεροδυναμικής (1)

- *Philosophiae naturalis principia mathematica* (ή αλλιώς Principia για συντομία) - 1685
- «Να βρεθεί το στερεό εκ περιστροφής δεδομένου μήκους και πλάτους στο οποίο ασκείται η ελάχιστη αντίσταση κατά την κίνηση του σε κάποιο μέσο».

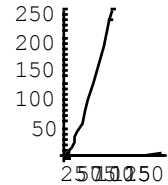


Πρόβλημα αεροδυναμικής (2)



$$J(x, f) = 2K \int_0^R \underbrace{\frac{xdx}{1 + f'(x)^2}}_F, K = 2\pi Ru^2$$

$$f(0) = 0, f(R) = H, f'(x) > 0$$



Σημαντικό γιατί :

- η γεωμετρική τεχνική της απόδειξης χρησιμοποιήθηκε από τον Jacob Bernoulli στην λύση του βραχυστόχρονου αλλά και από τον Euler
- η λύση (καμπύλη) περιέχει γωνίες (μη συνεχείς παραγώγους, ενώ μπορεί και να μην έχει λύση αν διατυπωθεί παραμετρικά.

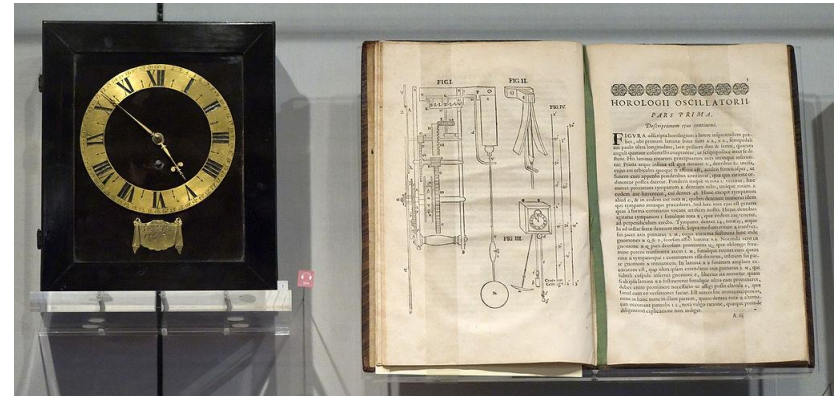


Christiaan Huygens (1629-1695)

Horologium oscillatorium



Christiaan Huygens
Εικόνα 16



Horologium oscillatorium – 1659
Εικόνα 17

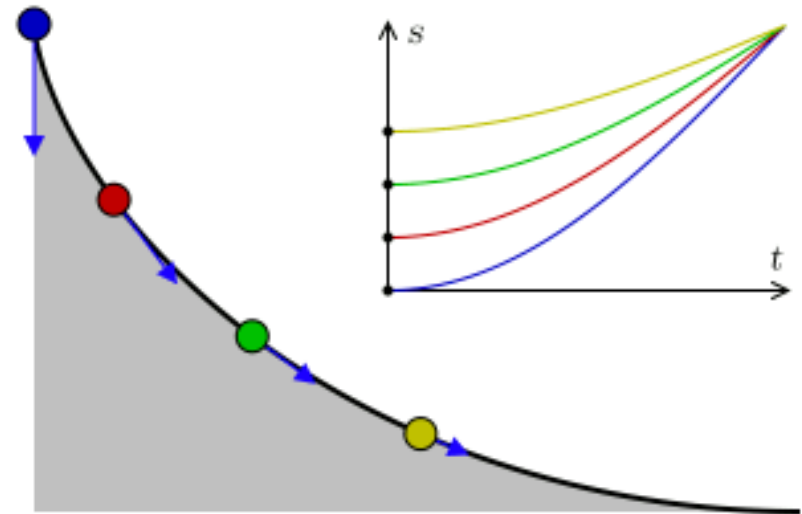


Christiaan Huygens

Ταυτόχρονο πρόβλημα

Horologium oscillatorium - 1659

«Δοσμένων των σημείων A και B σε ένα κάθετο επίπεδο, να υπολογιστεί η καμπύλη η οποία έχει την ιδιότητα, κάθε σημείο M που κινείται στην διαδρομή AMB υπό την επίδραση του βάρους του και χωρίς τριβές, να φτάνει στο κατώτατο σημείο B στον ίδιο πάντα χρόνο»

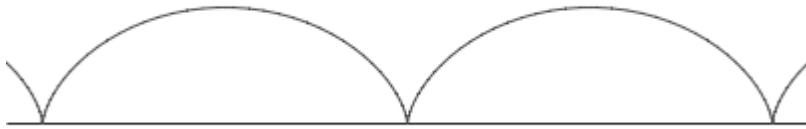


"Tautochrone curve"

Εικόνα 18



Κυκλοειδής καμπύλη



Κυκλοειδής καμπύλη

$$x(t) = r(t - \sin(t)),$$
$$y(t) = r(1 - \cos(t))$$



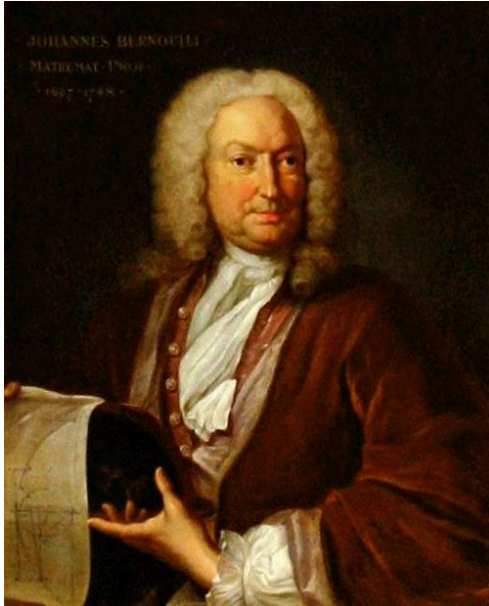
Jacob Bernoulli-1690

Εικόνα 19



Johann Bernoulli (1667-1748)

Acta Eruditorum 1696



Johann Bernoulli (1667-1748)

Εικόνα 20



Acta Eruditorum – 1696

Εικόνα 21

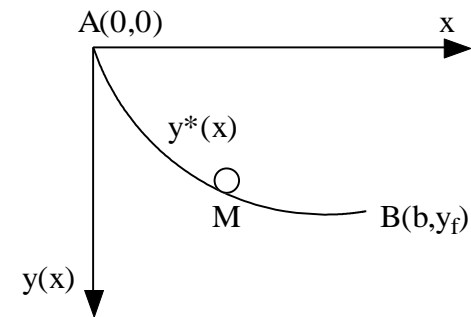


Johann Bernoulli

Βραχυστόχρονο πρόβλημα (1)

Η καμπύλη της ταχύτερης καθόδου

«Δοσμένων των σημείων A και B σε ένα κάθετο επίπεδο, να υπολογιστεί η καμπύλη που πρέπει να διαγράψει ένα σημείο M που κινείται στην διαδρομή AMB υπό την επίδραση του βάρους του, έτσι ώστε ξεκινώντας από το A, να φτάσει στο B στον ελάχιστο χρόνο»



$$y(0) = 0, y(b) = y_f$$

$$\frac{1}{2} m u(t)^2 = m g y(x) \Rightarrow u(t) = \sqrt{2 g y(x)} = \frac{ds}{dt}$$



Johann Bernoulli

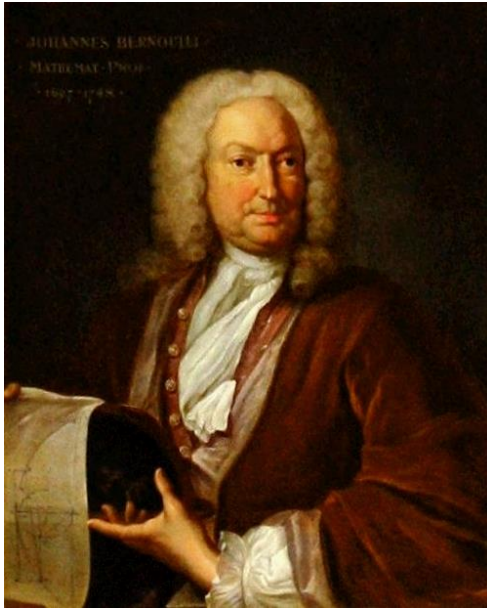
Βραχυστόχρονο πρόβλημα (2)

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{dt}{ds} ds = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2gy(x)}} \sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2} dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \frac{(1 + \dot{y}(x)^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} dx$$

..... και η λύση πάλι κυκλοειδής!



Ποιοι έλυσαν το πρόβλημα; (1)



Johann Bernoulli

Εικόνα 22



Gottfried Wilhelm

von Leibniz

Εικόνα 23

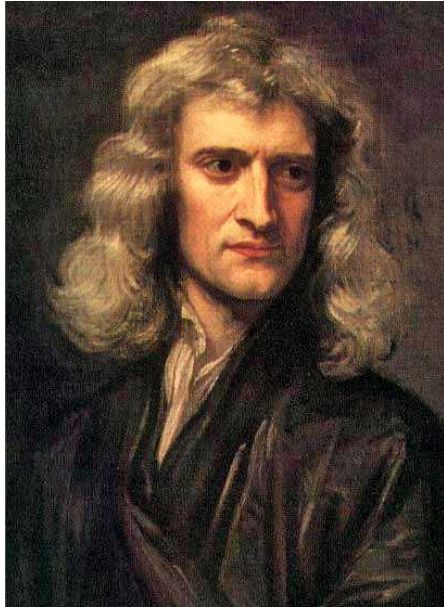


Jacob Bernoulli

Εικόνα 24



Ποιοι έλυσαν το πρόβλημα; (2)



Isaac Newton

Εικόνα 25



De l'Hopital

Εικόνα 26



Ehrenfried Walter von Tschirnhaus

Εικόνα 27



Η λύση του Johann Bernoulli – Οπτικομηχανική αναλογία

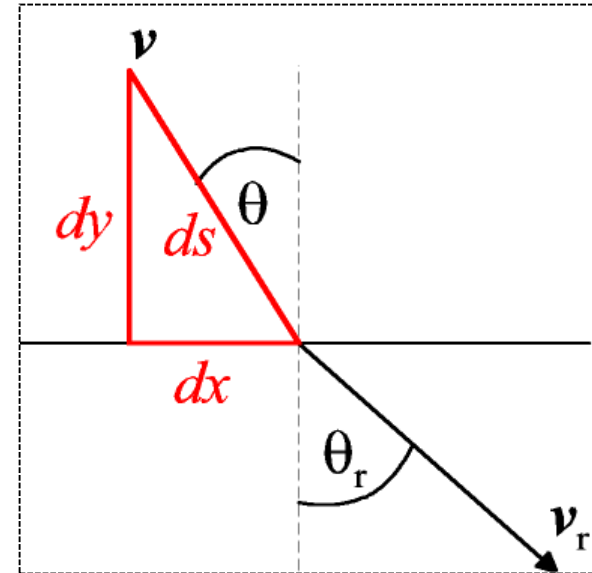
Νόμος διάθλασης: $\frac{\sin\theta}{v} = \frac{\sin\theta_r}{v_r}$

Σε κάθε επίπεδο: $\sin\theta = \frac{dx}{ds}$

$$\rightarrow \frac{1}{v} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{v_r} \frac{dx_r}{ds_r}$$

$\frac{1}{v_r} \frac{dx_r}{ds_r}$ είναι σταθερό σε κάθε επίπεδο

$$\rightarrow \frac{dx}{ds} = c v$$



$$v = \sqrt{2gy}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] y = k^2$$



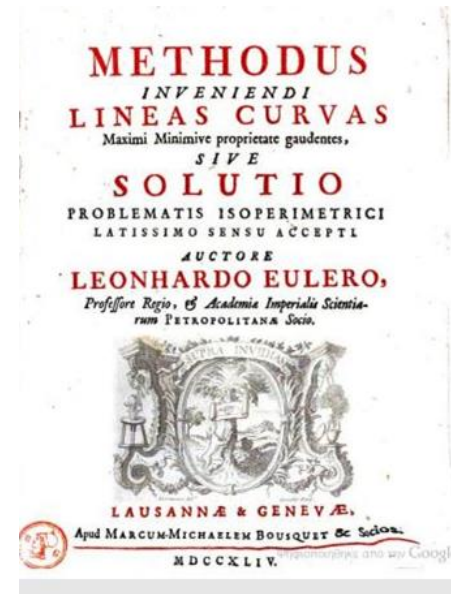
Leonhard Euler (1707 – 1783)

Methodus inveniendi curvas lineas



Leonhard Euler (1707 – 1783)

Εικόνα 28

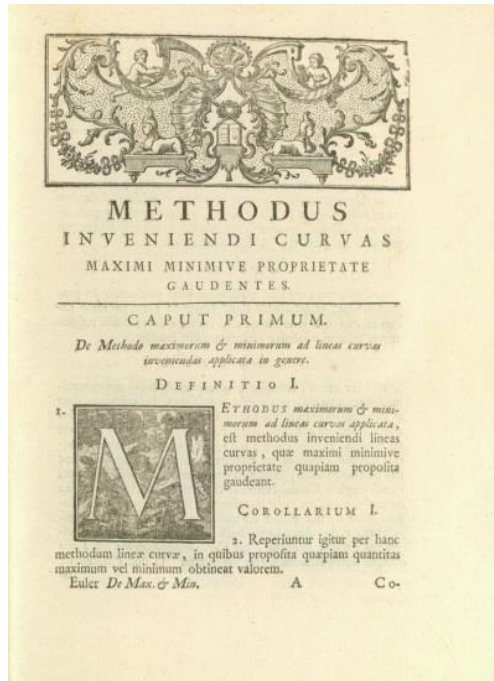


Methodus inveniendi curvas lineas 1744

Εικόνα 29



Leonhard Euler- Συστηματοποίηση των μεθόδων και οι πρώτες αναγκαίες συνθήκες

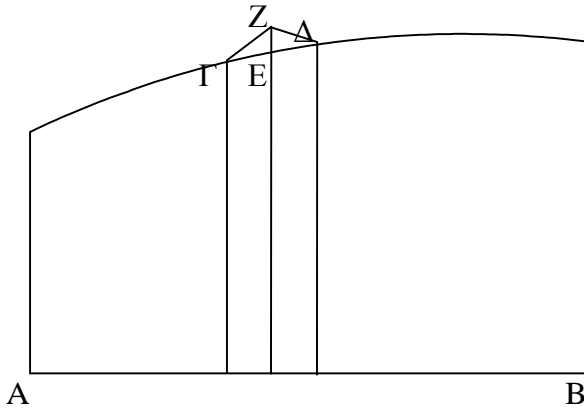


Εικόνα 30

Συστηματοποιεί τις υπάρχουσες μεθόδους και προτείνει **αναγκαίες συνθήκες** για την επίλυση των προβλημάτων αυτών.



Συστηματοποίηση των μεθόδων και οι πρώτες αναγκαίες συνθήκες (1)



$$J(x, y, y^{(1)}) := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x)) dx$$

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b, y(x) \in C^1[a, b]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(1)}} \right) = 0$$



Συστηματοποίηση των μεθόδων και οι πρώτες αναγκαίες συνθήκες (2)

$$J(x, y, \dots, y^{(n)}) := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(1)}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(2)}} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0$$

$$J := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x), Q) dx$$

$$\frac{dQ}{dx} = L(x, y(x), y^{(1)}(x))$$



Το βραχυστόχρονο πρόβλημα (1)

$$T(y, y^{(1)}) = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \underbrace{\frac{(1 + \dot{y}(x)^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}}}_{F(y, \dot{y}, x)} dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y^*(x), \dot{y}^*(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(x, y^*(x), \dot{y}^*(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{(1 + \dot{y}(x)^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{(1 + \dot{y}(x)^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} \right] = 0 \Leftrightarrow$$



Το βραχυστόχρονο πρόβλημα (2)

$$-\frac{(1 + \dot{y}(x)^2)^{\frac{1}{2}}}{2y(x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{y}(x)}{y(x)^{\frac{1}{2}}(1 + \dot{y}(x)^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0 \Leftrightarrow$$

.....

$$\frac{-1 - \dot{y}(x)^2 - 2\ddot{y}(x)y(x)}{2y(x)^{\frac{3}{2}}(1 + \dot{y}(x)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + \dot{y}(x)^2 + 2\ddot{y}(x)y(x) = 0$$



Ελάχιστο συνάρτησης μιας μεταβλητής (1)

Σχετικό ελάχιστο στο x_0

$$\exists \varepsilon_0 > 0, |x - x_0| < \varepsilon_0 \Rightarrow \Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0$$

$$f(x_0 + h) =$$

$$= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!} h^2 f''(x_0) + \dots$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!} h^{r-1} f^{(r-1)}(x_0) + \frac{1}{r!} h^r f^{(r)}(x_0 + \theta h)$$

$$0 < \theta < 1$$



Ελάχιστο συνάρτησης μιας μεταβλητής (2)

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + h) - f(x_0) = \\ &= hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_0) + \dots + \frac{1}{(r-1)!}h^{r-1}f^{(r-1)}(x_0) \\ &+ \frac{1}{r!}h^r f^{(r)}(x_0 + \theta h)\end{aligned}$$

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$$



Leonhard Euler (1707 – 1783)

Αρχή ελάχιστης δράσης



Leonhard Euler

Εικόνα 31

- *2nd Appendix on his book – On the motion of bodies in a non-resisting medium, determined by the method of maxima and minima.*
- Η πρώτη δημοσίευση στην αρχή της ελάχιστης δράσης η οποία αποδίδεται στον Maupertuis.

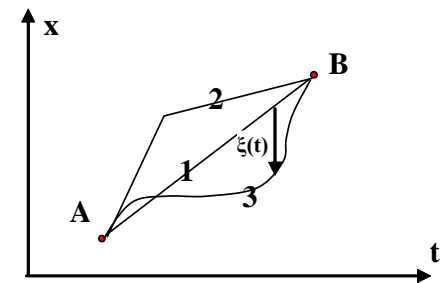


Αρχή ελάχιστης δράσης

Ένα σωματίο που ξεκινά από το σημείο A τη χρονική στιγμή t_A , και φθάνει στο σημείο B τη χρονική στιγμή t_B , ακολουθεί στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα τη διαδρομή εκείνη για την οποία η δράση, δηλαδή η ποσότητα:

$$S = \int_{t_A}^{t_B} (E_{κιν} - E_{δυν}) dt$$

καθίσταται στάσιμη.

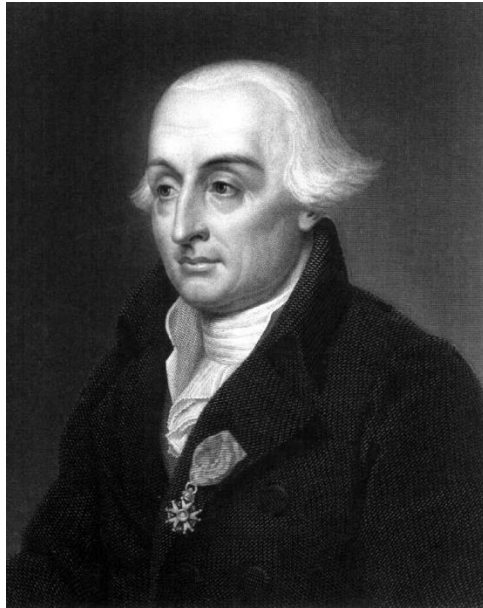


*Euler \rightarrow Lagrange \rightarrow Poisson \rightarrow Jacobi \rightarrow Hamilton
(με διαφορετική προσέγγιση)



Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)

Λογισμός των μεταβολών



Joseph-Louis Lagrange

Εικόνα 32

- Ανακοίνωσε την νέα μέθοδο στον Euler – 1755.
- *Proceedings of the Turin Society* – 1762.
- Απαλλαγή από γεωμετρικές μεθόδους και χρήση των συναρτήσεων σύγκρισης.
- Δίνεται από τον Euler η ονομασία «Λογισμός των Μεταβολών».



Μεταβολή του συναρτησιακού ΔJ

Μεταβολή του συναρτησιακού ΔJ

$$\Delta J = J(y^* + \varepsilon \delta y) - J(y^*)$$

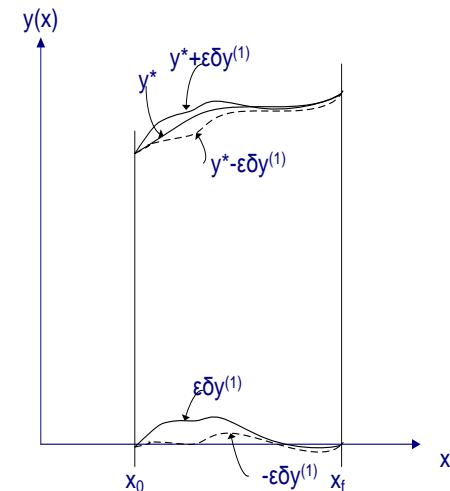
$$\delta y \in C^2([a, b]), \delta y(x_0) = \delta y(x_f) = 0$$

$$\|y(x)\| = \sup_{x \in [a, b]} |y(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |y'(x)|$$

Σχετικό ελάχιστο στο $y^*(x)$

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \|y(x) - y^*(x)\| < \varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$\Delta J = J(y) - J(y^*) \geq 0$$



Πρώτη μεταβολή δ του συναρτησιακού

Πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού δ

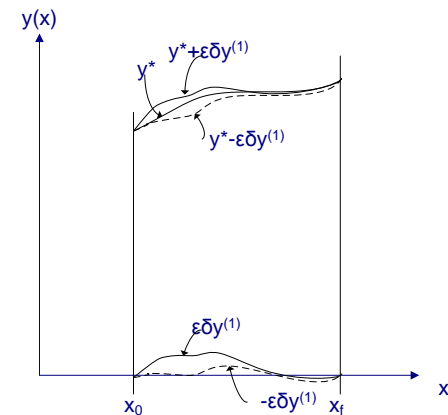
$$\Delta J = \delta J + \underbrace{\delta^2 J + \delta^3 J + \dots}_{g(y(x), \delta y(x)) |\delta y(x)|}$$

$$\lim_{\|\delta y(x)\| \rightarrow 0} g(y(x), \delta y(x)) = 0$$

Αναγκαία συνθήκη για ακρότατο

$$\delta J(y^*, \delta y) = 0$$

$$\delta J = \varepsilon \left. \frac{\partial J[y^*]}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \varepsilon \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0$$



Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)

Λογισμός των μεταβολών

$$J = \int_a^b F \left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \dots \right) dx$$

$y(a)$ και $y(b)$ **όχι σταθερά**, $y(x) \in C^1[a, b]$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_1^{(1)}} \right) = 0, \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_2^{(1)}} \right) = 0, \dots$$



Προβλήματα με περιορισμούς

Προβλήματα με περιορισμούς και οι πολλαπλασιαστές
Lagrange

$$\Phi_i \left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \dots \right) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m$$

$$F_a := F + l_1(x)\Phi_1 + l_2(x)\Phi_2 + \dots + l_m(x)\Phi_m$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα

$$\int_a^b \Phi_i \left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \dots \right) dx = c_i, \\ i = 1, 2, \dots, m$$



Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) – Προσπάθεια για ικανές συνθήκες & η δεύτερη μεταβολή



Adrien-Marie Legendre
Εικόνα 33

$$J(x, y(x), y^{(1)}(x)) := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x)) dx$$

Αναγκαίες και Ικανές Συνθήκες

1. Συνθήκες Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(1)}} \right) = 0$$

2. Συνθήκη Legendre για ύπαρξη ελαχίστου

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$$

Διατύπωση πολλών ερωτηματικών αλλά
και αντιπαραδειγμάτων από τον Lagrange.



Η δεύτερη μεταβολή

$$\delta^2 J = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_a^b \left(\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}_P w^2 + 2 \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}}_Q w w' + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}_R w'^2 \right) dx,$$

$$\delta y = w(x), w(a) = 0, w(b) = 0$$

$$\downarrow + \int_a^b \frac{d}{dx} w^2 u dx = 0$$

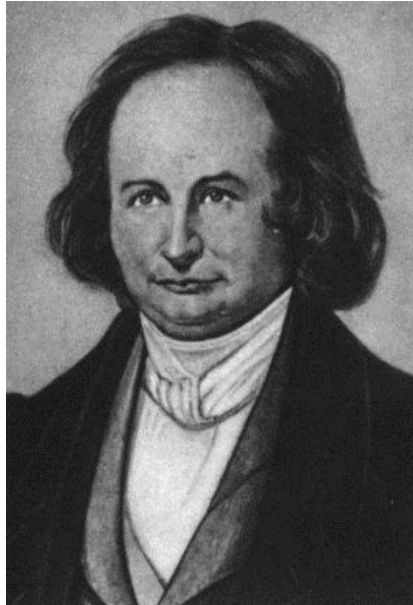
$$\delta^2 J = \int_a^b ((P + u')w^2 + 2(Q + u)w w' + R w'^2) dx =$$

$$= \int_a^b R \left(w' + \frac{Q + u}{R} w \right)^2 dx$$

$$R(P + u') = (Q + u)^2$$



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851) – 50 χρόνια αργότερα Ικανές συνθήκες αλλά χωρίς απόδειξη (μόνο υποδείξεις)



Carl Gustav Jacob Jacobi

Εικόνα 34

$$J(x, y(x), y^{(1)}(x)) := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x)) dx$$

Αναγκαίες και Ικανές Συνθήκες

1. Συνθήκες Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(1)}} \right) = 0$$

2. Συνθήκη Legendre (ελάχιστο)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$$

3. Αυστηρή συνθήκη Jacobi (ελάχιστο)

$$P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, Q = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}, R = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$$



Carl Gustav Jacob Jacobi - Ικανές συνθήκες αλλά χωρίς απόδειξη (μόνο υποδείξεις)

Θα πρέπει η λύση της Jacobi δ.ε.

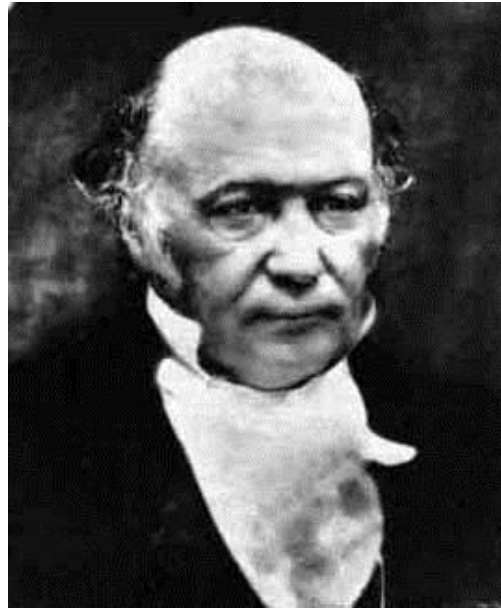
$$\left(P - \frac{dQ}{dt} \right) u(t) - \frac{d}{dt} [R\dot{u}(t)] = 0$$

$$u(x_0) = 0, \dot{u}(x_0) = 1$$

να μην μηδενίζεται στο $(a, b]$.



Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865)



Sir William Rowan Hamilton

Εικόνα 35

$$\begin{aligned} J(x, y(x), y^{(1)}(x)) &: \\ &= \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x)) dx \\ y(a) &= y_a, y(b) = y_b, y(x) \in C^1[a, b] \end{aligned}$$



Sir William Rowan Hamilton

Ορισμός της Χαμιλτονιανής συνάρτησης (1)

$$J(x, y(x), y^{(1)}(x)) := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x)) dx$$

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b, y(x) \in C^1[a, b]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(1)}} \right) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} (x, y(x)) + H \left(x, y(x), \frac{\partial \Phi}{\partial y} (x, y(x)) \right) = 0$$

Jacobi 1838

↓ Ισοδύναμες

$$H \left(x, y(x), p \left(x, y(x), y^{(1)}(x) \right) \right) = \langle p, y^{(1)}(x) \rangle - F \left(x, y(x), y^{(1)}(x) \right)$$



Sir William Rowan Hamilton

Ορισμός της Χαμιλτονιανής συνάρτησης (2)

$$p(x, y(x), y^{(1)}(x)) = \frac{\partial F}{\partial y^{(1)}}(x, y(x), y^{(1)}(x))$$

↓

$$y^{(1)}(x) = f(x, p, y(x))$$

Καραθεοδωρή ↓

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} > 0$$

$$y^{(1)}(x) = \frac{\partial H}{\partial p}(x, y(x), p(x))$$

$$p^{(1)}(x) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y(x), p(x))$$



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Οι περίφημες διαλέξεις (1875, 1879 και 1982)



Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Εικόνα 36

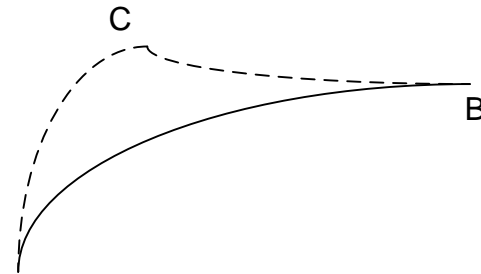
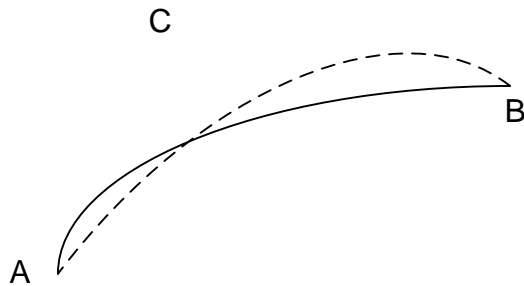
- Τονίζει την σημασία του πεδίου ορισμού του συναρτησιακού.
- Μελετά την οικογένεια των επιτρεπτών μεταβολών.
- Δίνει την πρώτη πλήρως σωστή απόδειξη για τις ικανές συνθήκες (εισάγει την έννοια του πεδίου άκρων καμπύλων και της συνάρτησης υπολοίπου E για τον σκοπό αυτό).

$$E(x, y, u, y^{(1)}) = F(x, y, y^{(1)}) - F(x, y, u) - (y^{(1)} - u) \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, u)$$



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1)

Ορίζει την έννοια του **ισχυρού** σχετικού ελάχιστου.



$$\|y(x)\| = \sup_{x \in [a,b]} |y(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |y'(x)|$$

$$\|y(x)\|_u = \sup_{x \in [a,b]} |y(x)|$$



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (2)

$$J(y) = \int_0^2 \dot{y}^2(x) [1 - \dot{y}(x)]^2 dx$$

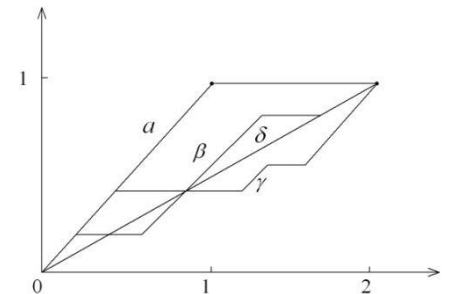
$$y(0) = 0, y(2) = 1$$

$$J(y) = 0, J(y) = 0.125$$

Συνθήκες Weierstrass-Erdmann

$$E > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$$

Καραθεωδωρή



Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833-1872)



Rudolf Friedrich Alfred Clebsch

Εικόνα 37

Γενίκευση των αποτελεσμάτων των Legendre-Jacobi.

$$J := \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \dots) dx$$

$$\Phi_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \dots) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}_1^{*2}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}_1^* \partial \dot{y}_2^*} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}_1^* \partial \dot{y}_n^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}_n^* \partial \dot{y}_1^*} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}_n^* \partial \dot{y}_2^*} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}_n^{*2}} \end{bmatrix} > 0$$



Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1)

Εφαρμογή

$$J(x, y, \dots, y^{(n)}) := \int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

$$y_1(x) = y(x)$$

$$y_2(x) = y^{(1)}(x) = y_1^{(1)}(x)$$

$$y_3(x) = y^{(2)}(x) = y_2^{(1)}(x)$$

....

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(1)}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(2)}} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0$$



Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (2)

Legendre-Clebsch condition

$$V(x, y_1, y_2, \dots, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots)$$

$$\Phi_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \dots) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

↓

$$J := \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx} dx$$



Christian Gustav Adolph Mayer (1839 – 1907)



Christian Gustav Adolph Mayer
Εικόνα 38

- Αποδεικνύει τον πολλαπλασιαστικό κανόνα του Lagrange στην περίπτωση που οι συνθήκες εμπεριέχουν παραγώγους.
- Υπολογίζει την καμπύλη δεδομένου μήκους με συγκεκριμένη αρχή και τέλος, της οποίας το κέντρο βάρους βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο.



Christian Gustav Adolph Mayer

$$\int_a^b z(x) \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx \quad \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx = l$$

Αναγάγει το ισοπεριμετρικό πρόβλημα σε πρόβλημα Lagrange.

$$\int_a^b f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots) dx = l_k$$

$$u_k(x) = \int_a^x f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots) dx$$

$$u_k(a) = 0, u_k(b) = l_k$$

$$\Phi_k = f_k - u_k^{(1)} = 0$$



Σημαντικά πρόσωπα στην συνέχεια του Λογισμού των μεταβολών (1)



David Hilbert (1862 - 1943)

Εικόνα 39



Constantin Carathéodory (1873 - 1950)

Εικόνα 40



Σημαντικά πρόσωπα στην συνέχεια του Λογισμού των μεταβολών (2)



Oskar Bolza (1857 - 1942)
Εικόνα 41



Adolf Kneser (1862 - 1930)
Εικόνα 42



Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου (1950- σήμερα)

Ο στόχος του βέλτιστου ελέγχου, είναι να προσδιορίσει τα **σήματα εισόδου** τα οποία θα εξαναγκάσουν μια **διαδικασία** να ικανοποιήσει **φυσικούς περιορισμούς** και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιήσει (μεγιστοποιήσει) κάποια **κριτήρια επίδοσης**.

$$\overrightarrow{u(t) \in \Omega_u} \quad \boxed{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = a(t, x(t), u(t)) \\ x(t) \in \Omega_x \end{array}} \quad \overrightarrow{y(t) = f(t, x(t), u(t))}$$

$$J(x, u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), u(t)) dt$$



Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου

$$\begin{aligned} J &= [x(t_f) - r(t_f)]^T H(t_f) [x(t_f) - r(t_f)] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left[[x(t) - r(t)]^T Q(t) [x(t) - r(t)] + [u(t)]^T R(t) [u(t)] \right] dt \\ &= \|x(t_f) - r(t_f)\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} (\|x(t) - r(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2) dt \end{aligned}$$

$$H(t) \geq 0, Q(t) \geq 0, R(t) > 0$$

Ως **βέλτιστο έλεγχο** εννοούμε την είσοδο $u(t)$ που ελαχιστοποιεί (ή μεγιστοποιεί) το κριτήριο απόδοσης.



Εύρεση της εισόδου που θα πάει έναν πύραυλο με συγκεκριμένα καύσιμα στο μεγαλύτερο ύψος



Εικόνα 43

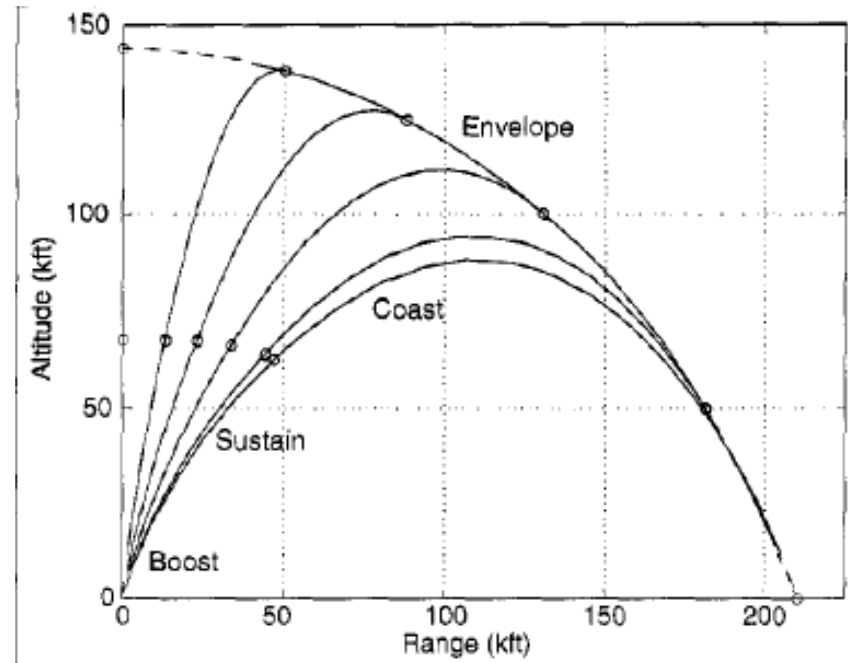


Εύρεση εισόδου που θα μεταφέρει έναν πύραυλο με συγκεκριμένα καύσιμα σε μεγαλύτερη απόσταση



"Hawk mobile"

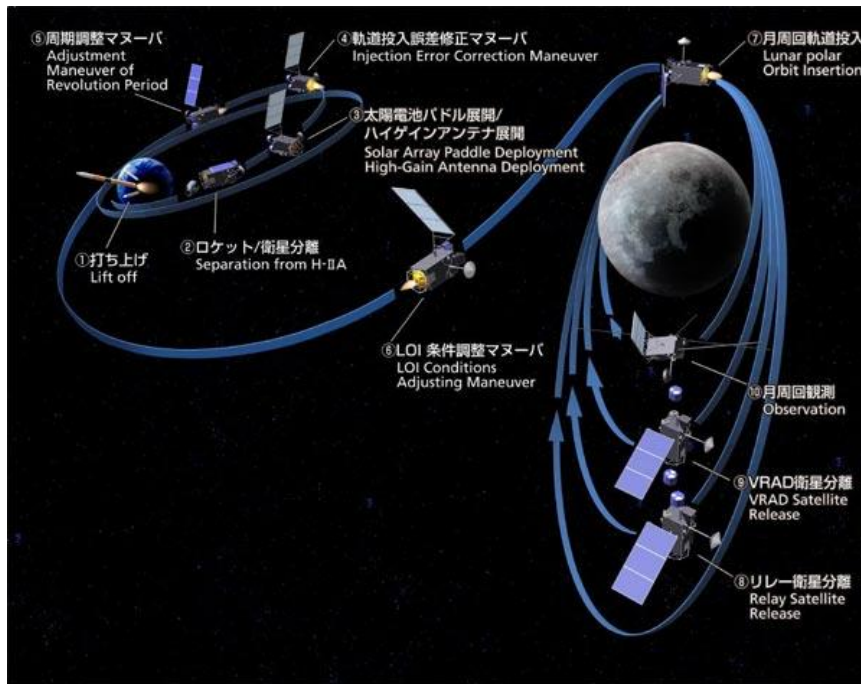
Εικόνα 44



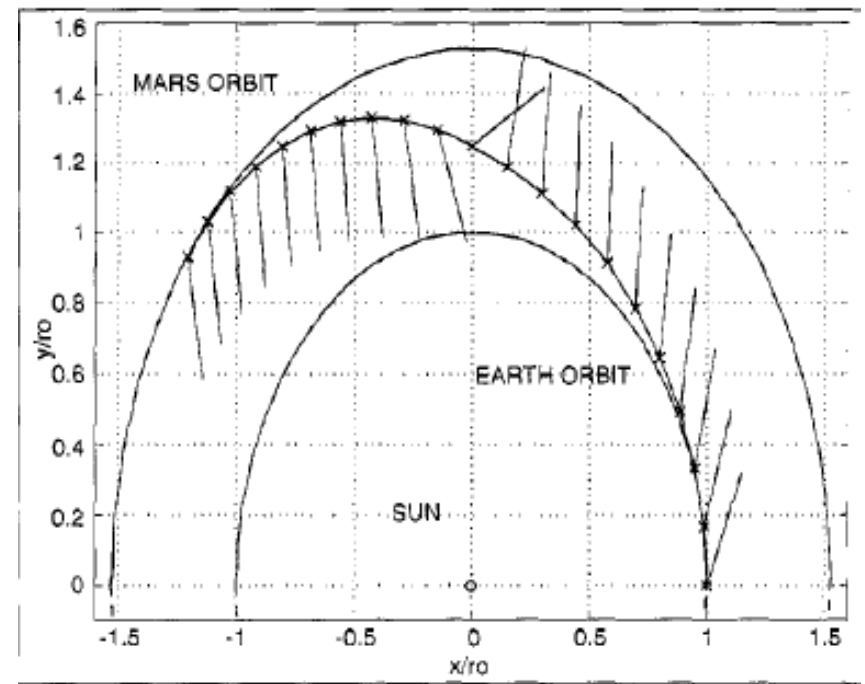
Σχήμα 3: Control Systems Magazine



Εύρεση τροχιάς ενός πυραύλου που θα μεταφερθεί με συγκεκριμένο σύνολο καυσίμων από την Γη στο Φεγγάρι



Εικόνα 45



Σχήμα 4: Control Systems Magazine

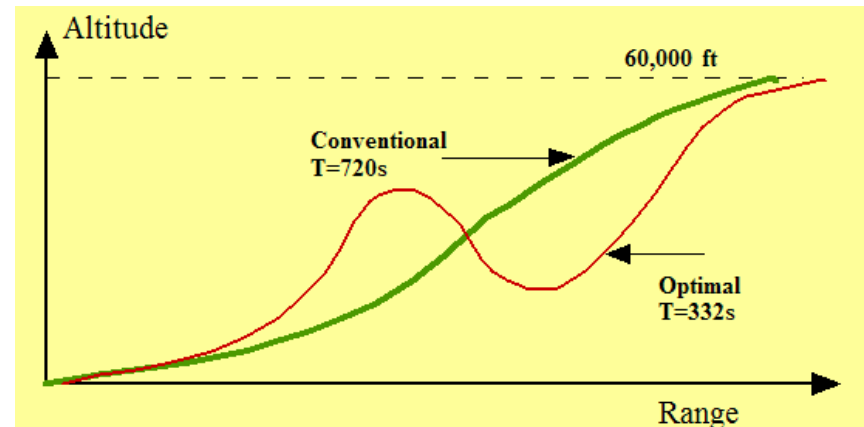


Πρόβλημα ανύψωσης αεροσκάφους σε ελάχιστο χρόνο



"F-4 Phantom II in flying"

Εικόνα 46



Εικόνα 47: THE EVOLUTION OF MODERN CONTROL THEORY, A Personal Perspective, MICHAEL ATHANS



Προβλήματα παρακολούθησης (Tracking problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης σε μια επιθυμητή τροχιά.

Κριτήριο απόδοσης

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[[x(t) - r(t)]^T Q [x(t) - r(t)] \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \|x(t) - r(t)\|_Q^2 dt \end{aligned}$$

όπου Q συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας.



Προβλήματα παρακολούθησης

Παράδειγμα

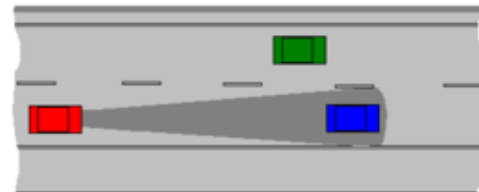
Παράδειγμα. Πύραυλος που ακολουθεί τον στόχο. Διατήρηση σταθερής απόστασης από προπορευόμενο όχημα.



"Exocet-mil"
Εικόνα 48



"Radar antenna"
Εικόνα 49



Λύση του προβλήματος – Δεν υπάρχουν περιορισμοί στην είσοδο

$$J(x, \mathbf{u}) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t), u(t))$$

$$H' = \langle p, \dot{x}(t) \rangle - F(t, x(t), u(t)) \text{ Ψευδοχαμιλτονιανή (Clarke 1983)}$$

$$x^{*(1)}(t) = \frac{\partial H'}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t))$$

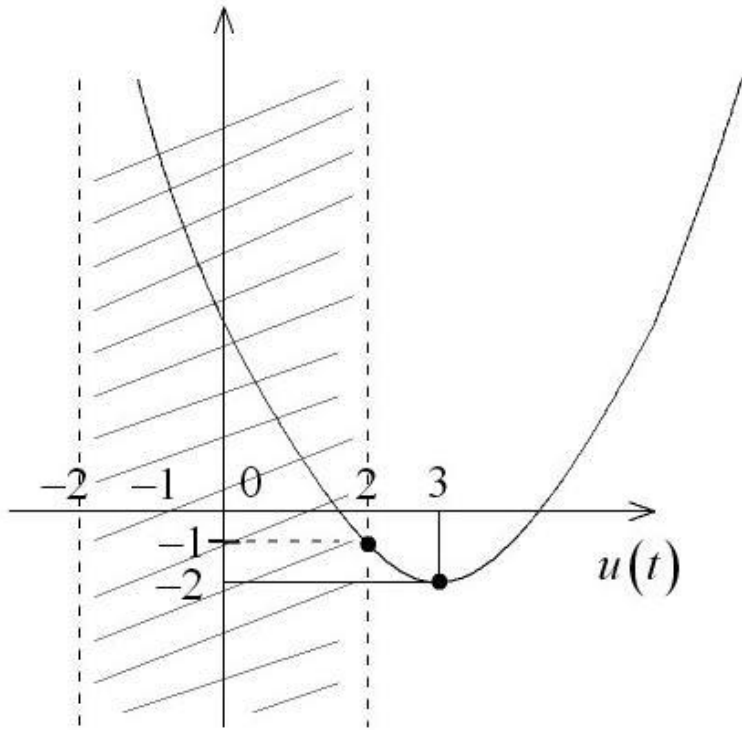
$$p^{*(1)}(t) = -\frac{\partial H'}{\partial x}(t, x^*(t), p^*(t))$$

$$\frac{\partial H'}{\partial u}(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0, \text{ μέγιστο}$$



Συναρτήσεις με περιορισμούς



$$H(u) = u^2 - 6u + 7$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u - 6 = 0 \Rightarrow$$

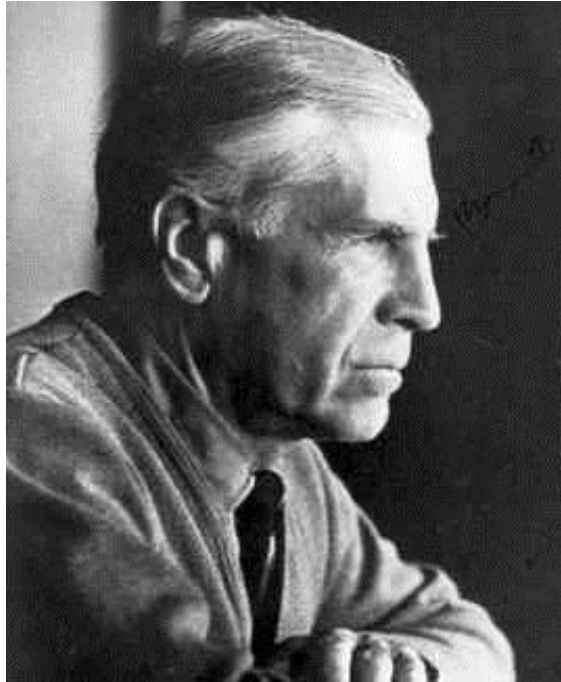
$$u = 3$$

$$|u| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq u \leq 2$$

$$H(u^*) \leq H(u), \forall |u| \leq 2$$



Lev Semenovich Pontryagin (1908 - 1988)



Lev Semenovich Pontryagin

Εικόνα 50

Αρχή μεγίστου του Pontryagin (όταν υπάρχουν περιορισμοί)

$$J(x, \mathbf{u}) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t), u(t))$$

$$\mathbf{H}' = \langle p, \dot{x}(t) \rangle - F(t, x(t), \mathbf{u}(t))$$



Αρχή μεγίστου του Pontryagin (όταν υπάρχουν περιορισμοί)

$$x^{*(1)}(t) = \frac{\partial H'}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t))$$

$$p^{*(1)}(t) = -\frac{\partial H'}{\partial x}(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t))$$

$$H'(t, x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \max_{u(x) \in \Omega} H'(t, x^*(t), p^*(t), u(t))$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0, \text{ μέγιστο}$$



Richard Ernest Bellman (1920-1984)

Hamilton-Jacobi-Belmann εξίσωση (1)



Richard Ernest Bellman
Εικόνα 51

Ανακάλυψε τον δυναμικό προγραμματισμό.

$$J(x, \mathbf{u}) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

Ικανή συνθήκη για ελάχιστο

$$\frac{\partial S^T}{\partial t}(t, x(t)) + \min_{\mathbf{u} \in \Omega} \left\{ F(t, x(t), \mathbf{u}(t)) + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, f(t, x(t), u(t)) \right\rangle \right\} = 0$$



Richard Ernest Bellman (1920-1984)

Hamilton-Jacobi-Belmann εξίσωση (2)

Τελικές συνθήκες

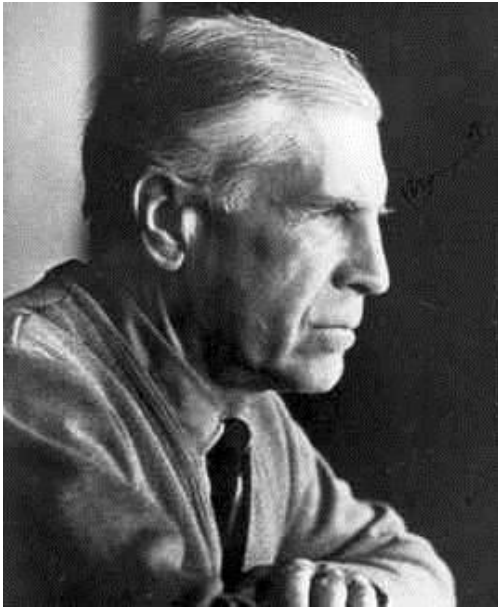
$$S(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f)$$

$$S(x(t_1), t_1) = \min_{u \in \Omega} \left\{ h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), u(t)) dt \right\}$$

Κόστος από το t_1 (αυθαίρετο) ως το t_f .



..συνέπειες αποτελεσμάτων του Κ. Καραθεοδωρή (Pesch και Bulirsch)



Maximum principle

Εικόνα 52



Constantin Carathéodory

(1873 - 1950)

Εικόνα 53



Εξίσωση

Hamilton-Jacobi-Bellman (1954)

Caratheodory (1935)

Εικόνα 54



Rudolf E. Kalman, 1930 -



Rudolf E. Kalman

Εικόνα 55

Συνέβαλε στην εισαγωγή της θεωρίας του Καραθεοδωρή στην θεωρία του Βέλτιστου Ελέγχου και διευκρίνισε τις σχέσεις μεταξύ της θεωρίας μεγίστου του Pontryagin και των εξισώσεων Hamilton-Jacobi-Bellman καθώς επίσης και του λογισμού των μεταβολών γενικά.



Kalman: Το πρόβλημα του βέλτιστου ρυθμιστή (LQR problem)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f)H(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

$H(t) \geq 0$, $Q(t) \geq 0$, $R(t) > 0$ συμμετρικοί

$$u^*(t) = \underbrace{-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)}_{F(t)}x(t)$$

$$\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) = -Q(t) - A^T(t)K(t)$$

$$K(t_f) = H(t_f)$$



Kalman: Infinite horizon LQR problem (1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

$Q \geq 0, R > 0$ συμμετρικοί

$$\underbrace{\text{rank}_{\mathbb{R}}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]}_{\Sigma \text{ ελεγχίμο}} = n \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = K$$
$$KA - KBR^{-1}B^TK = -Q - A^TK$$

⇓

$$u^*(t) = \underbrace{-R^{-1}B^TK}_{F}x(t) \quad \text{Κόστος } J \text{ πεπερασμένο}$$



Kalman: Infinite horizon LQR problem (2)

$$\underbrace{\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{\textit{\Sigma} παρατηρησιμο}} = n$$
$$C \in \mathbb{R}^{m \times n}, m = \text{rank}_{\mathbb{R}} Q, Q = C^T C$$



Κλειστό σύστημα ευσταθές

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^TK)x(t)$$

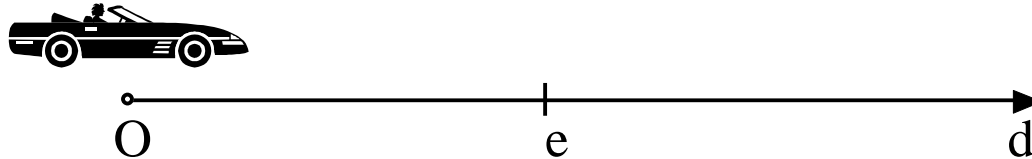
Λύση K μοναδική



.... συνεχίζεται



Παράδειγμα



- $d(t)$ =απόσταση
- $a(t)$ =επιτάχυνση από πεντάλ γκαζιού
- $b(t)$ =επιβράδυνση από πεντάλ φρένου

$$\ddot{d}(t) = a(t) + b(t)$$

$$x_1(t) = d(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{d}(t)$$

$$x_2(t) = \dot{d}(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$\ddot{d}(t) = a(t) + b(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = a(t) + b(t)$$



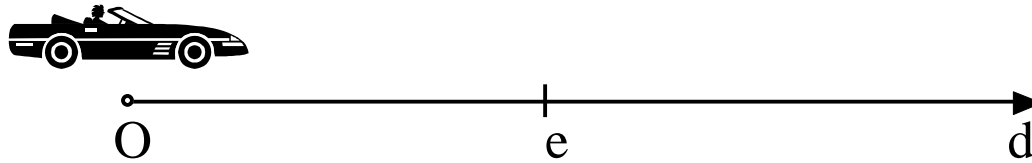
Εξισώσεις Κατάστασης

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$$



Φυσικοί περιορισμοί για διάνυσμα καταστάσεως



Ας θεωρήσουμε ότι το παραπάνω αυτοκίνητο ξεκινά από μηδενική ταχύτητα και θέλει να φτάσει και να σταματήσει στο σημείο e .

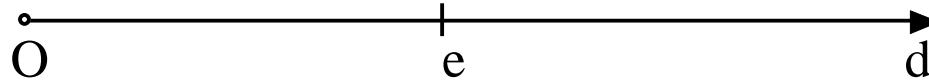
$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_0) \\ \dot{d}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_f) \\ \dot{d}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αν υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο δεν προσπερνά το σημείο e και μετά επιστρέφει σε αυτό, έχουμε

$$0 \leq x_1(t) \leq e, 0 \leq x_2(t)$$



Φυσικοί περιορισμοί για είσοδο



- Η επιτάχυνση περιορίζεται από τις επιδόσεις της μηχανής (έστω μέγιστη επιτάχυνση M_1).
- Η επιβράδυνση περιορίζεται από τις παραμέτρους των φρένων (έστω μέγιστη επιβράδυνση M_2).

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1(t) \leq M_1 \\ -M_2 &\leq u_2(t) \leq 0 \end{aligned}$$



Κριτήριο απόδοσης (1)

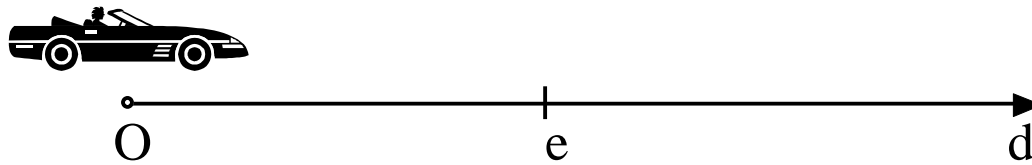
- **Ελάχιστη κατανάλωση καυσίμων.**

Αν ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμων είναι ανάλογος της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τα καύσιμα, τότε η ποσότητα που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η παρακάτω :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [k_1 x_2^2(t) + k_2 u_1^2(t)] dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_f} \left[\begin{matrix} x_1(t) & x_2(t) \end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u_1^T(t) \underbrace{(k_2)}_R u_1(t) \right] dt$$



Κριτήριο απόδοσης (2)



- **Ελάχιστος χρόνος**

Αν θέλουμε το παραπάνω αυτοκίνητο να φτάσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο τότε η ποσότητα που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η παρακάτω :

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$$



Προβλήματα ελέγχου τελικής τιμής (terminal control problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία ελαχιστοποιεί την απόκλιση της τελικής τιμής του διανύσματος καταστάσεως από μια επιθυμητή τιμή.

Κριτήριο απόδοσης

$$J = \sum_{i=1}^n [x_i(t_f) - r_i(t_f)]^2 = \|x(t_f) - r(t_f)\|^2$$

ή πιο γενικά

$$J = [x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)]$$

όπου H συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Πορεία βαλλιστικού πύραυλου για να πετύχει τον στόχο του.



Προβλήματα ελάχιστης ενέργειας (1) (minimum control effort problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία μεταφέρει το σύστημα μας από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική κατάσταση καταβάλλοντας την ελάχιστη δυνατή είσοδο.

Κριτήριο απόδοσης

Ελάχιστα καύσιμα

$$J = \sum_{i=1}^n [b_i |u_i(t)|], b_i > 0$$



Προβλήματα ελάχιστης ενέργειας (2) (minimum control effort problem)

Κριτήριο απόδοσης

Ελάχιστη ενέργεια

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t)Ru(t)]dt = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_R^2 dt$$

όπου R συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Ελάχιστα καύσιμα για την κίνηση ενός αεροπλάνου, αυτοκινήτου κ.λ.π..



Συνδυασμός παρακολούθησης και ελάχιστης ενέργειας (tracking problem in combination with minimum control effort) (1)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης σε μια επιθυμητή τροχιά καταβάλλοντας την ελάχιστη δυνατή ενέργεια.

Κριτήριο απόδοσης

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\|x(t) - r(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2] dt$$

όπου Q, R συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες.

Παράδειγμα. Πύραυλος που ακολουθεί τον στόχο ξοδεύοντας τα λιγότερα καύσιμα.



Συνδυασμός παρακολούθησης και ελάχιστης ενέργειας (tracking problem in combination with minimum control effort) (2)

Αν επιπλέον θέλουμε και η τελική τιμή του διανύσματος κατάστασης να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά σε μια επιθυμητή τιμή, τότε το κριτήριο δίνεται παρακάτω :

Κριτήριο απόδοσης

$$J = \|x(t_f) - r(t_f)\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} [\|x(t) - r(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2] dt$$

όπου Q, R συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες και H συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας.



Προβλήματα ρυθμιστή (regulator problem)

Πρόκειται για ειδική περίπτωση του προβλήματος ανίχνευσης στο οποίο το επιθυμητό διάνυσμα κατάστασης είναι το μηδενικό.

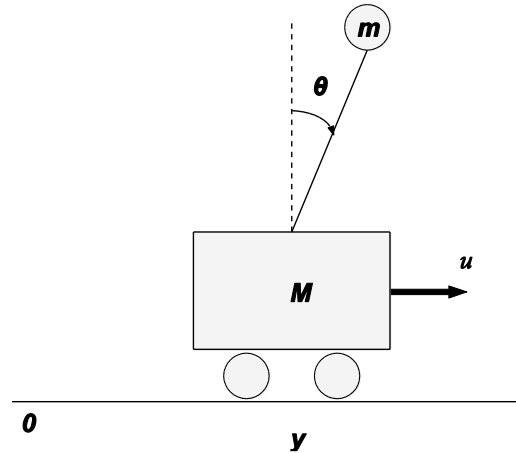
Κριτήριο απόδοσης

$$J = \|x(t_f)\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \|x(t)\|_Q^2 dt$$

όπου Q συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακες και H συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας.



1. Ανάστροφο εκκρεμές (inverted pendulum)



$$\ddot{y}(t) = \frac{u(t) + mL\dot{\theta}(t)^2 \sin(\theta(t)) - mg \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{M + m \sin^2(\theta(t))}$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-u(t) \cos(\theta(t)) - mL\dot{\theta}(t)^2 \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) + (M + m)g \sin(\theta(t))}{L(M + m \sin^2(\theta(t)))}$$



2. Ανάστροφο εκκρεμές (inverted pendulum)

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t), x_3(t) = \theta(t), x_4(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{u(t) + mLx_4(t)^2 \sin(x_3(t)) - mg \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t))}{M + m \sin^2(x_3(t))}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) &= \\ &= \frac{-u(t) \cos(x_3(t)) - mLx_4(t)^2 \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t)) + (M + m)g \sin(x_3(t))}{L(M + m \sin^2(x_3(t)))} \end{aligned}$$



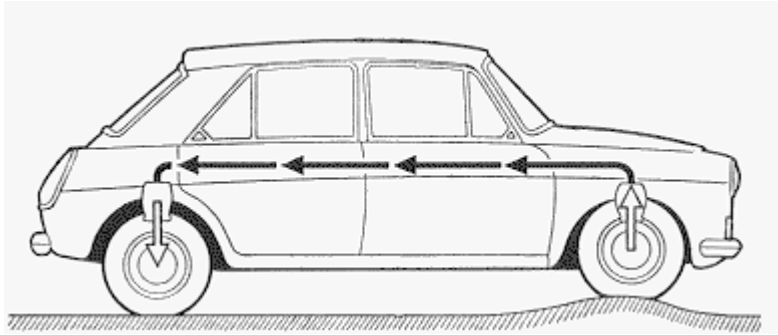
3. Ανάστροφο εκκρεμές (inverted pendulum)

Αν στόχος μας είναι να βρούμε έναν έλεγχο u^* ο οποίος να διατηρεί την γωνία $\theta(t)$ όσο το δυνατό πιο κοντά στο μηδέν με την ελάχιστη δυνατή ενέργεια τότε θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό

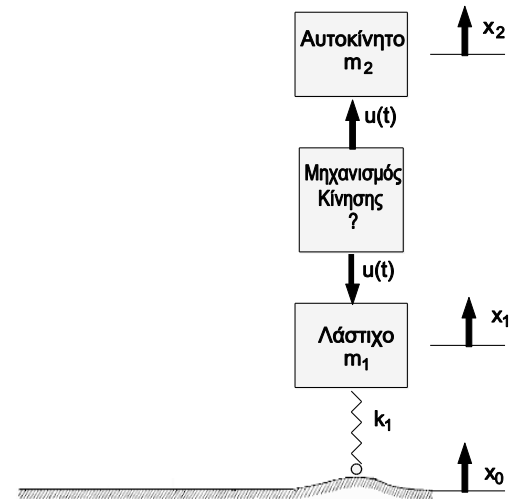
$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} (qx_3^2(t) + ru(t)^2) dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_f} \left(x(t)^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_Q x(t) + \underbrace{[r]}_R u(t)^2 \right) dt$$



Σύστημα ανάρτησης αυτοκινήτου (1)



Εικόνα 56

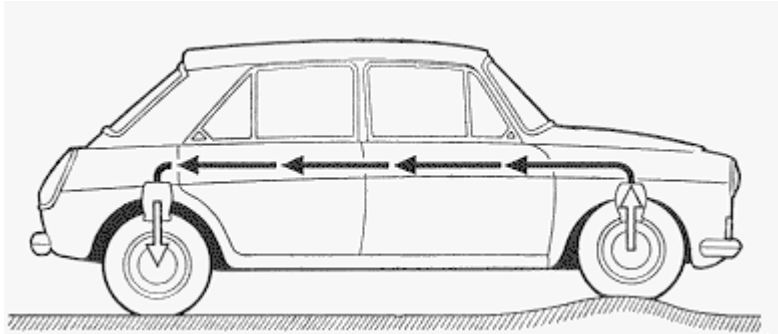


$$m_2 \ddot{x}_2(t) = u(t)$$

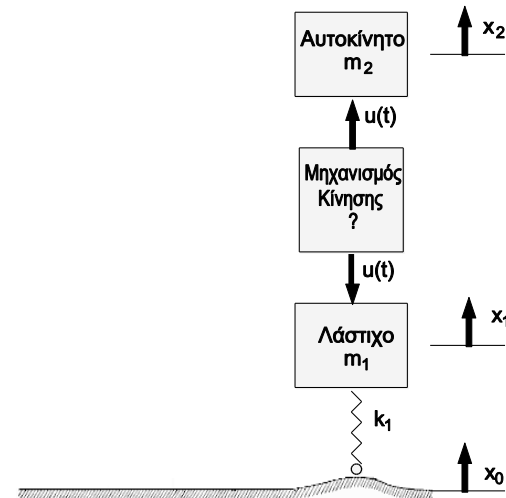
$$m_1 \ddot{x}_1(t) + k_1(x_1(t) - x_0(t)) = -u(t)$$



Σύστημα ανάρτησης αυτοκινήτου (2)



Εικόνα 57



$$x_3(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$x_4(t) = \dot{x}_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{k_1}{m_1} (x_1(t) - x_0(t)) - \frac{u(t)}{m_1}$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{u(t)}{m_2}$$



Σύστημα ανάρτησης αυτοκινήτου (3)

Αν θεωρήσουμε ότι οι διαταραχές λόγω ανωμαλίας του εδάφους $x_0(t)$ είναι σταθερές τότε μπορούμε να θέσουμε $x_0(t) = x_0 \in \mathbb{R}$. Θέτοντας ως νέες μεταβλητές τις παρακάτω:

$$\bar{x}_1(t) = x_1(t) - x_0$$

$$\bar{x}_2(t) = x_2(t) - x_0$$

$$\bar{x}_3(t) = \dot{\bar{x}}_1(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$\bar{x}_4(t) = \dot{\bar{x}}_2(t) = \dot{x}_2(t)$$



Σύστημα ανάρτησης αυτοκινήτου (4)

Επομένως

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \\ \dot{\bar{x}}_3(t) \\ \dot{\bar{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \bar{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u(t)$$



Σύστημα ανάρτησης αυτοκινήτου (5)

Αν θέλουμε να ελαττώσουμε :

- a) Τις ταλαντώσεις που δέχεται το όχημα και συνεπώς και οι επιβάτες μέσα στο όχημα λόγω ανωμαλιών στο έδαφος οι οποίες εξαρτώνται από την διαφορά $x_2(t) - x_1(t)$.
- b) Τις ταλαντώσεις που δημιουργούνται μεταξύ του λάστιχου και του εδάφους λόγω ανωμαλιών του εδάφους οι οποίες εξαρτώνται από την διαφορά $x_1(t) - x_0$, με την ελάχιστη δυνατή ενέργεια, θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό:



Σύστημα ανάρτησης αυτοκινήτου (6)

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \int_0^{\infty} \left(q_1(x_1(t) - x_0)^2 + q_2(x_2(t) - x_1(t))^2 + ru(t)^2 \right) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left(q_1\bar{x}_1^2(t) + q_2(\bar{x}_2(t) - \bar{x}_1(t))^2 + ru(t)^2 \right) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left((q_1 + q_2)\bar{x}_1^2(t) + q_2\bar{x}_2^2(t) - 2q_2\bar{x}_1(t)\bar{x}_2(t) + ru(t)^2 \right) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\bar{x}(t)^T \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 + q_2 & -q_2 & 0 & 0 \\ -q_2 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_Q \bar{x}(t) + u(t)^T \underbrace{\begin{bmatrix} r \end{bmatrix}}_R u(t) \right) dt
 \end{aligned}$$

$$\bar{x}(t) = [\bar{x}_1(t)^T \quad \bar{x}_2(t)^T \quad \bar{x}_3(t)^T \quad \bar{x}_4(t)^T]^T$$



Έλεγχος θερμοκρασίας δωματίου (1)

$$\dot{\theta}(t) - a(\theta(t) - \theta_a) + bu(t)$$

$\theta(t)$ είναι η θερμοκρασία στο δωμάτιο

$\theta_a(t)$ η θερμοκρασία του περιβάλλοντος εκτός του δωματίου
την οποία θεωρούμε σταθερή π.χ. $\theta_a(t) = \theta_a$

$u(t)$ ο ρυθμός θέρμανσης του δωματίου

Αν θέσουμε

$$x(t) = \theta(t) - \theta_a$$

τότε

$$\dot{x}(t) - ax(t) + bu(t)$$



Έλεγχος θερμοκρασίας δωματίου (2)

Αν στόχος μας είναι να πετύχουμε στο διάστημα $[0, T]$ θερμοκρασία στο δωμάτιο όσο το δυνατό πιο κοντά στους r βαθμούς, θα πρέπει η μεταβλητή $\theta(t)$ να πλησιάσει όσο το δυνατό περισσότερο στο r ,

ή ισοδύναμα θα πρέπει να μειώσουμε τον όρο

$$\theta(t) - r = x(t) - (r - \theta_a)$$

μέσω κατάλληλης εισόδου.



Έλεγχος θερμοκρασίας δωματίου (3)

$$\dot{x}(t) - ax(t) + bu(t)$$

Αν επιπλέον θέλουμε να πετύχουμε τον στόχο αυτό με την ελάχιστη δυνατή ενέργεια θα πρέπει να υπολογίσουμε την είσοδο που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$J(u) = \int_0^T (q(x(t) - x_a)^2 + ru(t)^2) dt$$

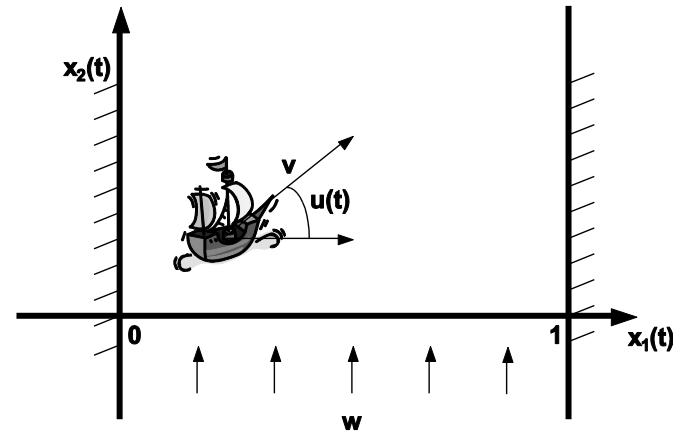
όπου $x_a = r - \theta_a$.



Πρόβλημα Zermelo (1)

$$\dot{x}_1(t) = v \cos(\theta(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = v \sin(\theta(t)) + w$$



v είναι η σταθερή ταχύτητα του πλοίου,

w η σταθερή ταχύτητα του ρεύματος,

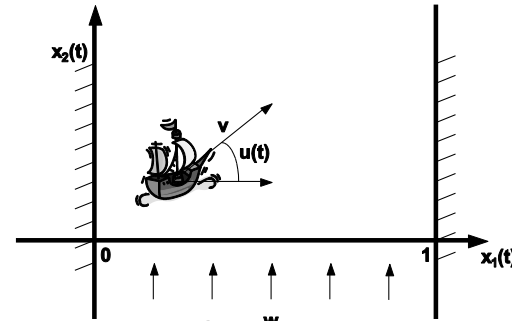
$\theta(t)$ η γωνία που σχηματίζει το πλοίο σε σχέση με τον άξονα του $x_1(t)$.



Πρόβλημα Zermelo (2)

$$\dot{x}_1(t) = v \cos(\theta(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = v \sin(\theta(t)) + w$$



Αν θέλουμε το πλοίο να φτάσει το συντομότερο δυνατό από το σημείο $(0,0)$ σε οποιοδήποτε άλλο σημείο με τότε θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό

$$J = t_f = \int_0^{t_f} dt$$

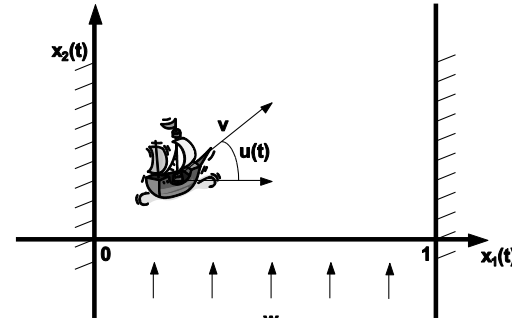
βάσει των περιορισμών $x_1(0) = x_2(0) = 0$ και $t_f, x_2(t_f)$ ελεύθερο, $x_1(t_f) = 1$ και t_f ελεύθερο.



Πρόβλημα Zermelo (3)

$$\dot{x}_1(t) = v \cos(\theta(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = v \sin(\theta(t)) + w$$



Ένα άλλο πρόβλημα που θα μπορούσε να τεθεί είναι να βρεθεί η γωνία $\theta(t)$ που θα πρέπει να ακολουθήσει το πλοίο ώστε να φτάσει στο σημείο $(1,0)$ στην απέναντι όχθη το οποίο ισοδυναμεί με τους περιορισμούς

$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(t_f) = 1, x_2(t_f) = 0$ και t_f ελεύθερο.



Βιβλιογραφία

- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/16)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- Εικόνα 1: "Johann Bernoulli2" by James T. Smith, Professor Emeritus of Mathematics, San Francisco State University - <http://test.maa.org>. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johann_Bernoulli2.jpg#mediaviewer/File:Johann_Bernoulli2.jpg
- Εικόνα 2:
<http://www.history.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Pontryagin.html>
- Εικόνα 3: <http://184.182.233.151/rid=1LS6HP54L-VXTT92-S3/Colonizaci%C3%B3n%20cataginesa.jpg>
- Εικόνα 4: "Meister des Vergilius Vaticanus 001" by Deutsch: Meister des Vergilius Vaticanus – The Yorck Project: 10.000 Meisterwerke der Malerei. DVD-ROM, 2002. ISBN 3936122202. Distributed by DIRECTMEDIA Publishing GmbH.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/16)

Licensed under Public domain via Wikimedia Commons –

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Meister_des_Vergilius_Vaticanus_001.jpg#mediaviewer/File:Meister_des_Vergilius_Vaticanus_001.jpg

- Εικόνα 5: "Domenico-Fetti Archimedes 1620" by Domenico Fetti
http://archimedes2.mpiwg-berlin.mpg.de/archimedes_templates/popup.htm. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons –
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg#mediaviewer/File:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg
- Εικόνα 6: "Justus Sustermans - Portrait of Galileo Galilei, 1636" by Justus Sustermans -
<http://www.nmm.ac.uk/mag/pages/mnuExplore/PaintingDetail.cfm?ID=BHC2700>. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/16)

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Justus Sustermans Portrait of Galileo Galilei, 1636.jpg#mediaviewer/File:Justus Sustermans Portrait of Galileo Galilei, 1636.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Justus_Sustermans_Portrait_of_Galileo_Galilei,_1636.jpg#mediaviewer/File:Justus_Sustermans_Portrait_of_Galileo_Galilei,_1636.jpg)

- Εικόνα 7: <http://martaguide.com/2010/05/09/marta-to-six-flags/>
- Εικόνα 8: "Jakob Bernoulli" by Niklaus Bernoulli (1662-1716) - [2] [3]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jakob_Bernoulli.jpg#mediaviewer/File:Jakob_Bernoulli.jpg
- Εικόνα 9: "Gottfried Wilhelm von Leibniz" by Christoph Bernhard Francke - /gbrown/philosophers/leibniz/BritannicaPages/Leibniz/LeibnizGif.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg#mediaviewer/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/16)

- Εικόνα 10: "Johann Bernoulli2" by James T. Smith, Professor Emeritus of Mathematics, San Francisco State University - <http://test.maa.org>.
- Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johann_Bernoulli2.jpg#mediaviewer/File:Johann_Bernoulli2.jpg
- Εικόνα 11: "Christiaan Huygens". Υπό την άδεια Public domain μέσω Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christiaan_Huygens.jpg#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg
- Εικόνα 12: "Heron von Alexandria" by Unknown - <http://www.iihr.uiowa.edu/products/history/hoh/hero.html> and http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Heron_von_Alexandria.jpeg.
- Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heron_von_Alexandria.jpg#mediaviewer/File:Heron_von_Alexandria.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/16)

- Εικόνα 13: Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.png#mediaviewer/File:Pierre_de_Fermat.png
- Εικόνα 14: "GodfreyKneller-IsaacNewton-1689" by Sir Godfrey Kneller - <http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html>.
- Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg#mediaviewer/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg>
- Εικόνα 15: "NewtonsPrincipia".
Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0 via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NewtonsPrincipia.jpg#mediaviewer/File:NewtonsPrincipia.jpg>



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/16)

- Εικόνα 16: "Christiaan Huygens".
- Υπό την άδεια Public domain μέσω Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christiaan_Huygens.jpg#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg
- Εικόνα 17: By Rob Koopman (Flickr profile) [CC-BY-SA-1.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/1.0>)], via Wikimedia Commons
- Εικόνα 18: "Tautochrone curve" by Claudio Rocchini rewritten by Geek3 - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tautochrone_curve.gif#mediaviewer/File:Tautochrone_curve.gif
- Εικόνα 19: Εικόνα 8



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (7/16)

- Εικόνα 20: "Johann Bernoulli2" by James T. Smith, Professor Emeritus of Mathematics, San Francisco State University - <http://test.maa.org>.
- Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johann_Bernoulli2.jpg#mediaviewer/File:Johann_Bernoulli2.jpg
- Εικόνα 21: "300 Years of Optimal Control: From The Brachystochrone to the Maximum Principle ", Hector J. Sussman and Jan C. Willems, IEEE Control Systems, June 1997, pp.32-44.
- Εικόνα 22: Εικόνα 20
- Εικόνα 23: Εικόνα 9
- Εικόνα 24: Εικόνα 8
- Εικόνα 25: Εικόνα 14



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (8/16)

- Εικόνα 26: "Guillaume de l'Hôpital".
Licensed under Public domain via Wikimedia Commons
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Guillaume de l%27H%C3%B4pital.jpg#mediaviewer/File:Guillaume_de_l%27H%C3%B4pital.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Guillaume_de_l%27H%C3%B4pital.jpg#mediaviewer/File:Guillaume_de_l%27H%C3%B4pital.jpg)
- Εικόνα 27: "Tschirnhaus" by Martin Bernigeroth - Stich von M. Bernigeroth, Kupferstichkabinett Dresden. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tschirnhaus.jpg#mediaviewer/File:Tschirnhaus.jpg>
- Εικόνα 28: "Leonhard Euler 2" by Jakob Emanuel Handmann - This file is lacking source information. Please edit this file's description and provide a source. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg#mediaviewer/File:Leonhard_Euler_2.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (9/16)

- Εικόνα 29: "Methodus inveniendi - Leonhard Euler - 1744" by Unknown, assumed that Euler himself didn't draw this. -
http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/pages.cgi?call=517.4_E88M_1744&layout=vol0/part0/copy0&file=0004.
Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Methodus_inveniendi__Leonhard_Euler_-_1744.jpg#mediaviewer/File:Methodus_inveniendi__Leonhard_Euler_-_1744.jpg
- Εικόνα 30: http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/pages.cgi?call=517.4_E88M_1744&layout=vol0/part0/copy0&file=0006
- Εικόνα 31: "Leonhard Euler by Handmann" by Jakob Emanuel Handmann -
Cropped from: <http://www.euler-2007.ch/doc/Bild0015.pdf>.
Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_by_Handmann.png#mediaviewer/File:Leonhard_Euler_by_Handmann.png



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (10/16)

- Εικόνα 32: Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph_Louis_Lagrange.jpg#mediaviewer/File:Joseph_Louis_Lagrange.jpg
- Εικόνα 33: "Legendre" by Julien-Léopold Boilly
- <http://www.numericana.com/answer/record.htm#legendre> where it was cropped from here. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Legendre.jpg#mediaviewer/File:Legendre.jpg>
- Εικόνα 34: "Carl Jacobi2" by Kristof vt - nl:Afbeelding:Carl Jacobi.jpg. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Jacobi2.jpg#mediaviewer/File:Carl_Jacobi2.jpg
- Εικόνα 35: "WilliamRowanHamilton" by Unknown - <http://mathematik-online.de/F77.htm>.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (11/16)

Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg#mediaviewer/File:WilliamRowanHamilton.jpeg>

- Εικόνα 36: Licensed under Public domain via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Karl_Weierstrass.jpg#mediaviewer/File:Karl_Weierstrass.jpg
- Εικόνα 37: "Alfred Clebsch" by This file is lacking author information. Unknown. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alfred_Clebsch.jpeg#mediaviewer/File:Alfred_Clebsch.jpeg
- Εικόνα 38: "AdolfMayer" by Furfur - Image Mayer, Christian Gustav (1839 - 1907) obtained from MathDL - The MAA Mathematical Sciences Digital Library, in the public domain because of age (picture taken before 1900). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (12/16)

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:AdolfMayer.jpg#mediaviewer/File:AdolfMayer.jpg>

- Εικόνα 39: "Hilbert". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert.jpg#mediaviewer/File:Hilbert.jpg>
- Εικόνα 40: "Caratheodory constantin" by Unknown - Caratheodory family. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Caratheodory_constantin.jpg#mediaviewer/File:Caratheodory_constantin.jpg
- Εικόνα 41: "OskarBolza" by Unknown - [1] [2]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:OskarBolza.jpg#mediaviewer/File:OskarBolza.jpg>



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (13/16)

- Εικόνα 42: Adolf Kneser" by Konrad Jacobs, Erlangen - http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=2160. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0-de via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Adolf_Kneser.jpeg#mediaviewer/File:Adolf_Kneser.jpeg
- Εικόνα 43: <http://www.spaceflightnow.com/h2a/selene/images/h2aselenelaunch2.jpg>
- Εικόνα 44: Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hawk_mobile.jpg#mediaviewer/File:Hawk_mobile.jpg
- Εικόνα 45: <http://www.spaceflightnow.com/h2a/selene/image/selenemissionfull.jpg>



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (14/16)

- Εικόνα 46: Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:F-4_Phantom_II_in_flying.jpg#mediaviewer/File:F-4_Phantom_II_in_flying.jpg
- Εικόνα 47: THE EVOLUTION OF MODERN CONTROL THEORY, A Personal Perspective, *MICHAEL ATHANS*
- Εικόνα 48: Licensed under Public domain via Wikimedia Commons – <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Exocet-mil.jpg#mediaviewer/File:Exocet-mil.jpg>
- Εικόνα 49: Licensed under Public domain via Wikimedia Commons – http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Radar_antenna.jpg#mediaviewer/File:Radar_antenna.jpg
- Εικόνα 50: Εικόνα 2



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (15/16)

- Εικόνα 51: "Richard Ernest Bellman" by <http://optlinealjur.blogspot.ru/2012/02/richard-bellman-ernest.html>. Licensed under Fair use of copyrighted material in the context of Richard E. Bellman via Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/File:Richard_Ernest_Bellman.jpg#mediaviewer/File:Richard_Ernest_Bellman.jpg
- Εικόνα 52: Εικόνα 2
- Εικόνα 53: Εικόνα 40
- Εικόνα 54: Εικόνα 51
- Εικόνα 55: "Rudolf Kalman" by Greuel, Gert-Martin-http://owpodb.mfo.de/detail?photo_id=11513. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0-de via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rudolf_Kalman.jpg#mediaviewer/File:Rudolf_Kalman.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (16/16)

- Εικόνα 56: http://www.carbibles.com/suspension_bible_pg3.html Picture credit: Wikipedia / Public Domain
- Εικόνα 57: Εικόνα 56



Σημείωμα Αναφοράς

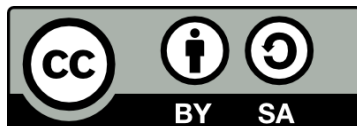
Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου. Ενότητα 1: Από τον Λογισμό των Μεταβολών στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS288/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

