ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 2: Εισαγωγή στη Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Βασικές έννοιες μαθηματικών.
- Βασικές έννοιες συστημάτων.
- Το γενικό πρόβλημα της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου.

Σκοποί Ενότητας

- Η εξοικείωση με μαθηματικά εργαλεία τα οποία είναι χρήσιμα για την μελέτη των ενοτήτων που ακολουθούν όπως:
  - Βελτιστοποίηση συναρτήσεων μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.
  - Ανάλυση συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων.
- Η παρουσίαση προβλημάτων της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου.

Βασικές έννοιες μαθηματικών

1. Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες.
2. Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών.
3. Βελτιστοποίηση συναρτήσεων με ή χωρίς συνθήκες.

Θετικά ορισμένος-ημιορισμένος πίνακας

Ορισμός

Έστω P, S δύο πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες.

Εάν

$$y^T P y > 0 \ \ \forall y \neq 0$$

τότε ο P ονομάζεται θετικά ορισμένος (positive definite matrix).

Εάν

$$y^T S y \geq 0 \ \ y \neq 0$$

τότε ο S ονομάζεται θετικά ημιορισμένος (positive semi-definite matrix).

Παρατηρήσεις (1)

Παρατηρήσεις (όμοια για αρνητικούς πίνακες)

- Αν ο S είναι θετικά ορισμένος τότε υπάρχει αντίστροφος.
- Αν ο P είναι θετικά ορισμένος και ο S είναι θετικά ημιορισμένος τότε ο $P + S$ είναι θετικά ορισμένος (αποδείξτε το).
- Ο πραγματικός συμμετρικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος (συμμετρικά θετικά ημι-ορισμένος) ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές (μη αρνητικές.)

Κριτήρια για θετικά-αρνητικά ορισμένους-ημιορισμένους πίνακες

Ο πίνακας P

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος αν

$$p_{11} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} > 0$$

Τα πρόσημα αλλάζουν αντίστοιχα για θετικά ημιορισμένους πίνακες ή αρνητικά ορισμένους ή ημιορισμένους πίνακες.

Κλίση της συνάρτησης

Η κλίση της συνάρτησης f σε σχέση με το x ορίζεται ως

$$\nabla_x f(x) = \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}, x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$$

1. Ιδιότητες της κλίσης της συνάρτησης

Ιδιότητες της κλίσης των συναρτήσεων

$$\frac{\partial(x^T c)}{\partial x} = \frac{\partial(x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_m c_m)}{\partial x} = c$$

$$\frac{\partial(x^T M x)}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^T \underbrace{[Mx]}_{c_1}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\left(\underbrace{[M^T x]^T}_{c_2}\right) x\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial\left(x^T \underbrace{[Mx]}_{c_1}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x^T \underbrace{[M^T x]}_{c_1}\right)}{\partial x} = Mx + M^T x$$

2. Ιδιότητες της κλίσης της συνάρτησης

Ιδιότητες της κλίσης των συναρτήσεων

Αν ο M είναι συμμετρικός

$$\frac{\partial(x^T M x)}{\partial x} = Mx + Mx = 2Mx$$

1. Πίνακας καμπυλότητας (Hessian matrix)

Ο πίνακας Hessian (hessian matrix) ή πίνακας καμπυλότητας

$$f_{xx} \triangleq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

2. Πίνακας καμπυλότητας (Hessian matrix)

$$\frac{\partial^2(x^T M x)}{\partial x^2} = \frac{\partial\left((M + M^T)x\right)}{\partial x} = M + M^T$$

Αν ο M είναι συμμετρικός

$$\frac{\partial^2(x^T M x)}{\partial x^2} = 2M$$

Παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

- Μεταβολή μίας συνάρτησης εξαρτώμενης από δύο διανύσματα

$$f = f\big(x(t), y(t)\big) \Rightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T dy$$

- Παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

$$f = f(x(t), y(t), t), y(t) = y(x(t), t)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y^T}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{df}{dx} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y^T}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right]^T \frac{dx}{dt} + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^T \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης

Ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης

$$f(x) = f(x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=x_0}^T (x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^T \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=x_0}^T (x - x_0) + O(3)$$

όπου ο όρος O(3) δηλώνει όρους τάξης μεγαλύτερης του 3.

$$\Delta f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=x_0}^T dx + \frac{1}{2!} dx^T \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=x_0}^T dx + O(3)$$

Στατική Βελτιστοποίηση-
Τοπικό Ελάχιστο

- **Στατική Βελτιστοποίηση**

Η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο αν-ν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=x_0}^{T} = 0$$

και ο πίνακας

$$\mathrm{K} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=x_0}$$

είναι θετικά ορισμένος.

Στατική Βελτιστοποίηση- Τοπικό Μέγιστο

- **Στατική Βελτιστοποίηση**

Η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο αν-ν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T_{x=x_0} = 0$$

και ο πίνακας

$$\mathrm{K} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=x_0}$$

είναι αρνητικά ορισμένος.

Παρατηρήσεις (2)

- Αν ο K είναι αόριστος (ούτε θετικά αλλά ούτε και αρνητικά ορισμένος τότε το σημείο αυτό αποτελεί ένα στάσιμο σημείο ή σαγματικό σημείο (saddle point)).
- Αν ο πίνακας K είναι θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος τότε το σημείο x_0 ονομάζεται ανώμαλο σημείο και απαιτείται η εξέταση διαφορικών όρων ανώτερης τάξης για να καθορισθεί αν το σημείο αυτό αποτελεί τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο.
- Για ολικά ακρότατα εκτός από τα παραπάνω εσωτερικά σημεία θα πρέπει επιπλέον να ψάξουμε ανάμεσα σε
  a) Συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της f.
  b) Σε σημεία όπου οι μερικές παράγωγοι δεν υπάρχουν.

Άσκηση 1

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - 2x - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial y} = x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2$$

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{x=y=-2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} < 0$$

Άρα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $f(-2,-2) = 8$ εφόσον ο πίνακας K είναι αρνητικά ορισμένος.

Άσκηση 2

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

στην τριγωνική πλάκα, στο πρώτο τεταρτημόριο που περιορίζεται από τις ευθείες $x = 0, y = 0, y = 9 - x$.

Βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας

Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

$$J(x,u)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

κάτω από τους περιορισμούς $f(x,u)=0$ όπου

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

και $u(t)$ είναι το διάνυσμα ελέγχου και $x(t)$ το διάνυσμα κατάστασης.

- Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\mathcal{L}(x,u,\lambda) = J(x,u) + \lambda^{\mathrm{T}} f(x,u)$$

που ονομάζεται Langrangian ενώ η σταθερά $\lambda \epsilon \mathbb{R}^m$ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange.

Τοπικό ελάχιστο υπό περιορισμό

Η συνάρτηση $J(x,u)$ υπό τον περιορισμό $f(x,u)=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ανν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

- $\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right]_{x=x_0,u=u_0} = f(x,u) = 0$
- $\left[\frac{\partial L}{\partial x}\right]_{x=x_0,u=u_0} = \left[\frac{\partial J(x,u)}{\partial x}\right]_{x=x_0,u=u_0} + \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right]^T \lambda = 0$
- $\left[\frac{\partial L}{\partial u}\right]_{x=x_0,u=u_0} = \left[\frac{\partial J(x,u)}{\partial u}\right]_{x=x_0,u=u_0} + \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right]^T \lambda = 0$

και ο πίνακας

- $K = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u} & \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \end{bmatrix}_{x=x_0,u=u_0}$ είναι θετικά ορισμένος.

Τοπικό μέγιστο υπό περιορισμό

Η συνάρτηση $J(x,u)$ υπό τον περιορισμό $f(x,u)=0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ανν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

- $\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right]_{x=x_0,u=u_0} = f(x,u) = 0$
- $\left[\frac{\partial L}{\partial x}\right]_{x=x_0,u=u_0} = \left[\frac{\partial J(x,u)}{\partial x}\right]_{x=x_0,u=u_0} + \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right]^T \lambda = 0$
- $\left[\frac{\partial L}{\partial u}\right]_{x=x_0,u=u_0} = \left[\frac{\partial J(x,u)}{\partial u}\right]_{x=x_0,u=u_0} + \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right]^T \lambda = 0$

και ο πίνακας

- $K = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u} & \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \end{bmatrix}_{x=x_0,u=u_0}$ είναι αρνητικά ορισμένος.

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης

$$J(x, y) = xy$$

πάνω στην έλλειψη

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

Λύση Άσκησης 3 (1)

$$L(x,y) = J(x,y) + \lambda f(x,y) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + \dfrac{\lambda x}{2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + \dfrac{2\lambda y}{9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left\{\lambda = -3, x = -\sqrt{2}, y = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\} \\ \left\{\lambda = 3, x = -\sqrt{2}, y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\} \\ \left\{\lambda = -3, x = \sqrt{2}, y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\} \\ \left\{\lambda = 3, x = \sqrt{2}, y = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\} \end{cases}$$

Λύση Άσκησης 3 (2)

$$\mathrm{K}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{\substack{\lambda=-3, x=-\sqrt{2}\ \eta\ x=-\sqrt{2}, \\ y=-\frac{3}{\sqrt{2}}\ \eta\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}}} =$$

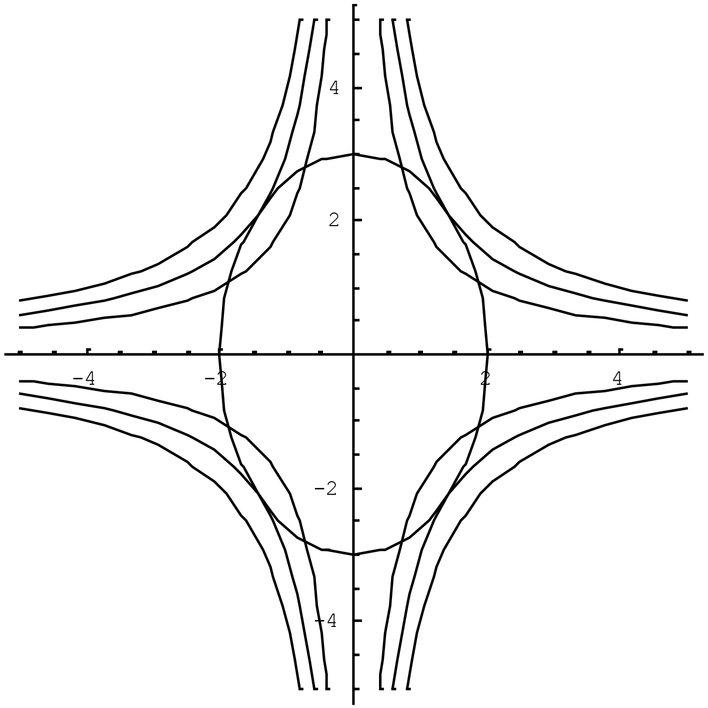
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{2\lambda}{9} \end{bmatrix}_{\substack{\lambda=-3, x=-\sqrt{2}\ \eta\ x=-\sqrt{2}, \\ y=-\frac{3}{\sqrt{2}}\ \eta\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \leq 0$$

Λύση Άσκησης 3 (3)

$$\mathrm{K}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{\substack{\lambda=3, x=-\sqrt{2}\ \eta\ x=-\sqrt{2}, \\ y=-\frac{3}{\sqrt{2}}\ \eta\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2} & 1 \\ 1 & \frac{2\lambda}{9} \end{bmatrix}_{\substack{\lambda=3, x=-\sqrt{2}\ \eta\ x=-\sqrt{2}, \\ y=-\frac{3}{\sqrt{2}}\ \eta\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \geq 0$$

Λύση Άσκησης 3 (4)



Άσκηση 4

Να ελαχιστοποιηθεί η τετραγωνική συνάρτηση κόστους

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u$$

$$x \epsilon \mathbb{R}^n, u \epsilon \mathbb{R}^r, f \epsilon \mathbb{R}^n, Q \geq 0, R > 0$$

όπου ο πίνακας Q (θετικά ημιορισμένος) και ο πίνακας R (θετικά ορισμένος) είναι συμμετρικοί πίνακες. Τα υπόκεινται στον παρακάτω περιορισμό

$$f(x,u) = x + Bu + c = 0$$

Εφόσον επιλύσετε την παραπάνω άσκηση, να εφαρμόσετε τα αποτελέσματα για

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Βασικές έννοιες συστημάτων

1. Μαθηματική Περιγραφή Συστήματος.
2. Επίλυση συστημάτων - ελεγξιμότητα - παρατηρησιμότητα.

Μαθηματική περιγραφή συστήματος-Μη γραμμικά συνεχή συστήματα

Εξισώσεις κατάστασης

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t), y(t) = c(x(t), u(t), t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{(state vector)}, \mathrm{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \text{(input vector)}$$

$$\mathrm{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \text{(output vector)}$$

Μαθηματική περιγραφή συστήματος-Μη γραμμικά διακριτά συστήματα

Εξισώσεις κατάστασης

$x(kT+T) = a(x(kT), u(kT), T), y(kT) = c(x(kT), u(kT), T)$

$x(kT) = \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix}$ (state vector), $\mathrm{u}(kT) = \begin{bmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ \vdots \\ u_p(kT) \end{bmatrix}$ (input vector)

$\mathrm{y}(kT) = \begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \\ \vdots \\ y_m(kT) \end{bmatrix}$ (output vector)

Μαθηματική περιγραφή συστήματος-Γραμμικά συνεχή συστήματα

- Χρονικά μεταβαλλόμενα

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}(t)x(t) + \mathrm{B}(\mathrm{t})u(t),$$
$$A(t) \in \mathbb{R}(t)^{n\times n}, B(t) \in \mathbb{R}(t)^{n\times m}$$

- Χρονικά αμετάβλητα

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t),$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Μαθηματική περιγραφή συστήματος-Γραμμικά διακριτά συστήματα

- Χρονικά μεταβαλλόμενα

$$x(kT+T)=\mathrm{A}(kT)x(kT)+\mathrm{B}(\mathrm{kT})u(kT),$$
$$A(kT)\in\mathbb{R}(kT)^{n\times n},B(kT)\in\mathbb{R}(kT)^{n\times m}$$

- Χρονικά αμετάβλητα

$$x(kT+T)=\mathrm{A}x(kT)+\mathrm{B}u(kT),$$
$$A\in\mathbb{R}^{n\times n},B\in\mathbb{R}^{n\times m}$$

Επίλυση συστημάτων στο χώρο των καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t)$$

$$A\epsilon\mathbb{R}^{n\times n}, B\epsilon\mathbb{R}^{n\times m}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)\} =$$

$$= e^{At}\ x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Ελεγξιμότητα

Ορισμός

Ένα σύστημα

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t),$$
$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t)$$

ονομάζεται **ελέγξιμο**, αν

$$\forall x(0), \exists t_1 > 0 \; \kappa\alpha\iota \; u(t), t\epsilon[t_0, t_1]: \; x(t_1) = 0$$

Κριτήρια ελεγξιμότητας

Το σύστημα (A, B) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$rank_{\mathbb{R}}[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B] = n, A\epsilon\mathbb{R}^{n\times n}, B\epsilon\mathbb{R}^{n\times m}$$

Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix},$$

Κριτήρια ελεγξιμότητας συνέχεια

$$A^2B = A(AB) == \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 50 \\ 47 \end{bmatrix}$$

$$rank_{\mathbb{R}}[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B] = rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 47 \\ 2 & 9 & 50 \\ 1 & 7 & 47 \end{bmatrix} = 3$$

Άρα είναι ελέγξιμο.

Παρατηρησιμότητα

Ορισμός

Ένα σύστημα

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t),$$
$$y(t) = \mathrm{C}x(t) + \mathrm{D}u(t)$$

ονομάζεται **παρατηρήσιμο**, αν υπάρχει πεπερασμένος χρόνος $t_1 \geq t_0$ τέτοιος ώστε για κάθε αρχική κατάσταση $x_0 := x(t_0)$ γνώση της εισόδου $\mathrm{u}(t), \{t_0 \leq t \leq t_1\}$ και της εξόδου $\mathrm{y}(t), \{t_0 \leq t \leq t_1\}$ επιτρέπουν τον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης x_0.

Κριτήρια Παρατηρησιμότητας

Το (A, C) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n\,, A\epsilon\mathbb{R}^{n\times n}, C\epsilon\mathbb{R}^{p\times n}$$

Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Κριτήρια Παρατηρησιμότητας συνέχεια

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$CA^2 = (CA)A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

άρα δεν είναι παρατηρήσιμο.

Το γενικό πρόβλημα της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου

- Στόχος του Βέλτιστου Ελέγχου
- Προβλήματα ελαχίστου χρόνου.
- Προβλήματα ελέγχου τελικής τιμής.
- Προβλήματα ελάχιστης ενέργειας.
- Προβλήματα παρακολούθησης.
- Πρόβλημα ρυθμιστή.

Στόχος του Βέλτιστου Ελέγχου

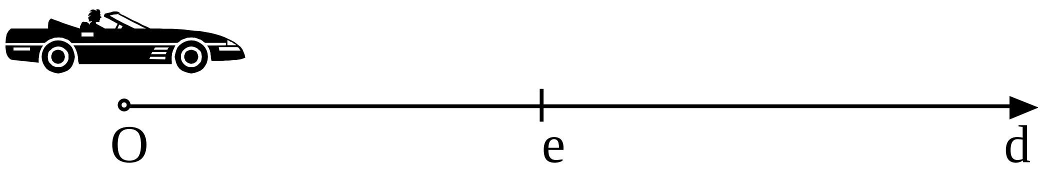
Ο στόχος του βέλτιστου ελέγχου είναι να προσδιορίσει τα **σήματα εισόδου** τα οποία θα εξαναγκάσουν μία **διαδικασία** να ικανοποιήσει **φυσικούς περιορισμούς** και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιήσει (μεγιστοποιήσει) κάποια **κριτήρια απόδοσης**.

Παράδειγμα. Ελαχιστοποίηση καυσίμων κατά την διάρκεια πτήσης ενός αεροσκάφους.

Διατύπωση του προβλήματος

- Μαθηματική περιγραφή του συστήματος.
- Προσδιορισμός φυσικών περιορισμών του συστήματος.
- Προσδιορισμός των κριτηρίων απόδοσης.

Παράδειγμα 1



d(t)=Απόσταση.

a(t) = Επιτάχυνση από το πεντάλ του γκαζιού.

b(t) = Επιβράδυνση από το πεντάλ του φρένου.

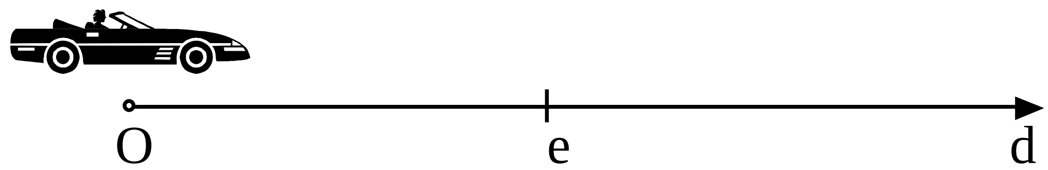
$$\ddot{d}(t) = a(t) + b(t)$$

$$x_1(t) = d(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{d}(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{d}(t)$$

$$\ddot{d}(t) = a(t) + b(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = a(t) + b(t)$$

Παράδειγμα 1 συνέχεια



Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2\ (t) \end{bmatrix}$$

όπου

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix}, \mathrm{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) \\ b\ (t) \end{bmatrix}$$

Φυσικοί περιορισμοί για το διάνυσμα κατάστασης

Ας θεωρήσουμε ότι το παραπάνω αυτοκίνητο ξεκινά από μηδενική ταχύτητα και θέλει να φτάσει και να σταματήσει στο σημείο e.

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_0) \\ \dot{d}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_f) \\ \dot{d}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αν υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο δεν προσπερνά το σημείο e και μετά επιστρέφει σε αυτό τότε έχουμε

$$0 \le x_1(t) \le e$$

$$0 \le x_2(t)$$

Φυσικοί περιορισμοί για το διάνυσμα εισόδου

- Η επιτάχυνση περιορίζεται από τις επιδόσεις της μηχανής (έστω μέγιστη επιτάχυνση M1).
- Η επιβράδυνση περιορίζεται από τις παραμέτρους των φρένων (έστω μέγιστη επιβράδυνση M2)

$$0 \leq u_1(t) \leq M1$$

$$-M2 \leq u_2(t) \leq 0$$

Κριτήριο απόδοσης

- **Ελάχιστη κατανάλωση καυσίμων**

Αν ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμων είναι ανάλογος της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και έχουμε G λίτρα βενζίνης στο αυτικίνητο, τότε θα πρέπει:

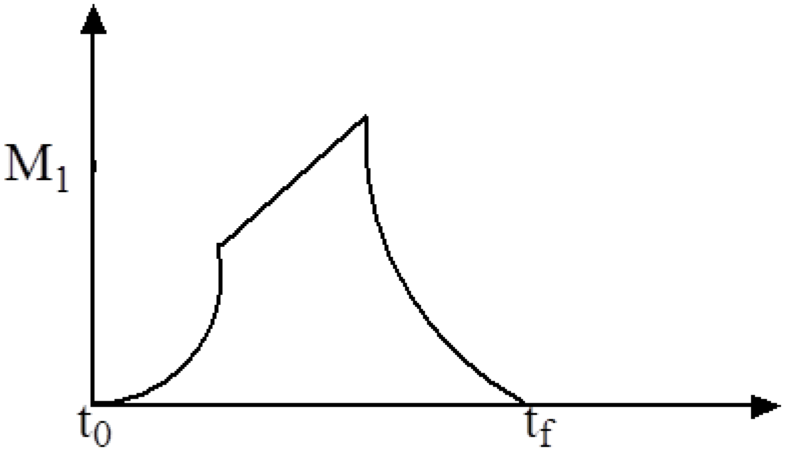
$$\int_{t_0}^{t_f} \big(k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t)\big) dt \leq G$$

Ορισμός επιτρεπτών καταστάσεων και εισόδων

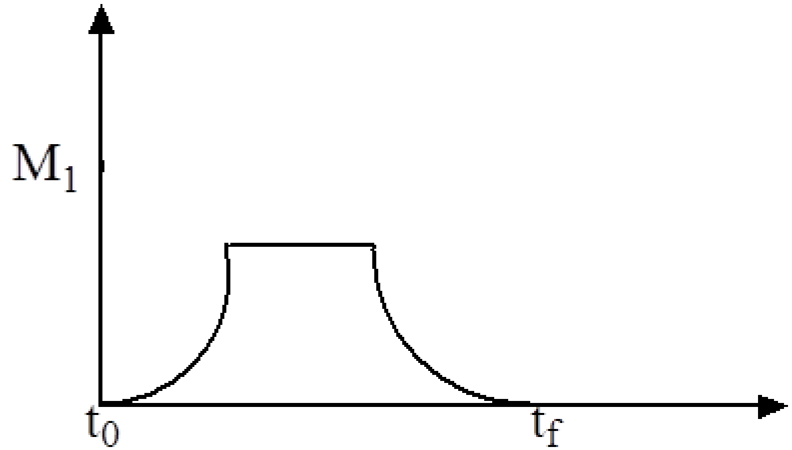
Ορισμός Μία είσοδος ονομάζεται **επιτρεπτή** (admissible control input) αν ικανοποιεί τους φυσικούς περιορισμούς της εισόδου του συστήματος στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_f]$.

Ορισμός Ένα διάνυσμα κατάστασης λέγεται **επιτρεπτό** (admissible state trajectory) αν ικανοποιεί τους φυσικούς περιορισμούς του διανύσματος κατάστασης του συστήματος στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_f]$.

Παράδειγμα μη-επιτρεπτών και επιτρεπτών εισόδων



Μη επιτρεπτή είσοδος

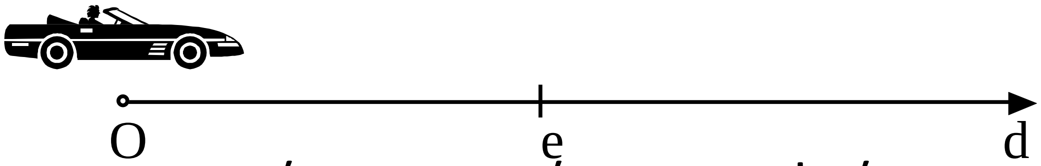


Επιτρεπτή είσοδς

Κριτήριο απόδοσης (performance measure)

Για να μετρήσουμε την απόδοση του συστήματος ποσοτικά ο σχεδιαστής επιλέγει ένα ποσοτικό κριτήριο.

Ως **βέλτιστο έλεγχο** εννοούμε την είσοδο που ελαχιστοποιεί (ή μεγιστοποιεί) το κριτήριο αυτό.



Αν θέλουμε το παραπάνω αυτοκίνητο να φτάσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο τότε η ποσότητα που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η παρακάτω

$$J = t_f - t_0$$

Προβλήματα ελαχίστου χρόνου (minimum time problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος που μεταφέρει το σύστημα μας από μία αρχική κατάσταση σε μία τελική κατάσταση στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

- **Κριτήριο απόδοσης**

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

Προβλήματα ελέγχου τελικής τιμής (terminal control problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία ελαχιστοποιεί την απόκλιση της τελικής τιμής του διανύσματος κατάστασης από μία επιθυμητή τιμή.

- **Κριτήριο απόδοσης**

$$J = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i(t_f) - r_i(t_f)\right]^2 = \left\|x(t_f) - r(t_f)\right\|^2$$

ή πιο γενικά

$$J = \left[x(t_f) - r(t_f)\right] H \left[x(t_f) - r(t_f)\right]$$

όπου H συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα Πορεία πυραύλου για να πετύχει το στόχο.

Προβλήματα ελάχιστης ενέργειας (minimum control effort problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία μεταφέρει το σύστημα μας από μία αρχική κατάσταση σε μία τελική κατάσταση καταβάλλοντας την ελάχιστη δυνατή είσοδο.

- **Κριτήριο απόδοσης**
  - Ελάχιστα καύσιμα $J = \sum_{i=1}^{n}[b_i|u_i(t)|], b_i > 0.$
  - Ελάχιστη ενέργεια $J = \int_{t_0}^{t_f}[u^T(t)Ru(t)]dt = \int_{t_0}^{t_f}\|u(t)\|_R^2 dt.$

όπου R συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα Ελάχιστα καύσιμα για την κίνηση ενός αεροπλάνου, αυτοκινήτου κ.λ.π.

Προβλήματα παρακολούθησης (tracking problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης σε μία επιθυμητή τροχιά.

- **Κριτήριο απόδοσης**

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - r(t)]^T Q [x(t) - r(t)] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \| x(t) - r(t) \|_Q^2 dt$$

όπου Q συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα Πύραυλος που ακολουθεί τον στόχο.

Συνδυασμός παρακολούθησης και ελάχιστης ενέργειας (tracking problem in combination with minimum control effort)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης σε μια επιθυμητή τροχιά καταβάλλοντας την ελάχιστη δυνατή ενέργεια.

- **Κριτήριο απόδοσης**

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\|x(t) - r(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 \right] dt$$

όπου Q, R συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες.

Παράδειγμα. Πύραυλος που ακολουθεί τον στόχο ξοδεύοντας τα λιγότερα καύσιμα.

Συνδυασμός παρακολούθησης και ελάχιστης ενέργειας..συνέχεια

Αν επιπλέον θέλουμε και η τελική τιμή του διανύσματος κατάστασης να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά σε μια επιθυμητή τιμή, τότε το κριτήριο γίνεται

- **Κριτήριο απόδοσης**

$$J = \left\| x(t_f) - r(t_f) \right\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\| x(t) + r(t) \|_Q^2 + \| u(t) \|_R^2 \right] dt$$

όπου Q, R συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες και H συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Πρόβλημα ρυθμιστή (regulator problem)

Πρόκειται για ειδική περίπτωση του προβλήματος ανίχνευσης στο οποίο το επιθυμητό διάνυσμα κατάστασης είναι το μηδενικό.

- **Κριτήριο απόδοσης**

$$J = \left\| x\left(t_f\right)\right\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\|x(t)\|_Q^2\right] dt$$

όπου Q συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακας και H συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Το γενικό πρόβλημα της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου

Να υπολογιστεί μια **επιθυμητή είσοδος** $u^*(t)$ η οποία θα οδηγήσει το σύστημα:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

σε μία **επιθυμητή τροχιά** $x^*(t)$ η οποία θα ελαχιστοποιήσει τον παρακάτω δείκτη απόδοσης

$$J = h\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t)dt$$

- Η είσοδος $u^*(t)$ ονομάζεται **βέλτιστος έλεγχος** (optimal control) και το διάνυσμα κατάστασης $x^*(t)$ ονομάζεται **βέλτιστη τροχιά** (optimal trajectory).

Παρατηρήσεις (3)

- Υπάρχει λύση?
- Είναι μοναδική?
- Η $u^*(t)$ είναι βέλτιστη αν

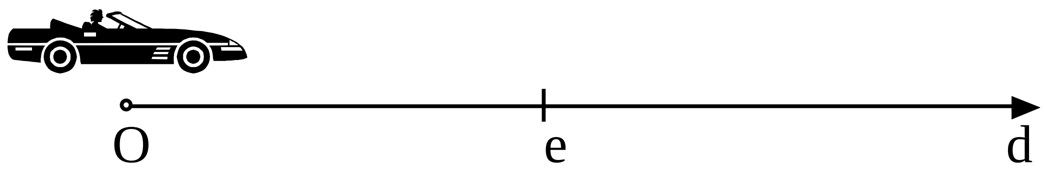
$$J^* = h\big(x^*(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F(x^*(t), u^*(t), t)dt \leq$$

$$\leq h\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t)dt$$

$$\forall u(t) \in U, x(t) \in X.$$

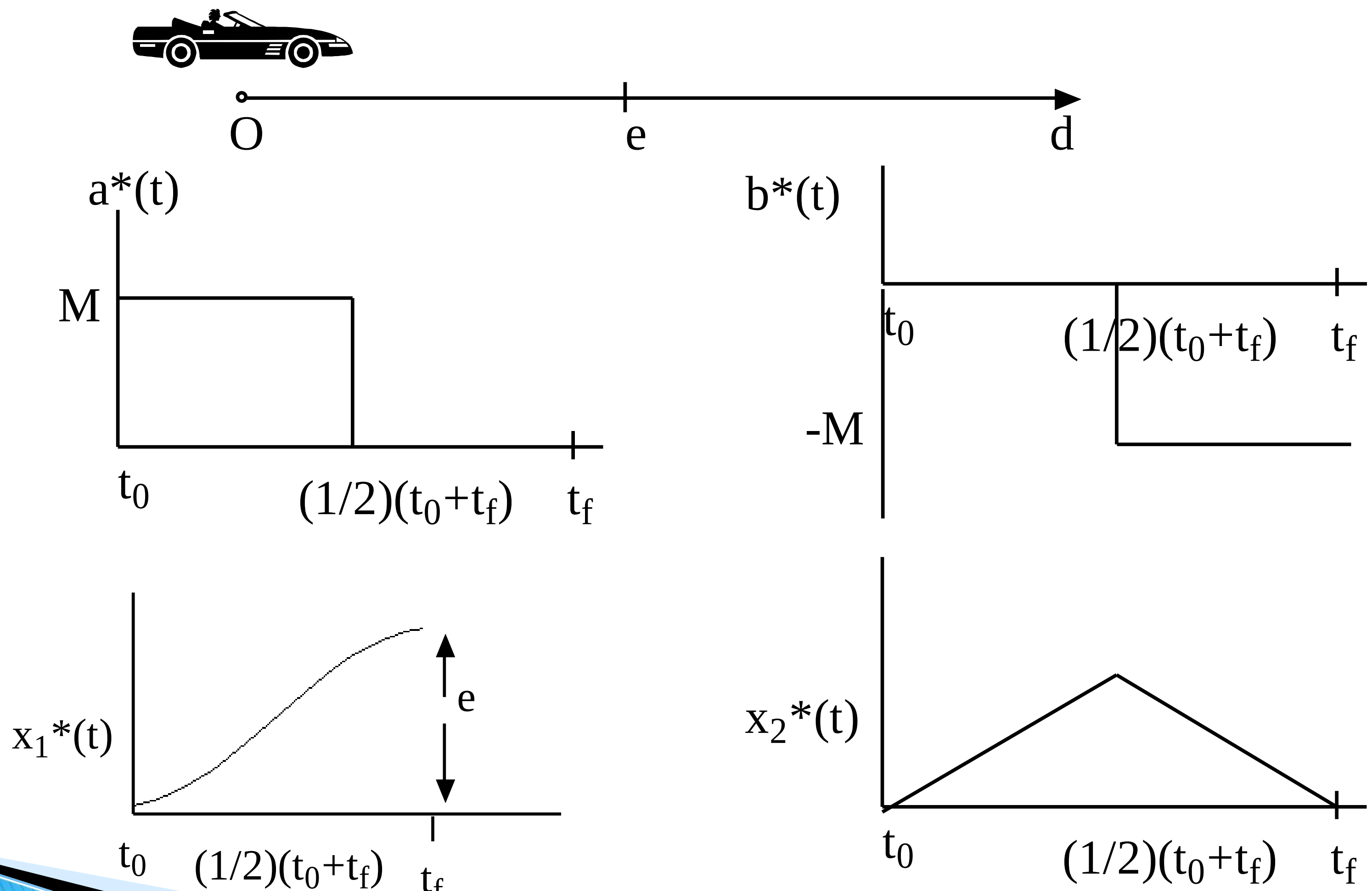
Μιλάμε λοιπόν για **ολικό** και όχι **τοπικό** ελάχιστο.

Παράδειγμα 2



Η επίλυση στο πρόβλημα που παρουσιάσαμε στην αρχή με τις προυποθέσεις για τις εισόδους (με την προυπόθεση ότι η μέγιστη επιτάχυνση είναι M αλλά και η μέγιστη επιβράδυνση είναι -M) και το διάνυσμα κατάστασης οδηγεί στην παρακάτω λύση:

Παράδειγμα 2..συνέχεια



Παράδειγμα 2 - εξισώσεις κατάστασης

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2\,(t)\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(s)\\ u_2\,(s)\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2}\big(u_1(s)+u_2(s)\big)\\ \frac{1}{s}\big(u_1(s)+u_2(s)\big)\end{bmatrix}\xRightarrow{u_1(t)+u_2(t)=e\delta^1(t)}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{e}{s}\\ e\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\ e\delta(t)\end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης