Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 4: Εισαγωγή στο Λογισμό Μεταβολών

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

BY SA

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Συνάρτηση-Συναρτησιακό.
- Σύγκριση: Συναρτήσεων-Συναρτησιακών.
- Το βασικό Θεώρημα του Λογισμού Μεταβολών.

Σκοποί Ενότητας

- Να εισάγει τον αναγνώστη στην έννοια του συναρτησιακού και των ιδιοτήτων του, κάνοντας χρήση γνωστών εννοιών από τις συναρτήσεις.
- Να διατυπώσει το βασικό Θεώρημα του Λογισμού των Μεταβολών διατυπώνοντας με τον τρόπο αυτό μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακροτάτου σε ένα συναρτησιακό.

Συνάρτηση

Συνάρτηση (Function)

Μία βαθμωτή συνάρτηση $f(q)$ είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο q ενός συνόλου D ένα μοναδικό στοιχείο ενός συνόλου R.

D: πεδίο ορισμού

R: πεδίο τιμών

Παράδειγμα $f(q) = \sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2 + \cdots + {q_n}^2}$

Συναρτησιακό

Συναρτησιακό ή Συναρτησοειδές (Functional)

Ένα συναρτησιακό $J\big(x(t)\big)$ είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης που αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση $x(t) \in \Omega$ έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό.

Ω: πεδίο ορισμού

Παράδειγμα $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)dt$

Παράδειγμα 1

Έστω $C^1[a,b]$ το σύνολο όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Τότε η έκφραση

$$J: C^1[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad J(x) \coloneqq \int_a^b F(\dot{x}(t), x(t), t)dt$$

αποτελεί ένα συναρτησιακό.

Μία κλασσική περίπτωση του παραπάνω συναρτησιακού αποτελεί το μήκος καμπύλης $x \in C^1[a,b]$ που ενώνει δύο σημεία $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$ και το οποίο ορίζεται από το συναρτησιακό

$$J: C^1[a,b] \to \mathbb{R}\,, J(x) \coloneqq \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt,\ x(a) = x_a, x(b) = x_b$$

Γραμμική Συνάρτηση

1. $f(aq) = af(q),\ \forall a \epsilon \mathbb{R}, q \epsilon D$
2. $f(q_1 + q_2) = f(q_1) + f(q_2),\ \forall q_1, q_2 \epsilon D.$

Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση $f(t) = 5t$.

$$f(at) = 5(at) = a(5t) = af(t)$$

$$f(t_1 + t_2) = 5(t_1 + t_2) = 5t_1 + 5t_2 = f(t_1) + f(t_2)$$

Ισχύει το ίδιο για την $f(t) = \frac{5}{t}$?

Γραμμικό Συναρτησιακό

Ορισμός Ένα συναρτησιακό $J: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό πάνω στο σώμα K ($\mathbb{C}$ ή $\mathbb{R}$)αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $J(ax) = aJ(x),\ \forall a \epsilon K, x \in \Omega.$
2. $J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in \Omega.$

Παράδειγμα Έστω το συναρτησιακό $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)dt.$

$$J(ax) = \int_{t_0}^{t_f} ax(t)dt = a\int_{t_0}^{t_f} x(t)dt = aJ(x)$$

Παράδειγμα 2

$$J(x_1(t) + x_2(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \big(x_1(t) + x_2(t)\big) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} x_1(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} x_2(t) dt =$$

$$= J(x_1) + J(x_2).$$

Παράδειγμα Έστω το συναρτησιακό $J: C\left[t_0, t_f\right] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου

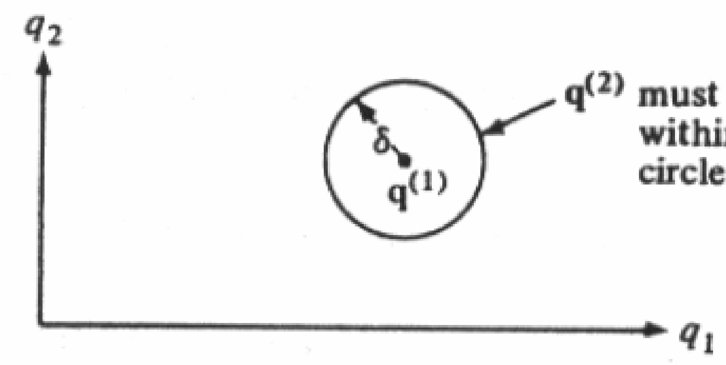
$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t) dt.$$

$$J(ax) = \int_{t_0}^{t_f} [ax(t)]^2 dt = a^2 \int_{t_0}^{t_f} x^2(t) dt = a^2 J(x) \neq aJ(x).$$

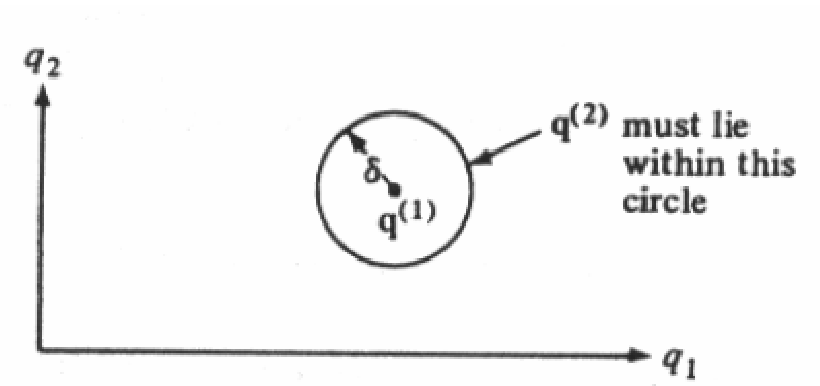
Νόρμα διανύσματος

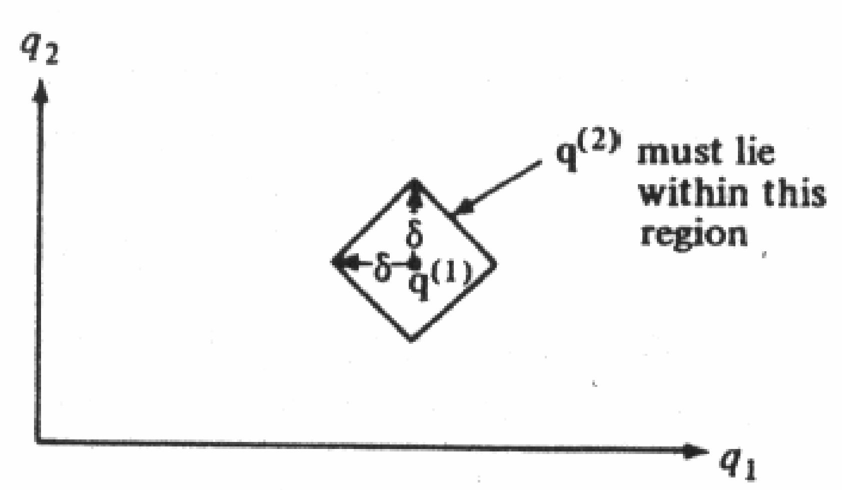
<u>**Νόρμα διανύσματος**</u>: Η **νόρμα** $\|q\|$ ενός διανύσματος q είναι μία συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε q έναν αριθμό που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\|q\| \geq 0$ και $\|q\| = 0 \Leftrightarrow q = 0$.
2. $\|aq\| = |a|\|q\|, \forall a \epsilon \mathbb{R}, q \epsilon D$.
3. $\|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$



Παράδειγμα: Νόρμες διανυσμάτων





$$\|q\|_2 = \sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2}$$

$$\|q\|_1 = |q_1| + |q_2|$$

Νόρμα Συνάρτησης

Ορισμός Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων, πάνω στο σώμα K. Αν τώρα ορίσουμε στον V την απεικόνιση $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ όπου για κάθε $\lambda \epsilon K$ και $x, y \in V$ ισχύούν οι ιδιότητες:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

τότε ο διανυσματικός χώρος V λέγεται **νορμικός χώρος** και η συνάρτηση $\|\cdot\|$ λέγεται **νόρμα** (**norm**) επί του V.

Παράδειγμα: Νόρμες Συναρτήσεων

$$\|\cdot\|_\infty : C[a,b] \to \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\}$$

- $\|x\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\} = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0, \forall t \in [a,b]$
- $\|\lambda x\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}\{|\lambda x(t)|\} = sup_{t\in[a,b]}\{|\lambda||x(t)|\} =$

  $= |\lambda| sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\} = |\lambda|\|x\|_\infty$
- $\|x+y\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)+y(t)|\} \leq$

  $\leq sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)|+|y(t)|\} \leq$

  $\leq sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\} + sup_{t\in[a,b]}\{|y(t)|\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι γνωστή και ως **ισχυρή νόρμα**.

Διάφορες νόρμες συναρτήσεων

- $\|\cdot\|_1 : C[a,b] \to \mathbb{R}^+, \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt.$
- $\|\cdot\|_2 : C[a,b] \to \mathbb{R}^+, \|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt}$, L_2 νόρμα.
- $\|\cdot\|_p : C[a,b] \to \mathbb{R}^+, \|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$
- $\|\cdot\|_w : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$, (Ασθενή νόρμα)

$$\|x\|_w = sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\} + sup_{t\in[a,b]}\{|\dot{x}(t)|\}$$

Απόσταση σε νορμικό γραμμικό χώρο

Σε έναν νορμικό γραμμικό χώρο $(V, \|\cdot\|)$ μπορούμε να μιλάμε για απόσταση δύο στοιχείων του χώρου, ορίζοντας ως **απόσταση** δύο στοιχείων του x_1, x_2 τη νόρμα

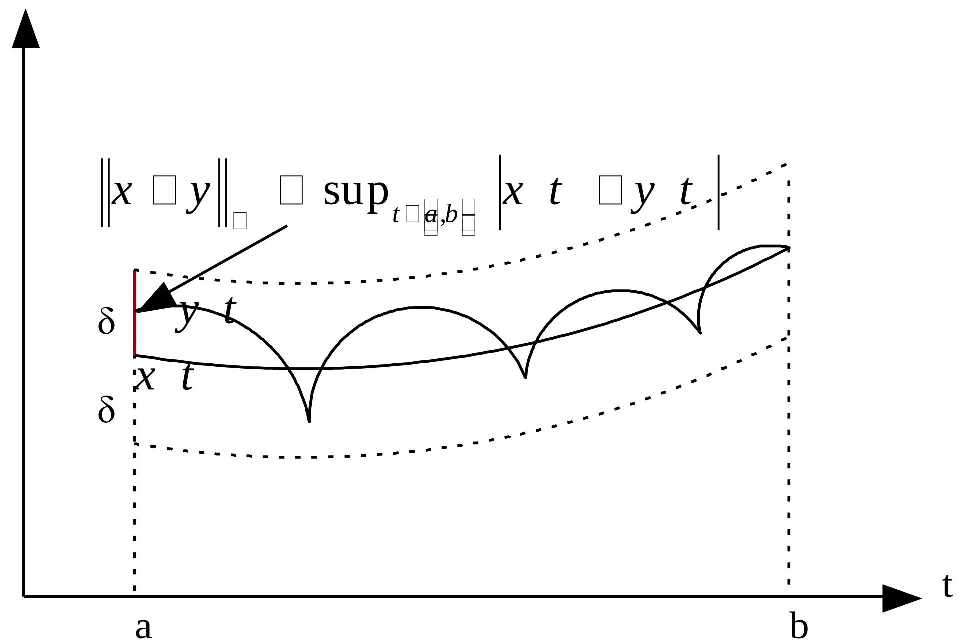
$$d(x_1, x_2) := \|x_1 - x_2\|$$

Με τον τρόπο αυτό ένας νορμικός χώρος γίνεται **μετρικός χώρος**, δηλαδή ένας χώρος με μια μετρική η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in V$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in V$.

Ισχυρή γειτνίαση

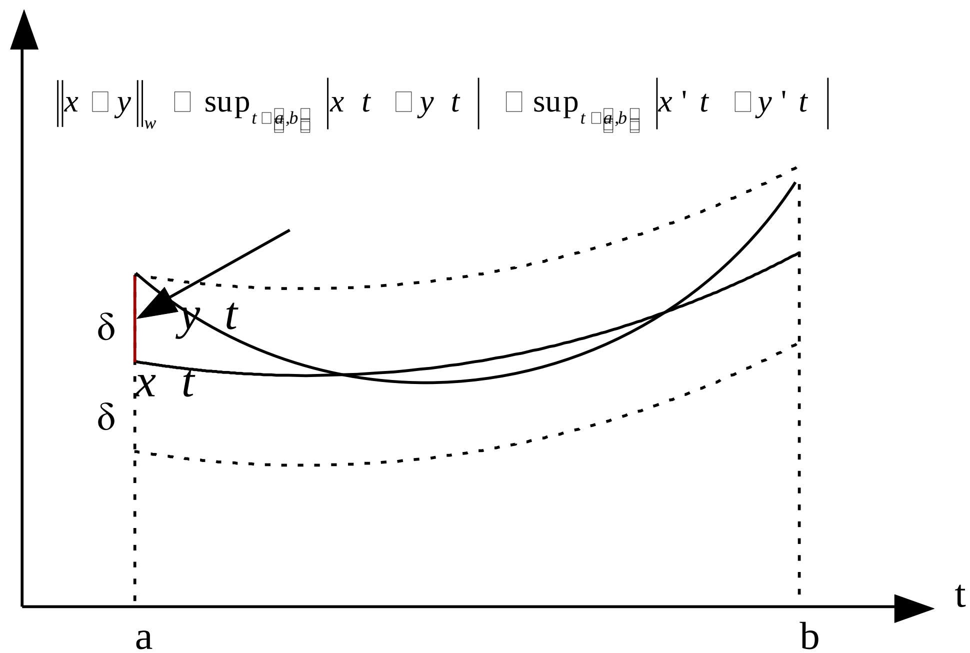
$$\|x - y\|_\infty \leq \delta, \qquad |x(t) - y(t)| \leq \delta, \forall t \in [a, b]$$



Ασθενής γειτνίαση

$$\|x-y\|_w \leq \delta,$$

$$|x(t)-y(t)| \leq \delta \;\kappa\alpha\iota\; |\dot{x}(t)-\dot{y}(t)| \leq \delta, \forall t \in [a,b]$$



Ασκήσεις

Άσκηση 2.1 Να δειχθεί ότι η $\|\cdot\|_w : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_w = sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\} + sup_{t\in[a,b]}\{|\dot{x}(t)|\}$$

αποτελεί νόρμα στο $C^1[a,b]$.

Άσκηση 2.2 Να δειχθεί ότι η $\|\cdot\|_1 : C[a,b] \to \mathbb{R}^+$ με

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt.$$

αποτελεί νόρμα στο$C^1[a,b]$.

Συνέχεια συναρτησιακού

Ορισμός: Το **συναρτησιακό** $J: (\Omega, \|\cdot\|_{\Omega}) \rightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|_{\mathbb{R}})$ είναι **συνεχές στη συνάρτηση** $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{\Omega}$ αν και μόνο εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|J(x) - J(x_0)\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \text{ όταν } \|x - x_0\|_{\Omega} < \delta(\varepsilon)$$

Το συναρτησιακό είναι **συνεχές στο** $\boldsymbol{\Omega}$ αν είναι συνεχές σε κάθε συνάρτηση του Ω.

Μεταβολή συνάρτησης

Η **μεταβολή συνάρτησης**

$$\Delta f = f(q + \Delta q) - f(q)$$

Παράδειγμα: $f(q) = {q_1}^2 + 2q_1q_2$

$$\Delta f = f(q + \Delta q) - f(q)$$

$$= (q_1 + \Delta q_1)^2 + 2(q_1 + \Delta q_1)(q_2 + \Delta q_2) - {q_1}^2 - 2q_1q_2$$

$$= 2q_1\Delta q_1 + [\Delta q_1]^2 + 2\Delta q_1q_2 + 2\Delta q_2q_1 + 2\Delta q_1q_2$$

Μεταβολή συναρτησιακού

Ορισμός

Έστω το συναρτησιακό $J\colon (\Omega, \|\cdot\|_{\Omega}) \to \mathbb{R}$. Εάν $\mathrm{x}, x + \delta x \in \Omega$ ορίζουμε ως **μεταβολή του συναρτησιακού $\boldsymbol{J}$** στην συνάρτηση x την τιμή

$$\Delta J(x, \delta x) = J(x + \delta x) - J(x)$$

όπου δx ορίζουμε την μεταβολή της x.

Παράδειγμα 3

Παράδειγμα: Έστω το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt$$

$$\Delta J(x, \delta x) = J(x, \delta x) - J(x)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \big(x(t) + \delta x(t)\big)^2 dt - \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} (x^2(t) + (\delta x(t))^2 + 2x(t)\delta x(t))dt - \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \{2x(t)\delta x(t)) + (\delta x(t))^2\}dt$$

Πρώτη μεταβολή συνάρτησης

Μεταβολή συνάρτησης: Η αύξηση μιας συνάρτησης f μπορεί να γραφεί ως

$$\Delta f(q, \Delta q) = df(q, \Delta q) + g(q, \Delta q)\|\Delta q\|$$

όπου df είναι η γραμμική συνάρτηση της Δq.

Αν $\lim_{\|\Delta q\| \to 0}\{g(q, \Delta q)\} = 0$ τότε η f καλείται **διαφορίσιμη** στο q και η df είναι το **διαφορικό** της f στο q.

Παράγωγος της συνάρτησης

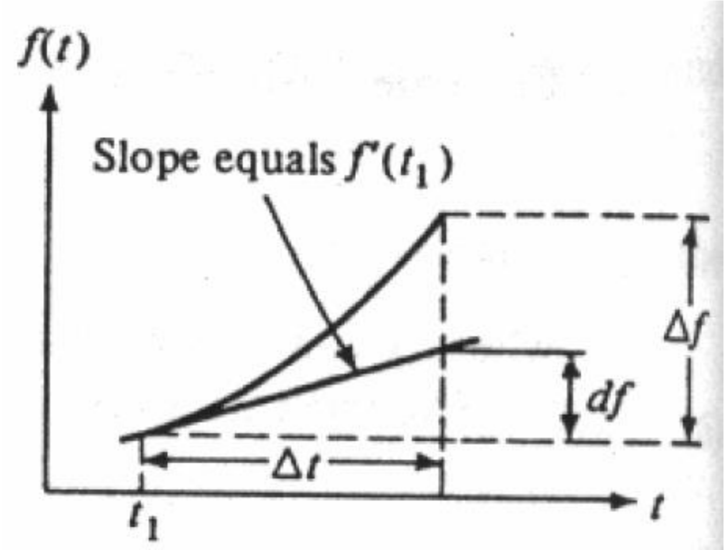
Αν η f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής t, τότε

$$df(t, \Delta t) = f'(t)\Delta t$$

όπου η $f'(t)$ καλείται **παράγωγος** της f στο t.

Η $df = f'(t)\Delta t$ είναι μία γραμμική προσέγγιση πρώτης τάξης της Δf.

Αν $\Delta t \to 0$ $\tau \acute{o} \tau \varepsilon$ $df \to \Delta f$.



Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

- Αν $f(q_1, q_2, \dots, q_n)$ τότε

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\Delta q_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\Delta q_n = (\nabla f)^T \Delta q$$

Παράδειγμα: $f(q) = {q_1}^2 + 2q_1 q_2$

$$\Delta f = f(q + \Delta q) - f(q) =$$

$$= 2q_1 \Delta q_1 + [\Delta q_1]^2 + 2\Delta q_1 q_2 + 2\Delta q_2 q_2 + 2\Delta q_1 q_2$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\Delta q_2 = (2q_1 + 2q_2)\Delta q_1 + (2q_1)\Delta q_2$$

Πρώτη μεταβολή συναρτησιακού

Έστω το συναρτησιακό $J: (\Omega, \|\cdot\|_\Omega) \to \mathbb{R}$ όπου $(\Omega, \|\cdot\|_\Omega)$ είναι ένας γραμμικός νορμικός δ.χ. πάνω στο σώμα K και η μεταβολή του συναρτησιακού J μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x)\|\delta x\|_\Omega$$

όπου $\delta J(x, \delta x)$ είναι ένα συνεχές, γραμμικό συναρτησιακό ως προς δx.

Αν

$$\lim_{\|\delta x\|_\Omega \to 0} g(x, \delta x) = 0$$

τότε το συναρτησιακό J καλείται **διαφορίσιμο** στη συνάρτηση x.

Πρώτη μεταβολή συναρτησιακού ... συνέχεια

- Το συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $\delta J(x, \delta x)$ καλείται **πρώτη μεταβολή** (ή διαφορικό Frechet) του J για τη συνάρτηση x.
- Το συναρτησιακό J είναι **διαφορίσιμο** αν είναι διαφορίσιμο για κάθε συνάρτηση $x \in \Omega$.

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι η πρώτη μεταβολή $\delta J(x, \delta x)$ αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση του συναρτησιακού $\Delta J(x, \delta x)$ όταν $\|\delta x\|_{\Omega} \to 0$.

Παράδειγμα 4 (1)

Έστω $J:(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)\to\mathbb{R}, J(x)=\int_{t_0}^{t_f}x^2(t)dt$

$$\Delta J(x,\delta x)=J(x,\delta x)-J(x)=$$

$$=\underbrace{\int_{t_0}^{t_f}2x(t)\delta x(t)dt}_{\delta J(x,\delta x)}+\underbrace{\int_{t_0}^{t_f}(\delta x(t))^2dt}_{g(x,\delta x)\|\delta x(t)\|_\infty}$$

$$\|\delta x\|_\infty=\sup_{t_0\le t\le t_f}\{|\delta x(t)|\}$$

$$\int_{t_0}^{t_f}(\delta x(t))^2dt=\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|\delta x\|_\infty}\int_{t_0}^{t_f}|\delta x(t)|^2dt=$$

$$=\|\delta x\|_\infty\int_{t_0}^{t_f}\frac{|\delta x(t)|^2}{\|\delta x\|_\infty}dt=$$

Παράδειγμα 4 (2)

$$|\delta x(t)| \leq \|\delta x(t)\|_\infty = sup_{t\in[t_0,t_f]}\{|\delta x(t)|\}$$

$$= \|\delta x\|_\infty \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\frac{|\delta x(t)||\delta x(t)|}{\|\delta x\|_\infty}}_{g(x,\delta x)} dt \leq \left\{\int_{t_0}^{t_f} |\delta x(t)| dt\right\} \|\delta x\|_\infty$$

Αν $\|\delta x\|_\infty \to 0 \Rightarrow |\delta x(t)| \to 0$ και συνεπώς

$$\lim_{\|\delta x\|_\Omega \to 0} \left\{\int_{t_0}^{t_f} |\delta x(t)| dt\right\} = 0.$$

Παράδειγμα 4 (3)

Έχουμε λοιπόν $\lim_{\|\delta x\| \to 0} g(x, \delta x) = 0$ και άρα το συναρτησιακό είναι διαφορίσιμο για κάθε συνάρτηση $x \in (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.
Η πρώτη μεταβολή της J δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} 2x(t)\delta x(t) dt}$$

Πρόταση

Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού $J(x)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\delta \mathrm{J}(x,\delta x) = \left[\frac{d}{da}J(x+a\delta x)\right]_{a=0}}$$

$$\left[\frac{d}{da}J(x+a\delta x)\right]_{a=0} = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{J(x+a\delta x)-J(x+0\delta x)}{a-0}$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{\delta J(x,a\delta x)+g(x,a\delta x)\|a\delta x\|_{\Omega}}{\alpha} =$$

Πρόταση … συνέχεια

$$= \lim_{a\to 0}\frac{\delta J(x,a\delta x)}{a} + \lim_{a\to 0}\frac{g(x,a\delta x)\|a\delta x\|_\Omega}{a} =$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{a\delta J(x,\delta x)}{a} + \lim_{a\to 0}\frac{|a|g(x,a\delta x)\|\delta x\|_\Omega}{a} =$$

$$= \delta J(x,\delta x) \pm \lim_{a\to 0} g(x,a\delta x)\|\delta x\|_\Omega =$$

$$= \delta J(x,\delta x)$$

Παράδειγμα 5

Έστω $J: (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}, J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt$

$\mathrm{J}(x + a\delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \big(x(t) + a\delta x(t)\big)^2 dt$

$$\left[\frac{d}{da}\mathrm{J}(x + a\delta x)\right]_{a=0} =$$

$$= \lim_{a \to 0} \int_{t_0}^{t_f} 2\big(x(t) + a\delta x(t)\big)\delta x(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} 2x(t)\delta x(t)dt$$

Σχετικό ακρότατο συνάρτησης

- **Σχετικό ελάχιστο** στο q^*

$$\exists \varepsilon > 0, \|q - q^*\| < \varepsilon \Rightarrow \Delta f = f(q) - f(q^*) \geq 0$$

- **Σχετικό μέγιστο** στο q^*

$$\exists \varepsilon > 0, \|q - q^*\| < \varepsilon \Rightarrow \Delta f = f(q) - f(q^*) \leq 0$$

- **Αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ακροτάτου**

$$df(q, \Delta q) = 0$$

Σχετικό ακρότατο συναρτησιακού

- **Σχετικό ελάχιστο** στο $x^*(t)$

$$\exists \varepsilon > 0, \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \Rightarrow \Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0$$

- **Σχετικό μέγιστο** στο $x^*(t)$

$$\exists \varepsilon > 0, \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \Rightarrow \Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0$$

Ισχυρό-Ασθενές τοπικό ακρότατο

- Αν η νόρμα που χρησιμοποιούμε είναι η ισχυρή νόρμα $\|\cdot\|_{\infty}$ τότε αναφερόμαστε σε ισχυρές μεταβολές γύρω από την συνάρτηση x^* ενώ το ακρότατο ονομάζεται **ισχυρό τοπικό ακρότατο** (strong extremum).
- Αν η νόρμα που χρησιμοποιούμε είναι η ασθενής νόρμα $\|\cdot\|_{w}$ τότε αναφερόμαστε σε ασθενείς μεταβολές γύρω από την συνάρτηση x^* ενώ το ακρότατο ονομάζεται **ασθενές τοπικό ακρότατο** (weak extremum).

Αναγκαίες συνθήκες

$$\boxed{\delta J(x^*(\tau), \Delta x(\tau)) = 0}$$

Θεώρημα Έστω το συναρτησιακό $J: (\Omega, \|\cdot\|_{\Omega}) \to \mathbb{R}$ το οποίο είναι διαφορίσιμο στη συνάρτηση $x^* \in \Omega$ και ας υποθέσουμε επίσης ότι δεν υπάρχουν συνοριακές συνθήκες για τις συναρτήσεις $x \in \Omega$. **Αν** το συναρτησιακό J παρουσιάζει ακρότατο στη συνάρτηση x^* **τότε** θα πρέπει η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού στην συνάρτηση x^* να είναι μηδέν

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0$$

για όλες τις επιτρεπτές τιμές του δx.

Απόδειξη (1)

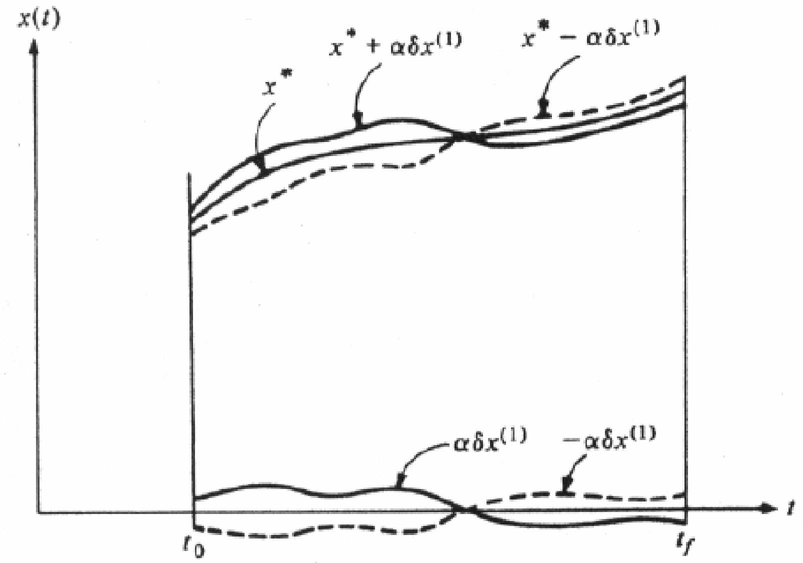
Απόδειξη (με απαγωγή σε άτοπο)

Ας υποθέσουμε δηλαδή ότι $\delta J(x^*, \delta x) \neq 0$.

$$\Delta J(x^*, \delta x) = \delta J(x^*, \delta x) + g(x^*, \delta x) \cdot \|\delta x\|$$

Για $\|\delta x\| < \varepsilon,\ \ g(x^*, \delta x) \cdot \|\delta x\| \to 0$

οπότε $\Delta J \equiv \delta J$.



Απόδειξη (2)

Έστω $\delta x = a\delta x^{(1)}$ όπου $a > 0$ και $\left\| a\delta x^{(1)} \right\| < \varepsilon$.

Ας υποθέσουμε ότι $\delta J\left(x^*, a\delta x^{(1)}\right) < 0$.

$$\Delta J\left(x^*, a\delta x^{(1)}\right) \approx \delta J\left(x^*, a\delta x^{(1)}\right) = a\delta J\left(x^*, \delta x^{(1)}\right) < 0$$

Έστω $\delta x = -a\delta x^{(1)}$

$$\left\| -a\delta x^{(1)} \right\| = \left\| a\delta x^{(1)} \right\| < \varepsilon$$

$$\Delta J\left(x^*, -a\delta x^{(1)}\right) \approx \delta J\left(x^*, -a\delta x^{(1)}\right) = -a\delta J\left(x^*, \delta x^{(1)}\right) > 0$$

Απόδειξη (3)

Συμπεράσματα:

$$\left.\begin{array}{l}\delta J(x^*,\delta x)<0\\ x^*\ \sigma\chi\varepsilon\tau.\alpha\kappa\rho o.\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\Delta \mathrm{J}\left(x^*,\overbrace{a\delta x^{(1)}}^{\delta x}\right)<0\\ \Delta \mathrm{J}\left(x^*,\underbrace{-a\delta x^{(1)}}_{\delta x}\right)>0\end{cases}$$

ΑΤΟΠΟ

Άλλος τρόπος

Αν $x^* \in \Omega$ είναι συνάρτηση στην οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το συναρτησιακό $J: (\Omega, \|\cdot\|_\Omega) \to \mathbb{R}$, τότε το συναρτησιακό $J(x^* + a\delta x) \coloneqq g(a)$ είναι συνάρτηση του a, η οποία για $a = 0$ τις δίνει την $J(x^*) \coloneqq g(0)$.

Συνεπώς η $\mathrm{g}(a)$ έχει τοπικό ακρότατο στο $a = 0$ και συνεπώς θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\mathrm{g}(a) = 0$ ή ισοδύναμα από την Πρόταση

$$\left[\frac{d}{da} J(x + a\delta x)\right]_{a=0} = 0 \Leftrightarrow \delta J(x^*, \delta x) = 0$$

Λήμμα

Λήμμα Εάν η συνάρτηση $h(t)$ είναι συνεχής και

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t)\delta x(t)dt = 0$$

για κάθε συνάρτηση $\delta x \in C^2[t_0, t_f]$ και $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$, τότε η $h(t)$ πρέπει να είναι μηδέν στο $[t_0, t_f]$.

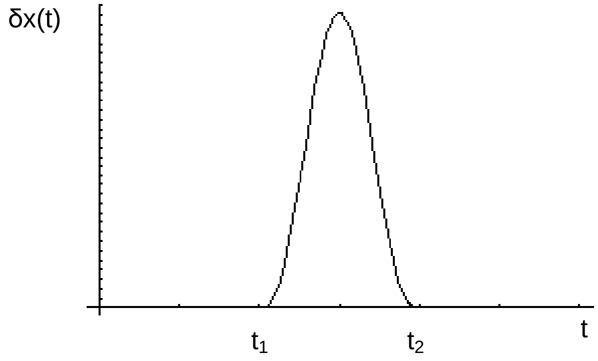
Απόδειξη Θα αποδείξουμε το παραπάνω λήμμα με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $h(t_k) > 0$ για κάποιο σημείο t_k .

Απόδειξη Λήμματος

Επειδή η $h(t)$ είναι συνεχής, θα είναι θετική εκτός από το σημείο t_k και σε μια μικρή περιοχή γύρω από το t_k, έστω $[t_1, t_2]$. Η συνάρτηση

$$\delta x(t) = \begin{cases} 0 & t_0 \le t \le t_1 \\ (t-t_1)^3(t_2-t)^3 & t_1 \le t \le t_2 \\ 0 & t_2 \le t \le t_{t_f} \end{cases}$$



Απόδειξη Λήμματος συνέχεια

ανήκει στον χώρο των συναρτήσεων $\mathrm{C}^2[t_0, t_f]$ και επιπλέον $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\int_{t_0}^{t_f} h(t)\delta x(t)dt = 0$ εφόσον $h(t) > 0$ και $\delta x(t) \neq 0, \forall t \notin (t_1, t_2)$.

Συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα θα πρέπει να ισχύει $h(t) = 0, \forall t \in [t_0, t_f]$.

Παράδειγμα 6

Έστω $J: (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ όπου

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt.$$

$$\delta J(x, \delta x) = \left[\frac{d}{da} J(x + a\delta x)\right]_{a=0} = \int_{t_0}^{t_f} 2x(t)\delta x(t)dt$$

Το συναρτησιακό $J: (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο στη συνάρτηση x^* τότε η πρώτη μεταβολή μηδενίζεται για τη συνάρτηση x^* δηλαδή $\delta J(x^*, \delta x) = 0$ ή ισοδύναμα βάσει του Λήμματος θα έχουμε

$$2x^*(t) = 0 \Leftrightarrow x^*(t) = 0, \forall t \in [t_0, t_f].$$

Βιβλιογραφία

- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.
- D.E. Kirk, 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. S. Naidu, 2002, Optimal Control Systems, CRC Press LLC.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου. **Ενότητα 4**: Εισαγωγή στο Λογισμό Μεταβολών». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS288/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

CC BY SA