ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 7: Συναρτησιακά καμπύλων με ασυνέχεια στις παραγώγους

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

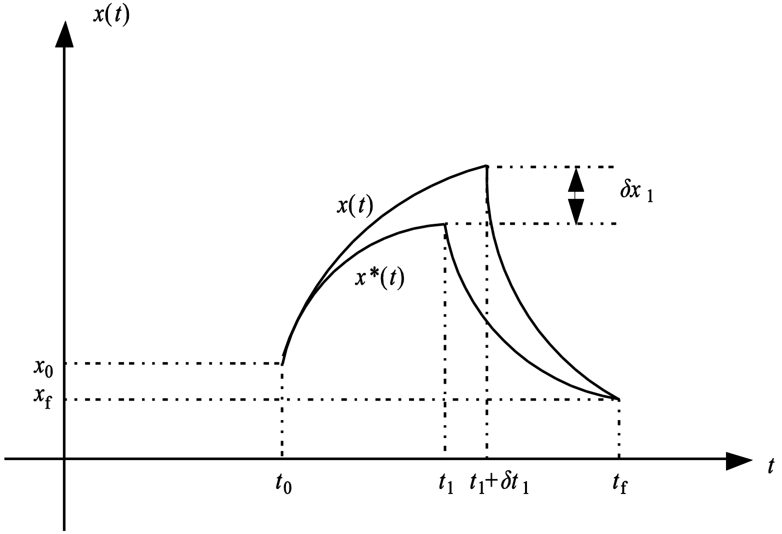
Περιεχόμενα

- Διατύπωση **ικανών** (Legendre - Jacobi) **και αναγκαίων** (Euler - Lagrange) **συνθηκών** για την εύρεση τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού το οποίο εξαρτάται από μια διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής $x(t)$, και την παράγωγο της η οποία όμως παρουσιάζει ασυνέχεια σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων π.χ. $J(t, x(t), x'(t))$.
- **Συνθήκες εγκαρσιότητας** που πρέπει να πληρούνται από τις αρχικές και τις τελικές συνθήκες της συνάρτησης x(t) ώστε να έχει ακρότατο το συναρτησιακό $J(t, x(t), x'(t))$.
- **Συνθήκες Weierstrass-Erdmann** που πρέπει να πληρούνται στα σημεία ασυνέχειας της παραγώγου της $x(t)$.

Σκοποί Ενότητας

- Διατύπωση ***αναγκαίων συνθηκών*** Euler-Lagrance για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού $J(t, x(t), x'(t))$.
- Διατύπωση ***ικανών συνθηκών*** Legendre-Jacobi για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού $J(t, x(t), x'(t))$.
- Τερματική συνθήκη/ες ή **συνθήκη/ες εγκαρσιότητας** και μελέτη ειδικών περιπτώσεων για τις αρχικές και τελικές τιμές της $x(t)$.
- **Συνθήκες Weierstrass-Erdmann** για τα σημεία ασυνέχειας της παραγώγου της $x(t)$.

Διατύπωση συνθηκών (1)



Έστω

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

$$\dot{x}(t_1 - 0) =: \dot{x}(t_1^-) \neq \dot{x}(t_1^+) := \dot{x}(t_1 + 0)$$

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \int_{t_1}^{t_f} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt = J_1(x) + J_2(x)$$

"Εάν $x^*(t)$ είναι σχετικό ακρότατο της $J(x)$ τότε το $x^*(t)$ είναι σχετικό ακρότατο της $J_1(x), x \in [t_0, t_1]$ και της $J_2(x), x \in [t_1, t_f]$"

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*, \dot{x}^*)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right] = 0$$

Διατύπωση συνθηκών (2)

$$\delta J(x^*,\delta x)=0 \Rightarrow \delta J_1(x^*,\delta x)+\delta J_2(x^*,\delta x)=0 \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1,x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \delta x_1+\\ +\left[F\left(t_1,x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-)\right)-\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1,x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^-)\right]\delta t_1+\\ +\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,x^*,\dot{x}^*)\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t,x^*,\dot{x}^*)\right]\right\}^T \delta x dt\end{array}\right)$$

$+$

Διατύπωση συνθηκών (3)

$$+\left\{\begin{array}{c} -\left[\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \delta x_1 \\ -\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) - \left[\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^+)\right]\delta t_1 \\ +\displaystyle\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*, \dot{x}^*)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*)\right]\right\}^T \delta x dt \end{array}\right\}$$

$$= 0$$

Διατύπωση συνθηκών (4)

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \delta x_1 + \left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^-)\right]\delta t_1$$

$$+\left(-\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \delta x_1\right.$$

Περίπτωση 1 (1)

- **Περίπτωση 1η .** Τα $t_1, x(t_1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\left(\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T\right)\delta x_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^-)\right] \\ -\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^+)\right]\end{array}\right\}\delta t_1 = 0$$

$$\downarrow$$

Περίπτωση 1 (2)

- **Περίπτωση 1η .** Τα $t_1, x(t_1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

• $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)$

• $F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^-) =$
$F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^+)$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \text{ και } F - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^T \dot{x}^*$$

θα πρέπει να είναι συνεχείς στα γωνιακά σημεία.

Γωνιακές Συνθήκες Weierstrass-Erdmann

Περίπτωση 2 (1)

- **Περίπτωση 2η .** Τα $t_1, x(t_1)$ σχετίζονται μέσω της σχέσης $x(t_1) = \theta(t_1)$**.**

$$\left(\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T\right)\delta x_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^-)\right] \\ -\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^+)\right]\end{array}\right\}\delta t_1 = 0$$

$$\downarrow \quad \delta x_1 = \dot{\theta}(t_1)\delta t_1$$

Περίπτωση 2 (2)

- **Περίπτωση 2η .** Τα $t_1, x(t_1)$ σχετίζονται μέσω της σχέσης $x(t_1) = \theta(t_1)$**.**

$$\left(\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T\right)\dot{\theta}(t_1)\delta t_1 +$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^-)\right] \\ -\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \dot{x}^*(t_1^+)\right]\end{array}\right\}\delta t_1 = 0$$

Περίπτωση 2 (3)

- **Περίπτωση 2η .** Τα $t_1, x(t_1)$ σχετίζονται μέσω της σχέσης $x(t_1) = \theta(t_1)$**.**

$$\left\{\begin{array}{l}\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \left[\dot{x}^*(t_1^-) - \dot{\theta}(t_1)\right]\right] \\ -\left[F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \left[\dot{x}^*(t_1^+) - \dot{\theta}(t_1)\right]\right]\end{array}\right\} \delta t_1 = 0$$

$$F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \left[\dot{x}^*(t_1^-) - \dot{\theta}(t_1)\right] =$$

$$= F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \left[\dot{x}^*(t_1^+) - \dot{\theta}(t_1)\right]$$

Η $F - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^T \left(\dot{x}^* - \dot{\theta}\right)$ θα πρέπει να είναι συνεχής στα γωνιακά σημεία.

Παράδειγμα 1 (1)

Να βρεθεί ο πιο σύντομος δρόμος που ενώνει τα σημεία $x(0) = 1, x(1) = 0$ και έχει ασυνέχεια της παραγώγου σε ένα σημείο της καμπύλης $\theta(t) = -t + \frac{1}{2}, t \in [0,1]$.

$$J(x) = \int_0^1 \underbrace{\left(1 + \dot{x}(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{F(\dot{x})} dt$$

Έχει ελάχιστο για την άκρα καμπύλη $x^*(t) = c_1 t + c_2$.

$$x^*(t) = \begin{cases} c_1 t + c_2 & t \in [0, t_1] \\ c_3 t + c_4 & t \in [t_1, 1] \end{cases}$$

Παράδειγμα 1 (2)

Συνοριακές Συνθήκες

$$x^*(0) = c_1 \times 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$x^*(1) = c_3 \times 1 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = -c_3$$

Συνέχεια καμπύλης και σημεία τομής με την

$$\theta(t) = -t + \frac{1}{2}$$

$$c_1 \times t_1 + c_2 = c_3 \times t_1 + c_4 = -t_1 + \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 1 (3)

Γωνιακές Συνθήκες Weierstrass-Erdmann

$$F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\right]^T \left[\dot{x}^*(t_1^-) - \dot{\theta}(t_1)\right] =$$

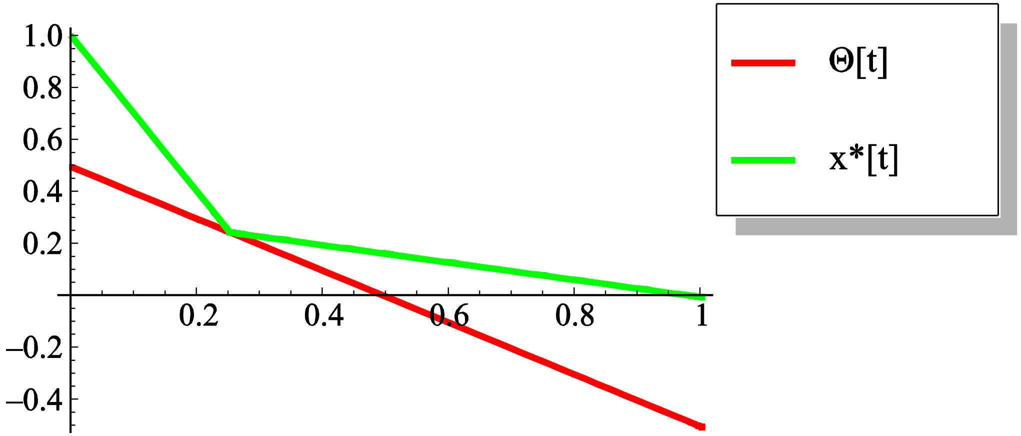
$$= F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\right]^T \left[\dot{x}^*(t_1^+) - \dot{\theta}(t_1)\right] \Leftrightarrow$$

$$(1 + \dot{x}(t_1^-)^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\dot{x}^*(t_1^-)}{(1 + \dot{x}(t_1^-)^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\dot{x}^*(t_1^-) - \dot{\theta}(t_1)\right]$$

$$= (1 + \dot{x}(t_1^+)^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\dot{x}^*(t_1^+)}{(1 + \dot{x}(t_1^+)^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\dot{x}^*(t_1^+) - \dot{\theta}(t_1)\right] \Leftrightarrow$$

$$(1 + {c_1}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{c_1}{(1 + {c_1}^2)^{\frac{1}{2}}}[c_1 - (-1)] = (1 + {c_3}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{c_3}{(1 + {c_3}^2)^{\frac{1}{2}}}[c_3 - (-1)]$$

Παράδειγμα 1 (4)



$$x_1^*(t) = \begin{cases} -3t+1 & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ -\frac{1}{3}t + \frac{1}{3} & t \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Γωνία πρόσπτωσης πάνω στην ευθεία $\boldsymbol{\theta(t)}$ είναι ίση με την γωνία ανάκλασης.

$$tan(\omega_1) = \frac{\dot{x}^*(t_1^-) - \dot{\theta}^*(t_1^-)}{1 + \dot{x}^*(t_1^-)\dot{\theta}^*(t_1^-)} = \frac{-3-(-1)}{1+(-3)(-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$tan(\omega_2) = \frac{\dot{x}^*(t_1^+) - \dot{\theta}^*(t_1^+)}{1 + \dot{x}^*(t_1^+)\dot{\theta}^*(t_1^+)} = \frac{-\frac{1}{3}-(-1)}{1+(-\frac{1}{3})(-1)} = -\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2 (1)

Να βρεθεί συνάρτηση $x(t)$ με μη συνεχείς παραγώγους σε σημεία και συνοριακές συνθήκες $x(0) = 0, x(2) = 1$ η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_0^2 \underbrace{\dot{x}^2(t)\big(1 - \dot{x}(t)\big)^2}_{F(\dot{x}(t))} dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) = 0 \Rightarrow$$

$$0 - \frac{d}{dt}\left(2\dot{x}^*(t)\big(1 - \dot{x}^*(t)\big)^2 - 2\dot{x}^*(t)^2\big(1 - \dot{x}^*(t)\big)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}[2\dot{x}^*(t) + 2\dot{x}^*(t)^3 - 4\dot{x}^*(t)^2 - 2\dot{x}^*(t)^2 + 2\dot{x}^*(t)^3] = 0 \Rightarrow$$

Παράδειγμα 2 (2)

$$\frac{d}{dt}[4\dot{x}^*(t)^3 - 6\dot{x}^*(t)^2 + 2\dot{x}^*(t)] = 0 \Rightarrow$$

$$12\dot{x}^*(t)^2\ddot{x}^*(t) - 12\dot{x}^*(t)\ddot{x}^*(t) + 2\ddot{x}^*(t) = 0 \Rightarrow$$

$$2\ddot{x}^*(t)(6\dot{x}^*(t)^2 - 6\dot{x}^*(t) + 1) = 0$$

$$\ddot{x}^*(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}^*(t) = c_1 \Rightarrow x^*(t) = c_1 t + c_2$$

ή

$$6\dot{x}^*(t)^2 - 6\dot{x}^*(t) + 1 = 0 \Rightarrow \dot{x}^*(t) = \frac{1}{6}\left(3 \pm \sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$x^*(t) = \frac{1}{6}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)t + c_2$$

Παράδειγμα 2 (3)

$$x_1{}^*(t) = c_1 t + c_2$$

- **Συνοριακές Συνθήκες**

$$x_1^*(0) = 0 \Rightarrow c_1 \times 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$x_1^*(2) = 1 \Rightarrow c_1 \times 2 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2{}^*(t) = \frac{1}{6}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)t + c_3$$

- **Συνοριακές Συνθήκες**

$$x_2{}^*(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}\left(3 \pm \sqrt{3}\right) \times 0 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$x_2{}^*(2) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6}\left(3 \pm \sqrt{3}\right) \times 2 + c_3 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{3}\right) = 1$$ **ΑΤΟΠΟ**

Παράδειγμα 2 (4)

$$x_1^*(t) = \frac{1}{2}t$$

- **Αυστηρή συνθήκη του Legendre**

$$R(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) = 12\dot{x}^*(t)^2 - 12\dot{x}^*(t) + 2$$

$$R(t) = 12c_1^2 - 12c_1 + 2$$

- **Ασθενές τοπικό ελάχιστο $\boldsymbol{R(t) > 0}$**

$$c_1 \in \left(-\infty, \frac{1}{6}\big(3 - \sqrt{3}\big)\right) \cup \left(\frac{1}{6}\big(3 + \sqrt{3}\big), +\infty\right)$$

- **Ασθενές τοπικό μέγιστο $\boldsymbol{R(t) < 0}$**

$$c_1 \in \left(\frac{1}{6}\big(3 - \sqrt{3}\big), \frac{1}{6}\big(3 + \sqrt{3}\big)\right)$$

$$J(\dot{x}_1^*) = \int_0^2 \dot{x}_1(t)^2[1 - \dot{x}_1(t)]^2 dt = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{2}\right]^2 dt = \frac{1}{8}$$

Παράδειγμα 2 (5)

- **Αυστηρή συνθήκη του Jacobi**

$$P(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) = 0$$

$$Q(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) = 0$$

$$R(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) = 12c_1^2 - 12c_1 + 2 = c$$

Παράδειγμα 2 (6)

- **Αυστηρή συνθήκη του Jacobi**

$$\left(P(t) - \frac{dQ(t)}{dt}\right)u(t) - \frac{d}{dt}\big(R(t)\dot{u}(t)\big) = 0 \Rightarrow$$

$$c\ddot{u}(t) = 0 \Rightarrow u(t) = d_1 t + d_2$$

$$\left.\begin{matrix} u(0) = 0 = d_2 \\ \dot{u}(0) = 1 = d_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{d_1 = 1, d_2 = 0\}$$

και άρα η λύση είναι η $u(t) = t \neq 0, \forall t \in (0,2]$.

Παράδειγμα 2 (7)

Αν υποθέσουμε ότι η άκρα καμπύλη στο διάστημα $[0, t_1]$ είναι η $x_1^*(t) = c_1 t + c_2$, ενώ η άκρα καμπύλη στο διάστημα $[t_1, 2]$ είναι η $x_2^*(t) = c_3 t + c_4$.

- **Συνοριακές συνθήκες**

$$x_1^*(0) = c_1 \times 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$
$$x_2^*(2) = 2c_3 + c_4 = 1 \Rightarrow c_4 = 1 - 2c_3$$

- **Συνέχεια συνάρτησης στο $\boldsymbol{t_1}$**

$$x_1^*(t_1) = c_1 t_1 + c_2 = c_3 t_1 + c_4 = x_2^*(t_1) \Leftrightarrow$$
$$c_1 t_1 = c_3 t_1 + 1 - 2c_3$$

Γωνιακές συνθήκες Weierstrass-Erdmann (1)

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) \Leftrightarrow$$

$$4\dot{x}^*(t_1^-)^3 - 6\dot{x}^*(t_1^-)^2 + 2\dot{x}^*(t_1^-) = 4\dot{x}^*(t_1^+)^3 - 6\dot{x}^*(t_1^+)^2 + 2\dot{x}^*(t_1^+) \Leftrightarrow$$

$$4c_1^3 - 6c_1^2 + 2c_1 = 4c_3^3 - 6c_3^2 + 2c_3$$

$$F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-)\right)\dot{x}^*(t_1^-) =$$

$$= F\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+)\right)\dot{x}^*(t_1^+) \Leftrightarrow$$

$$\dot{x}^*(t_1^-)^2\left(1 - \dot{x}(t_1^-)\right)^2 - [4\dot{x}^*(t_1^-)^3 - 6\dot{x}^*(t_1^-)^2 + 2\dot{x}^*(t_1^-)]\dot{x}^*(t_1^-)$$

$$= \dot{x}^*(t_1^+)^2\left(1 - \dot{x}(t_1^+)\right)^2 - [4\dot{x}^*(t_1^+)^3 - 6\dot{x}^*(t_1^+)^2 + 2\dot{x}^*(t_1^+)]\dot{x}^*(t_1^+) \Leftrightarrow$$

Γωνιακές συνθήκες Weierstrass-Erdmann (2)

$$c_1^2(1-c_1)^2-(4c_1^3-6c_1^2+2c_1)c_1$$
$$=c_3^2(1-c_3)^2-(4c_3^3-6c_3^2+2c_3)c_3$$

$$x_1^*(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & t\in[0,t_1]\\ \frac{1}{2}t & t\in[t_1,2]\end{cases},$$

$$x_2^*(t)=\begin{cases}0 & t\in[0,1\ ]\\ t-1 & t\in[1,2]\end{cases},$$

$$x_3^*(t)=\begin{cases}t & t\in[0,1\ ]\\ 1 & t\in[1,2]\end{cases}$$

Mathematica

```
In[1]:= Reduce c2 □ 0,
          c4 □ 1 □ 2□c3,
          c1 t1 □□ c3 t1 □ 1 □ 2□c3,
          4□c1^3 □ 6□c1^2 □ 2□c1 □□ 4□c3^3 □ 6□c3^2 □ 2□c3,
          c1^2 □ 1 □ c1 ^2 □ 4□c1^3 □ 6□c1^2 □ 2□c1 c1 □ c3^2 □ 1 □ c3 ^2 □ 4□c3^3 □ 6□c3^2 □ 2□c3 c3 ,
          c1, c2, c3, c4, t1

Out[1]= c1 □ 1/2 && c2 □ 0 && c3 □ 1/2 && c4 □ 0
          c1 □ 0  c1 □ 1  && c2 □ 0 && c3 □ 1 □ c1 && c4 □ □1 □ 2 c1 && t1 □ 1
```

Παράδειγμα 2 (8)

οι οποίες λόγω του ότι ο συντελεστής κατεύθυνσης τους ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)\right) \cup \left(\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right), +\infty\right)$, για τον οποίο ο $R(x_i^*) > 0, i = 2,3$, οδηγούν σε τοπικό ελάχιστο ίσο με

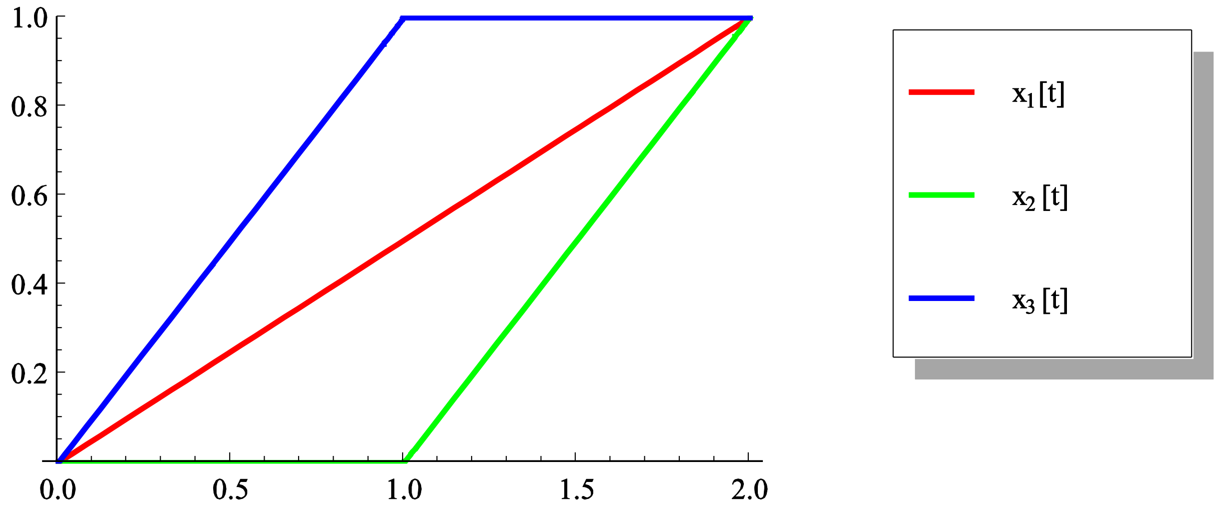
$$J(x_2^*) = \int_0^2 \dot{x}_2^*(t)^2\left(1-\dot{x}_2^*(t)\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^1 0^2[1-0]^2 dt + \int_1^2 1^2[1-1]^2 dt = 0$$

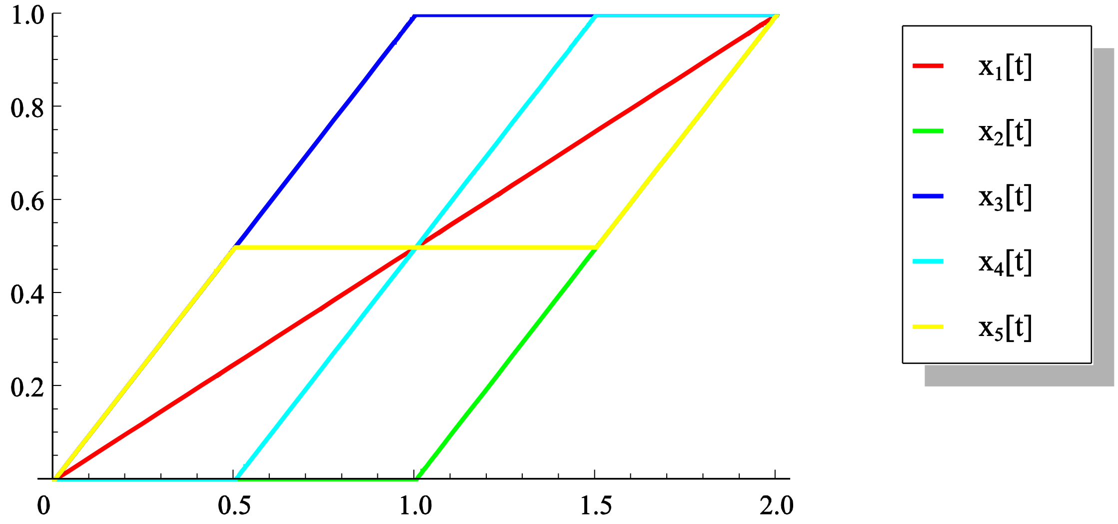
$$J(x_3^*) = \int_0^2 \dot{x}_3^*(t)^2\left(1-\dot{x}_3^*(t)\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^1 1^2[1-1]^2 dt + \int_1^2 0^2[1-0]^2 dt = 0$$

Γραφική παράσταση

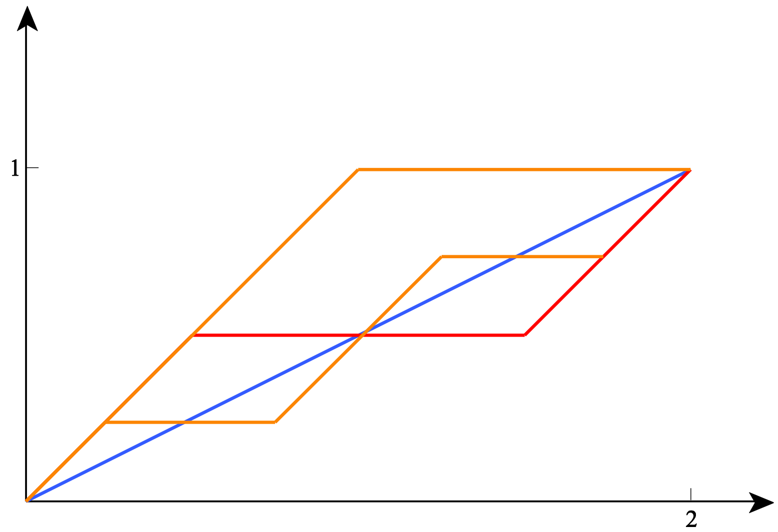


Δύο σημεία ασυνέχειας



Γενικά

Πολλαπλά σημεία ασυνέχειας



Γενικά μπορούμε να πάμε από το σημείο (0,0) στο σημείο (2,1) με ευθείες που έχουν κλίσεις 0 και 1

$$\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} 1^2[1-1]^2 dt = 0\right) \vee \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} 0^2[1-0]^2 dt = 0\right)$$

Βιβλιογραφία

- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.
- D.E. Kirk, 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. S. Naidu, 2002, Optimal Control Systems, CRC Press LLC.
- G. Erdmann, "Ueber die unstetige Lösungen in der Variationsrechnung" *J. Reine Angew. Math.* , **82** (1877) pp. 21–30.
- O. Bolza, "Lectures on the calculus of variations" , Chelsea, reprint (1960) (Translated from German)
- L. Cesari, "Optimization - Theory and applications" , Springer (1983)
- G.M. Ewing, "Calculus of variations with applications" , Dover, reprint (1985)

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης