ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 9: Εφαρμογές του Λογισμού των Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Επίλυση προβλήματος **Bolza**.
- Ορισμός και χρήση της **Χαμιλτονιανής συνάρτησης** για τον καθορισμό των αναγκαίων και ικανών συνθηκών ύπαρξης ακρότατου καθώς και για τις συνθήκες εγκαρσιότητας.

Σκοποί Ενότητας

- Επίλυση προβλήματος Bolza με χρήση Χαμιλτονιανής συνάρτησης.
- Διατύπωση ικανών και αναγκαίων συνθηκών καθώς και των συνθηκών εγκαρσιότητας μέσω της Χαμιλτονιανής συνάρτησης.
- Η είσοδος στο παραπάνω πρόβλημα δεν είναι φραγμένη.

Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο (1)

<u>**Πρόβλημα**</u>: Δίνεται το συναρτησιακό

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t)dt$$

που το $x(t)$ ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

Ζητούμε να βρεθούν οι <u>αναγκαίες συνθήκες</u> ώστε το $J(u)$ να έχει σχετικό ακρότατο.

Ορίζουμε $F_a(x, \dot{x}, u, p, t) = F(x, u, t) + p^T[a(x, u, t) - \dot{x}]$ και θα έχουμε:

Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο (2)

$$\frac{\partial F_a}{\partial p}(x,\dot{x},u,p,t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{p}}(x,\dot{x},u,p,t)\right]=0$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial x}(x,\dot{x},u,p,t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},u,p,t)\right]=0$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial u}(x,\dot{x},u,p,t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{u}}(x,\dot{x},u,p,t)\right]=0$$

Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο (3)

Αν όμως ορίσουμε (Χαμιλτονιανή)

$$H(x,u,p,t) = F(x,u,t) + p^T a(x,u,t)$$

τότε

$$F_a(x,\dot{x},u,p,t) = F(x,u,t) + p^T[a(x,u,t) - \dot{x}]$$

$$\downarrow$$

$$F_a(x,\dot{x},u,p,t) = H(x,u,p,t) - p^T\dot{x}$$

και άρα

$$\frac{\partial F_a}{\partial p}(x,\dot{x},u,p,t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{p}}(x,\dot{x},u,p,t)\right] = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x,u,p,t) - \dot{x} - \frac{d}{dt}[0] = 0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x,u,p,t)$$

Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο (4)

$$F_a(x,\dot{x},u,p,t) = H(x,u,p,t) - p^T\dot{x}$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial x}(x,\dot{x},u,p,t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},u,p,t)\right] = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,p,t) - \frac{d}{dt}[-p] = 0 \Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,p,t)$$

costate-equations

$$\frac{\partial F_a}{\partial u}(x,\dot{x},u,p,t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{u}}(x,\dot{x},u,p,t)\right] = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x,u,p,t) - \frac{d}{dt}[0] = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u}(x,u,p,t) = 0$$

Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο (5)

$$F_a(x,\dot{x},u,p,t) = H(x,u,p,t) - p^T\dot{x}$$

$$\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},u,p,t)\right]^T \delta x_f$$
$$+\left\{F_a(x,\dot{x},u,p,t) - \left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},u,p,t)\right]^T \dot{x}(t_f)\right\}\delta t_f = 0 \Rightarrow$$

$$\left[-p(t_f)\right]^T \delta x_f$$
$$+\left\{H(x,u,p,t) - \left[p(t_f)\right]^T \dot{x}(t_f) - \left(-\left[p(t_f)\right]^T \dot{x}(t_f)\right)\right\}\delta t_f = 0$$
$$\Rightarrow$$

$$\left[-p(t_f)\right]^T \delta x_f + \left\{H(x,u,p,t)\Big|_{*t_f}\right\}\delta t_f = 0$$

Εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο (6)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, u, p, t)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, u, p, t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, p, t) = 0$$

$$\left[-p(t_f)\right]^T \delta x_f + \left\{ H(x, u, p, t)\Big|_{*t_f} \right\} \delta t_f = 0$$

Άσκηση 1 (1)

Άσκηση: Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \text{(1a)}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u \quad \text{(1b)}$$

το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε με κατάλληλη είσοδο $u(t)$, ελαχιστοποιώντας την είσοδο που θα χρησιμοποιήσουμε

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

Ορίζουμε

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2} u^2(t) + p_1(t) x_2(t) + p_2(t)[-x_2(t) + u(t)]$$

$$\dot{p}_1^* = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \dot{p}_2^* = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1^*(t) + p_2^*(t), 0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u^*(t) + p_2^*(t)$$

Άσκηση 1 (2)

$$x_1^*(t) = c_1 + c_2(1 - e^{-t}) + c_3\left(-t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}\right) +$$

$$+c_4(1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t})$$

$$x_2^*(t) = c_2e^{-t} + c_3\left(-1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}\right) + c_4(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t})$$

$$p_1^*(t) = c_3$$

$$p_2^*(t) = c_3(1 - e^{t}) + c_4e^{t}$$

Πρόβλημα (Bolza problem) (1)

<u>Πρόβλημα (Bolza problem)</u>: Δίνεται το συναρτησιακό

$$J(u) = h\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t)dt$$

όπου το $x(t)$ ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

Ζητούμε να βρεθούν οι <u>αναγκαίες συνθήκες</u> ώστε το $J(u)$ να έχει σχετικό ακρότατο.

Δύο περιπτώσεις

Η είσοδος δεν είναι φραγμένη

Υπόθεση: $x(t_0) = x_0, t_0$ γνωστά

Η είσοδος είναι φραγμένη

Πρόβλημα (Bolza problem) (2)

$$\begin{cases} h\big(x(t_f),t_f\big) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}[h(x(t),t\ )]dt + h(x(t_0),t_0) \\ J(u) = h\big(x(t_f),t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t),u(t),t)dt \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\left\{F(x(t),u(t),t) + \frac{d}{dt}[h(x(t),t\ )]\right\}}_{\text{Σχετικό ακρότατο?}} dt + \underbrace{h(x(t_0),t_0)}_{\gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{o}}$$

Πρόβλημα (Bolza problem) (3)

Συνεπώς αντί να μελετήσουμε το σχετικό ακρότατο της $J(u)$ μελετάμε το σχετικό ακρότατο της $J'(u)$

$$J'(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ F(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt}[h(x(t), t\ )] \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\left\{ F(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) \right\}}_{F'(x(t),u(t),t)} dt$$

και $\underbrace{\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)}_{\pi\varepsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu o\iota}$

$$J_a(u) = \int_{t_0}^{t_f} F_a(x, \dot{x}, u, p, t) dt$$

$$F_a(x, \dot{x}, u, p, t) = F(x, u, t) + p^T(a(x, u, t) - \dot{x}) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right]^T \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$$

Πρόβλημα (Bolza problem) (4)

$$
\begin{aligned}
&\delta J_a(u^*) = 0 \\
&= \left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right)\right]^T \delta x_f + \left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{u}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right)\right]^T \delta u_f \\
&+ \left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{p}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right)\right]^T \delta p_f + \{F_a\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) \\
&- \left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right)\right]^T \dot{x}^*(t_f) \\
&- \left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{u}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right)\right]^T \dot{u}^*(t_f) \\
&- \left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{u}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right)\right]^T \dot{p}^*(t_f)\}\delta t_f \\
&+ + \int_{t_0}^{t_f} \left\{\left\{\left[\frac{\partial F_a}{\partial x}\right]^T - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}\right]^T\right\}\delta x(t) + \left\{\left[\frac{\partial F_a}{\partial u}\right]^T - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{u}}\right]^T\right\}\delta u(t)\right.
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα (Bolza problem) (5)

Από $\delta J_a(u^*)$ συγκεντρώνουμε όλους τους όρους που περιέχουν το $h(t)$ και βρίσκονται μέσα στο ολοκλήρωμα.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*,t)\right]^T \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*,t)\right\} - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left[\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*,t)\right]^T \dot{x}^*(t)\right]\right\} =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*,t)\right]\dot{x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}(x^*,t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*,t)\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*,t)\right]^T \dot{x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}(x^*,t) - \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*,t)\right]^T \dot{x} - \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}(x^*,t) =$$

$$= \left\{\mu\varepsilon\rho.\, \delta\varepsilon\upsilon\tau.\, \pi\alpha\rho\alpha\gamma.\, \tau o\upsilon\ h\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\varepsilon\iota\varsigma \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}\right)\right\} = 0$$

Πρόβλημα (Bolza problem) (6)

Τι μένει λοιπόν στο ολοκλήρωμα ?

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\begin{aligned} &\left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*, u^*, t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*, u^*, t) - \frac{d}{dt}\left[-p^*(t)^T \right] \right\} \delta x(t) \\ &\quad + \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial u}(x^*, u^*, t) \right]^T + p^*(t)^T \frac{\partial a}{\partial x}(x^*, u^*, t) \right\} \delta u(t) \\ &\quad + \Big[\underbrace{a(x^*, u^*, t) - \dot{x}^*}_{\eta\ \delta.\varepsilon.=0\ \forall x^*, \mu^*} \Big]^T \delta p(t) \end{aligned} \right) dt$$

Διαλέγουμε p^* τ.ω. να μηδενίζει τους συντελεστές του $\delta x(t)$:

Πρόβλημα (Bolza problem) (7)

Ανάστροφος

$$\boxed{\begin{gathered}\dot{p}^*(t) = -\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*, u^*, t)\right] - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*, u^*, t)\right]^T p^*(t) \\ Costate\ equations\end{gathered}}$$

Οι συντελεστές του $\delta u(t)$ θα πρέπει να είναι μηδέν ($u(t)$ γραμμ. ανεξ. Ενώ x δεν ήταν, για αυτό και μηδενίσαμε τους συντελεστές του δx με κατάλληλο p^*)

Για έλεγχο u μη φραγμ. μόνο αυτή θα αλλάξει

$$\boxed{0 = \frac{\partial F}{\partial u}(x^*, u^*, t) + \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*, u^*, t)\right]^T p^*(t)}$$

Πρόβλημα (Bolza problem) (8)

Τι γίνεται όμως έξω από το ολοκλήρωμα?

$$x(t_0) = t_0 \text{ η αρχ. συνθήκη}$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*, t_f) - p\right]^T \delta x_f$$

$$+ \left[F(x^*, u^*, t_f) + [p^*(t)]^T \dot{x}^*(t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x, t_f)\right] \delta t_f$$

$$\downarrow \quad \dot{x}(t_f) = a(x(t_f), u(t_f), t_f)$$

$$= \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*, t_f) - p\right]^T \delta x_f$$

$$+ \left[F(x^*, u^*, t_f) + [p^*(t)]^T a(x(t_f), u(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x, t_f)\right] \delta t_f$$

Πρόβλημα (Bolza problem) (9)

Ορίζουμε την Hamiltonian:

$$\boxed{H(x,u,p,t) \triangleq F(x,u,t) + p^T(t)a(x,u,t)}$$

$$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*,u^*,p^*,t)$$

$$\boxed{\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*,u^*,p^*,t)}$$

$$\boxed{0 = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*,u^*,p^*,t)}$$

Πρόβλημα (Bolza problem) (10)

Ορίζουμε την <u>Hamiltonian</u>:

$$\boxed{H(x,u,p,t) \triangleq F(x,u,t) + p^T(t)a(x,u,t)}$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*,t_f\right) - p\right]^T \delta x_f$$

$$+\left[F\left(x^*,u^*,t_f\right) + [p^*(t)]^T a\left(x\left(t_f\right),u\left(t_f\right),t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x,t_f\right)\right]\delta t_f$$

$$=\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*\left(t_f\right),t_f\right) - p^*\left(t_f\right)\right]^T \delta x_f + \left[H\left(x^*,u^*,p^*,t_f\right) + \right.$$

Συνοριακές συνθήκες (1)

Συνοριακές Συνθήκες

Συγκεκριμένος Τελικός Χρόνος $\left(\delta t_f = 0\right)$

$\swarrow \qquad \downarrow \qquad \searrow$

(A)Συγκ. Τελ. Κατ.

$$x^*\left(t_f\right) = x_f$$

$$\Downarrow$$

$$\delta x_f = 0$$

(B)Ελευθ. Τελ. Κατ.

$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(x_f^*, t_f\right) - p^*\left(t_f\right) = 0$$

(Γ) $\alpha\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\ \sigma\tau\eta\nu$

$$m\left(x\left(t_f\right)\right) = 0$$

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*\left(t_f\right), t_f\right) - p^*\left(t_f\right)\right]\delta x_f + \left[H\left(x^*, u^*, p^*, t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*\left(t_f\right), t_f\right)\right]\delta t_f = 0}$$

Συνοριακές συνθήκες (2)

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f),t_f\right)-p^*(t_f)\right]\delta x_f+\left[H\left(x^*,u^*,p^*,t_f\right)+\frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f),t_f\right)\right]\delta t_f=0}$$

(Γ) π.χ.

$$m\big(x(t)\big)=[x_1(t)-3]^2+[x_2(t)-4]^2-4=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{\partial m(x(t_f))}{\partial x}\right]^T\delta x(t_f)=0\Rightarrow$$

$$2\big(x_1(t_f)-3\big)\delta x_1(t_f)+2\big(x_2(t_f)-4\big)\delta x_2(t_f)=0\Rightarrow$$

$$\delta x_2(t_f)=\frac{2\big(x_1(t_f)-3\big)}{2\big(x_2(t_f)-4\big)}\delta x_1(t_f)$$

Συνοριακές συνθήκες (3)

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right]\delta x_f + \left[H\left(x^*, u^*, p^*, t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right)\right]\delta t_f = 0}$$

Και άρα (Γ1)

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right]\left[\begin{matrix} 1 \\ -\dfrac{\left(x_1(t_f) - 3\right)}{\left(x_2(t_f) - 4\right)} \end{matrix}\right]\delta x_1(t_f) = 0$$

(Γ2) $m\left(x(t_f)\right) = 0$

Άσκηση 2 (1)

Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1a)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (1b)$$

Το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε με κατάλληλη είσοδο $u(t)$, ελαχιστοποιώντας την είσοδο που θα χρησιμοποιήσουμε

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε

$$H(x,u,p) = \frac{1}{2} u^2(t) + p_1(t) x_2(t) + p_2(t) u(t)$$

Άσκηση 2 (2)

$$H(x,u,p) = \frac{1}{2}u^2(t) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

$$\dot{p}_1^* = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad \dot{p}_2^* = \frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1^*(t) \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u^*(t) + p_2^*(t)$$

$$\left\{\begin{matrix} x_1^*(t) = \frac{c_3}{6}t^3 - \frac{c_4}{2}t^2 + c_2 t + c_1 \\ x_2^*(t) = \frac{c_3}{2}t^2 - c_4 t + c_2 \\ p_1^*(t) = c_3 \\ p_2^*(t) = -c_3 t + c_4 \\ u^*(t) = -p_2^*(t) = c_3 t - c_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^*(t) = 0{,}5t^3 - 2t^2 + 2t + 1 \\ x_2^*(t) = 1.5t^2 - 4t + 2 \\ p_1^*(t) = 3 \\ p_2^*(t) = -3t + 4 \\ u^*(t) = -p_2^*(t) = 3t - 4 \end{matrix}\right\}$$

Άσκηση 3 (1)

Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1a)$$
$$\dot{x}_2 = u \quad (1b)$$

Το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε με κατάλληλη είσοδο $u(t)$, ελαχιστοποιώντας την είσοδο που θα χρησιμοποιήσουμε

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1(2) = 0, x_2(2) free.$

Άσκηση 3 (2)

$$\left\{\begin{array}{c} x_1^*(t) = \frac{c_3}{6}t^3 - \frac{c_4}{2}t^2 + c_2 t + c_1 \\ x_2^*(t) = \frac{c_3}{2}t^2 - c_4 t + c_2 \\ p_1^*(t) = c_3 \\ p_2^*(t) = -c_3 t + c_4 \\ u^*(t) = -p_2^*(t) = c_3 t - c_4 \end{array}\right\}$$

$(1) x_1(0) = 1,$

$(2) x_2(0) = 2,$

$(3) x_1(2) = 0,$

$$(4)\ \frac{\partial h(x(2), 2)}{\partial x_2} = p_2(2) \Rightarrow p_2\ (2) = 0$$

Άσκηση 3 (3)

$$\begin{Bmatrix} x_1^*(t) = \frac{5}{16}t^3 - \frac{15}{8}t^2 + 2t + 1 \\ x_2^*(t) = \frac{15}{16}t^2 - \frac{15}{4}t + 2 \\ p_1^*(t) = \frac{15}{8} \\ p_2^*(t) = -\frac{15}{8}t + \frac{15}{4} \\ u^*(t) = -p_2^*(t) = \frac{15}{8}t - \frac{15}{4} \end{Bmatrix}$$

Γενική περίπτωση

Γενική Περίπτωση

$$m\left(x^*(t_f)\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{\partial m}{\partial x}\left(x^*(t_f)\right)\right]^T \delta x(t_f) = 0$$

Επίσης

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right]^T \delta x_f = 0$$

Άρα $\exists d \in \mathbb{R}^k$:

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right] = d^T \frac{\partial m}{\partial x}\left(x^*(t_f)\right)}$$

Συνοριακές Συνθήκες
Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο (1)

Συνοριακές Συνθήκες

Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο

Περίπτωση 1: Συγκεκριμένη τιμή τελικής κατάστασης

$$\underline{\delta x_f = 0, \delta t_f \text{ αυθαίρετο}}$$

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right]\delta x_f + \left[H\left(x^*, u^*, p^*, t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right)\right]\delta t_f = 0}$$

1η εξίσωση: $H\left(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right) = 0$

2η εξίσωση: $\left\{x^*(t_f) = x_f, x^*(t_0) = x_0\right\}$

Συνοριακές Συνθήκες

Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο

Περίπτωση 2: Μη συγκεκριμένη τιμή της τελικής κατάστασης

2α) $\delta x_f, \delta t_f$ ανεξάρτητα

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right]\delta x_f + \left[H\left(x^*, u^*, p^*, t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right)\right]\delta t_f = 0}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f) = 0$$

$$H\left(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right) = 0$$

Συνοριακές Συνθήκες
Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο (3)

Συνοριακές Συνθήκες

Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο

Περίπτωση 2: Μη συγκεκριμένη τιμή της τελικής κατάστασης

2β) $x(t_f)$ κινείται πάνω στην θ(t),

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f),t_f\right)-p^*(t_f)\right]\delta x_f+\left[H\left(x^*,u^*,p^*,t_f\right)+\frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f),t_f\right)\right]\delta t_f=0}$$

$$\delta x_f \triangleq \frac{d\theta(t_f)}{dt}\delta t_f \qquad x^*(t_f)=\theta(t_f)$$

$$\Downarrow$$

1η εξίσωση

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f),t_f\right)-p^*(t_f)\right]^T\frac{d\theta(t_f)}{dt}+H\left(x^*(t_f),u^*(t_f),p^*(t_f),t_f\right)+\frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f),t_f\right)=0$$

Συνοριακές Συνθήκες
Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο (4)

Συνοριακές Συνθήκες

Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο

Περίπτωση 2: Μη συγκεκριμένη τιμή της τελικής κατάστασης

2γ) $x(t_f)$ ικανοποιεί την $m\left(x(t_f)\right) = 0$

1) $x^*(t_0) = x_0$

2) $m\left(x(t_f)\right) = 0$

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right]\delta x_f + \left[H\left(x^*, u^*, p^*, t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right)\right]\delta t_f = 0}$$

Συνοριακές Συνθήκες
Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο (5)

$$m\left(x(t_f)\right) = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial m}{\partial x}\left(x^*(t_f)\right)\right]^T \delta x_f = 0,$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right]^T \delta x_f = 0$$

3) $\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right] = d^T \cdot \frac{\partial m}{\partial x}\left(x^*(t_f)\right)$

4) $H\left(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right) = 0$

Συνοριακές Συνθήκες
Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο (6)

Συνοριακές Συνθήκες

Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο

Περίπτωση 2: Μη συγκεκριμένη τιμή της τελικής κατάστασης

2δ) $x(t_f)$ικανοποιεί την $m\left(x(t_f), t_f\right) = 0$

1) $x^*(t_0) = x_0$, n εξισώσεις

2) $m\left(x(t_f)\right) = 0$, k εξισώσεις

Συνοριακές Συνθήκες
Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο (7)

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f),t_f\right)-p^*(t_f)\right]\delta x_f+\left[H\left(x^*,u^*,p^*,t_f\right)+\frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f),t_f\right)\right]\delta t_f=0}$$

$$\left[\frac{\partial m}{\partial x}\left(x^*(t_f),t_f\right)\right]^T\delta x_f+\frac{\partial m}{\partial t}\left(x^*(t_f),t_f\right)\delta t_f=0$$

$$\left[\left[\frac{\partial m}{\partial x}\left(x^*(t_f),t_f\right)\right]^T\quad\frac{\partial m}{\partial t}\left(x^*(t_f),t_f\right)\right]\begin{bmatrix}\delta x_f\\ \delta t_f\end{bmatrix}=0$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f),t_f\right)-p^*(t_f)\right]^T H\left(x^*(t_f),u^*(t_f),p^*(t_f),t_f\right)+\frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f),t_f\right)\begin{bmatrix}\delta x_f\\ \delta t_f\end{bmatrix}=0$$

Συνοριακές Συνθήκες
Προβλήματα με ελεύθερο τελικό χρόνο (8)

$$\Downarrow \quad \exists d \in \mathbb{R}^k$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f) \\ H\left(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right) \end{bmatrix} = d^T \begin{bmatrix} \frac{\partial m}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) \\ \frac{\partial m}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right) \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

n εξισώσεις

3) $\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f) = d^T \frac{\partial m}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right)$

1η εξίσωση:

4) $H\left(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right) = d^T \frac{\partial m}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right)$

Άσκηση 4 (1)

Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1a)$$
$$\dot{x}_2 = u \quad (1b)$$

το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε με κατάλληλη είσοδο $u(t)$, ελαχιστοποιώντας την είσοδο που θα χρησιμοποιήσουμε

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1(t_f) = 3, x_2(t_f) free.$$

Άσκηση 4 (2)

$$\begin{Bmatrix} x_1^*(t) = \dfrac{c_3}{6}t^3 - \dfrac{c_4}{2}t^2 + c_2 t + c_1 \\ x_2^*(t) = \dfrac{c_3}{2}t^2 - c_4 t + c_2 \\ p_1^*(t) = c_3 \\ p_2^*(t) = -c_3 t + c_4 \\ u^*(t) = -p_2^*(t) = c_3 t - c_4 \end{Bmatrix}$$

(1) $x_1(0) = 1,$

(2) $x_2(0) = 2,$

(3) $x_1\left(t_f\right) = 3.$

Άσκηση 4 (3)

$$H\left(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) + \frac{\partial h}{\partial t}\left(x^*(t_f), t_f\right) = 0 \Rightarrow$$

(4) $$\frac{1}{2}u^{*2}(t_f) + p_1^*(t_f)x_2^*(t_f) + p_2^*(t_f)u^*(t_f) = 0 \xRightarrow{u^*(t_f) = -p_2^*(t_f)}$$

$$p_1^*(t_f)x_2^*(t_f) - \frac{1}{2}p_2^{*2}(t_f) = 0$$

Άσκηση 4 (4)

(5) $\frac{\partial h}{\partial x_2}\left(x^*(t_f), t_f\right) = p_2(t_f) \Rightarrow p_2(t_f) = 0$

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u>

$$c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = \frac{4}{9}, c_4 = \frac{4}{3}, t_f = 3$$

Άσκηση 5 (1)

Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1a)$$
$$\dot{x}_2 = u \quad (1b)$$

το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε με κατάλληλη είσοδο $u(t)$, ελαχιστοποιώντας την είσοδο που θα χρησιμοποιήσουμε

$$J(u) = \frac{1}{2}(x_1(2) - 4)^2 + \frac{1}{2}(x_2(2) - 2)^2 + \int_0^2 \frac{1}{2}u^2(t)dt$$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x(2) free.$

Άσκηση 5 (2)

$$\begin{cases} x_1^*(t) = \dfrac{c_3}{6}t^3 - \dfrac{c_4}{2}t^2 + c_2 t + c_1 \\ x_2^*(t) = \dfrac{c_3}{2}t^2 - c_4 t + c_2 \\ p_1^*(t) = c_3 \\ p_2^*(t) = -c_3 t + c_4 \\ u^*(t) = -p_2^*(t) = c_3 t - c_4 \end{cases}$$

(1) $x_1(0) = 1$,

(2) $x_2(0) = 2$.

Άσκηση 5 (3)

$$h(x(t),t) = \frac{1}{2}(x_1(t)-4)^2 + \frac{1}{2}(x_2(t)-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} = x_1(t) - 4 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2} = x_2(t) - 2 \end{cases}$$

3) $\dfrac{\partial h(x(2),2)}{\partial x_1} = p_1(2) \Rightarrow p_1(2) = x_1(2) - 4$

5) $\dfrac{\partial h(x(2),2)}{\partial x_2} = p_2(2) \Rightarrow p_2(2) = x_2(2) - 2$

Συμπέρασμα:

$$c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = \frac{3}{7}, c_4 = 4/7$$

Παράδειγμα (1)

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

και

$$J(u) = \frac{1}{2}(x_1(2) - 5)^2 + \frac{1}{2}(x_2(2) - 2)^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

$x(0) = 0, x(2) =$άγνωστο.

Η αλλαγή της $J(u)$ επηρεάζει μόνο τις συνοριακές συνθήκες.

Συνεπώς

1) $x_1(0) = 0.$

2) $x_2(0) = 0.$

Παράδειγμα (2)

$$\frac{\partial h(x^*(2),2)}{\partial x_1} - p_1^*(2) = 0 \Rightarrow \; x_1^*(2) - 5 = p_1^*(2) \text{ (3)}$$

$$\frac{\partial h(x^*(2),2)}{\partial x_2} - p_2^*(2) = 0 \Rightarrow \; x_2^*(2) - 2 = p_2^*(2) \text{ (4)}$$

Αντικατάσταση στις λύσεις που υπολογίσαμε και επίλυση των εξισώσεων δίνει:

$$c_1 = c_2 = 0, c_3 = -2.697, c_4 = -2.422$$

$$x_1^*(t) = 2.697t - 2.422 + 2.560e^{-t} - 0.137e^{t}$$

$$x_2^*(t) = 2.697 - 2.560e^{-t} - 0.137e^{t}$$

Ασκήση 1 (Homework)

Άσκηση 1: Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

και θέλουμε το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(u) = \int_0^2 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

αν $x(0) = 0$ και θέλουμε για $t_f = 2$ το σύστημα να οδηγηθεί στην $x_1^2(t) + x_2^2(t) = 1$.

Άσκηση 2 (Homework)

Άσκηση 2: Να βρεθεί ο βέλτιστος έλεγχος του συστήματος

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$$

που ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης

$$J(u) = \frac{1}{2}Hx^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4}u^2(t)dt$$

T είναι γνωστό, $H > 0$, $x(T)$ είναι ελεύθερο.

Άσκηση 3 (Homework)

Άσκηση 3: Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 3u(t)$$

Να βρεθεί το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(u) = \frac{1}{2}x_1^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} u^2(t)dt$$

αν $x(0) = [0 \quad 1]^T$ και $x(t_f)$ ελεύθερο.

Άσκηση 4 (Homework) (1)

Άσκηση 4: Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 3u(t)$$

Να βρεθεί το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(u) = \frac{1}{2}F_{11}\left(x_1(t_f) - 4\right)^2 + \frac{1}{2}F_{22}\left(x_2(t_f) - 2\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\{x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + 4u^2(t)\}dt$$

αν $x(0) = [0 \quad 1]^T$ και

Άσκηση 4 (Homework) (2)

a) $F_{11} = 0, F_{22} = 0, t_f = 2, x(2) = [4 \quad 6]^T.$

b) $F_{11} = 3, F_{22} = 5, x\left(t_f\right) = [4 \quad 6]^T, t_f\ free.$

c) $F_{11} = 0, F_{22} = 0, x_1(2) = free, x_2(2) = 6.$

d) $F_{11} = 3, F_{22} = 5, x_1\left(t_f\right) = 4, x_2\left(t_f\right)$ ανήκει στην καμπύλη $\theta(t) = -5t + 15.$

Επίλυση Άσκησης 2 (Homework) (1)

Σύστημα διαφορικών εξισώσεων: $\dot{x} = ax + u$

Συναρτησιακό:

$$J(u) = \frac{1}{2}Hx^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4}u^2(t)dt$$

T είναι γνωστό, $H > 0$, $x(T)$ είναι ελεύθερο.

$$H(x,u) = \frac{1}{4}u^2(t) + p(t)(ax(t) + u(t)\ )$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{x} = ax + u$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{p} = -ap$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} \Rightarrow \frac{2u}{4} + p = 0 \Rightarrow u = -2p$$

Επίλυση Άσκησης 2 (Homework) (2)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix}}_{\dot{\omega}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & -a \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\omega(t)}$$

$$T\ \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{o} \Rightarrow \delta t_f = 0$$

$$x(T) free \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} - p^* = 0$$

$$\frac{1}{2} * 2Hx^*(T) - p^*(T) = 0 \Rightarrow \boxed{p^*(T) = Hx^*(T)}$$

$$\omega(t_f) = e^{At_f}\omega(0) \Rightarrow \omega(0) = e^{-At_f}\omega(t_f)$$

$$\omega(t) = e^{At}\omega(0) = e^{At}e^{-At_f}\omega(t_f) = e^{A(t-t_f)}\omega(t_f)$$

Επίλυση Άσκησης 2 (Homework) (3)

$$\omega(t_f) = \begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ p^*(t_f) \end{bmatrix} = e^{A(t_f - t)}\omega(t)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a(t_f - t)} & \frac{1}{a}\left[e^{-a(t_f - t)} - e^{a(t_f - t)}\right] \\ 0 & e^{-a(t_f - t)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix}$$

$$p^*(t_f) = e^{-a(t_f - t)}p^*(t) = Hx^*(t_f) \Rightarrow$$

$$e^{-a(t_f - t)}p^*(t) = H\left\{e^{a(t_f - t)}x^*(t) + \frac{1}{a}\left[e^{-a(t_f - t)} - e^{a(t_f - t)}\right]p^*(t)\right\}$$

$$\Rightarrow$$

Επίλυση Άσκησης 2 (Homework) (4)

$$\left[e^{-a(t_f-t)}-\frac{H}{a}e^{-a(t_f-t)}+\frac{H}{a}e^{a(t_f-t)}\right]p^*(t)=He^{a(t_f-t)}x^*(t)$$

$\Rightarrow$

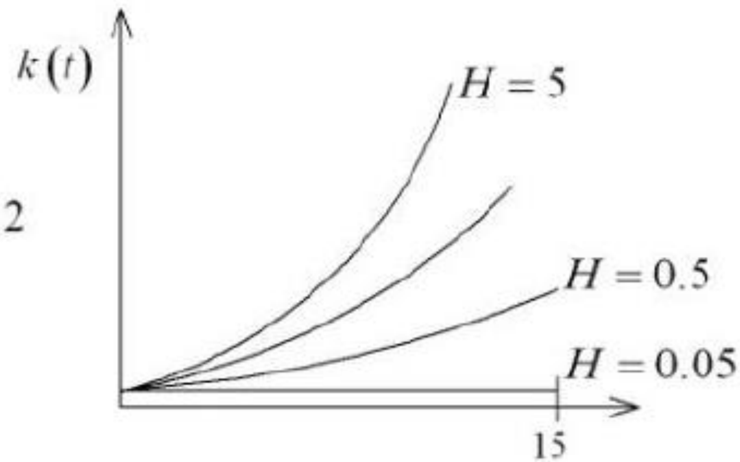
$$p^*(t)=\frac{He^{a(t_f-t)}}{\left(1-\frac{H}{a}\right)e^{-a(t_f-t)}+\frac{H}{a}e^{a(t_f-t)}}x^*(t)$$

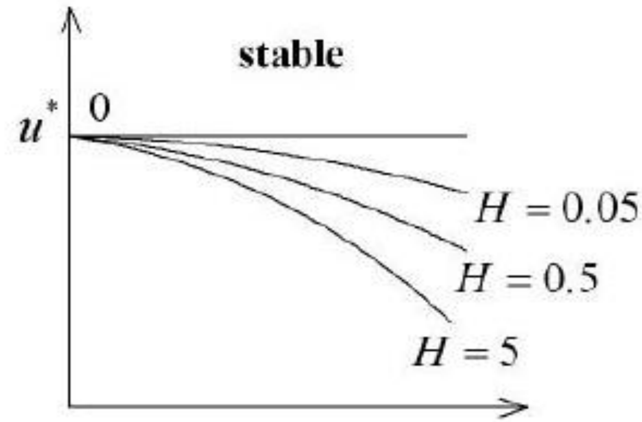
$$u^*(t)=-2p^*(t)=-\frac{2He^{a(t_f-t)}}{\left(1-\frac{H}{a}\right)e^{-a(t_f-t)}+\frac{H}{a}e^{a(t_f-t)}}x^*(t)$$

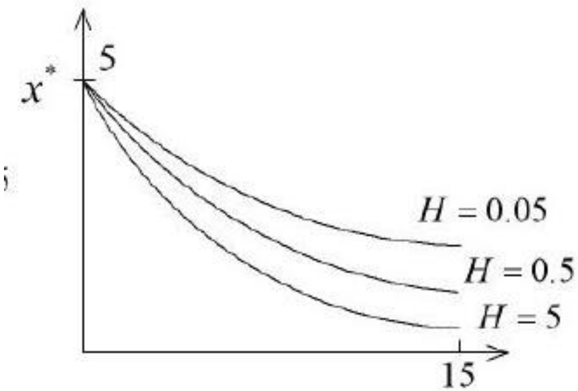
Επίλυση Άσκησης 2 (Homework) (5)

T=15

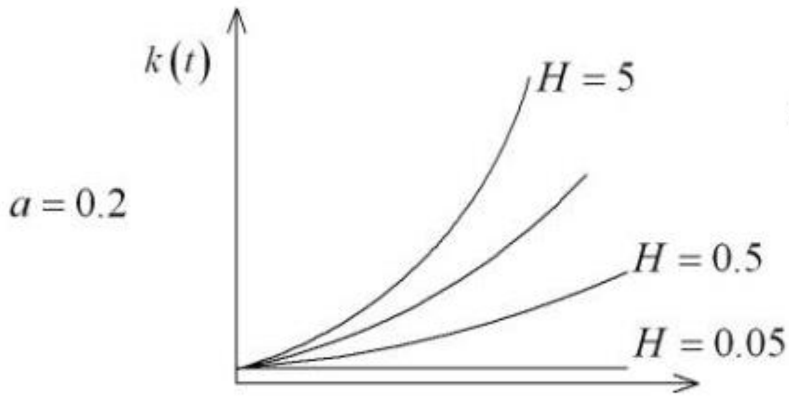
$a = -0.2$

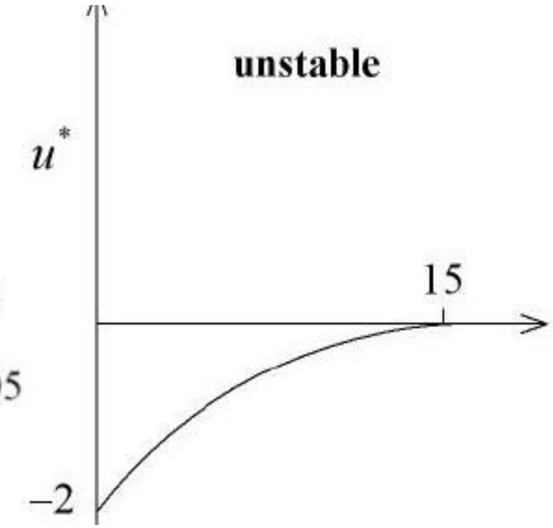


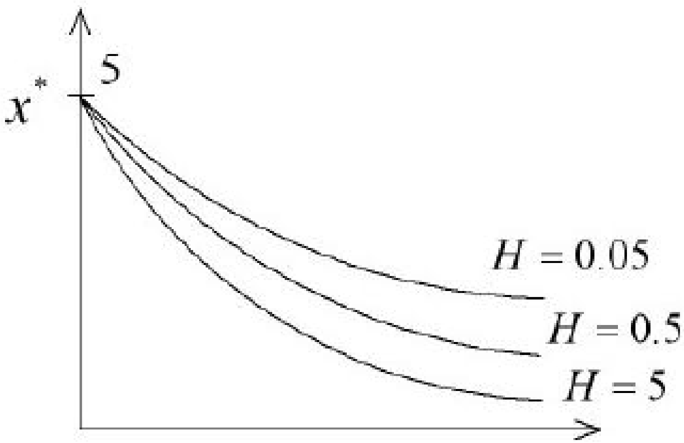




Επίλυση Άσκησης 2 (Homework) (6)







Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα για Ιδιόμορφα Συστήματα (1)

Έστω

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T Q x + u^T R u]dt$$

$Q \geq 0, R > 0.$

$$F_a \coloneqq \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T[Ax + Bu - E\dot{x}]$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}\right] = 0 = Qx + A^T\lambda + \frac{d}{dt}[E^T\lambda] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E^T\dot{\lambda} = -Qx - A^T\lambda}$$

Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα για Ιδιόμορφα Συστήματα (2)

$$F_a \coloneqq \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T[Ax + Bu - E\dot{x}]$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{u}}\right] = 0 = Ru + B^T\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = -R^{-1}B^T\lambda$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E} & 0 \\ 0 & \mathrm{E}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$$

Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα για Ιδιόμορφα Συστήματα (3)

Αν $\lambda(t) = SEx(t)$ τότε

$$\dot{\lambda}(t) = SE\dot{x}(t) = S(Ax(t) - BR^{-1}B^T\lambda(t)) =$$

$$= [SA - BR^{-1}B^TSE]x(t)$$

$$E^T\dot{\lambda}(t) = -Qx - A^T\lambda = -Qx - A^TSEx = [-Q - A^TSE]x(t)$$

$$E[SA - BR^{-1}B^TSE] = -Q - A^TSE$$

$$\boxed{E^TSA + A^TSE - E^TBR^{-1}B^TSE + Q = 0}$$

Βιβλιογραφία

- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.
- D.E. Kirk, 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. S. Naidu, 2002, Optimal Control Systems, CRC Press LLC.
- M. Athans and P. Falb, 1966 (καθώς και 1994 και 2007), Optimal Control : An Introduction to the Theory and its Applications, McGraw Hill Book Company, New York, NY.
- D. G. Hull, 2003, Optimal Control Theory for Applications, Mechanical Engineering Series, Springer.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου. Ενότητα 9: Εφαρμογές του Λογισμού των Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS288/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης