Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ασκήσεις

Νικόλαος Καραμπετάκης
Τμήμα Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα

Ενότητα 1η: Από τον Λογισμό των Μεταβολών στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 2η: Εισαγωγή στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

1) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

στην τριγωνική πλάκα, στο πρώτο τεταρτημόριο που περιορίζεται από τις ευθείες $x = 0, y = 0, y = 9 - x$.

– Οδηγίες επίλυσης

2) Να ελαχιστοποιηθεί η τετραγωνική συνάρτηση κόστους

$$J(x, u) = \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, f \in \mathbb{R}^n, Q \geq 0, R > 0$$

όπου ο πίνακας Q(θετικά ημιορισμένος) και ο πίνακας R(θετικά ορισμένος) είναι συμμετρικοί πίνακες. Τα x, u υπόκεινται στον παρακάτω περιορισμό:

$$f(x, u) = x + Bu + c = 0$$

Εφόσον επιλύσετε την παραπάνω άσκηση, να εφαρμόσετε τα αποτελέσματα για

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

– Οδηγίες επίλυσης

Ενότητα 3η: Ακρότατα συναρτήσεων μίας ή πολλών μεταβλητών

Ενότητα 4η: Εισαγωγή στο Λογισμό Μεταβολών

1) Να δειχθεί ότι η

$$\|\cdot\|_w : C^1[a, b] \to \mathbb{R}, \|x\|_w = sup_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\} + sup_{t\in[a,b]}\{|x'(t)|\}$$

αποτελεί νόρμα στο $C^1[a, b]$.

– Οδηγίες επίλυσης

2) Να δειχθεί ότι η

$$\|\cdot\|_1 : C[a,b] \to \mathbb{R}^+, \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt$$

αποτελεί νόρμα στο $C^1[a,b]$.

Ενότητα 5η: Ακρότατα συναρτησιακών μιας συνάρτησης

1) Να ελέγξετε τις συνθήκες Legendre-Jacobi για τις δύο καμπύλες του Παραδείγματος της Ενότητας 4.

- Οδηγίες επίλυσης

2) Να υπολογισθεί το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού :

$$J\big(x(t)\big) = \int_1^2 (x^2(t) + \dot{x}(t)^2) dt$$

όταν $x(0) = 1, x(1) = 2$.

- Οδηγίες επίλυσης

3)

i) Να υπολογισθεί το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού :

$$J(x) = \int_1^2 t^2 \dot{x}(t)^2\, dt$$

όταν $x(1) = 1, x(2) = \frac{1}{2}$. Υπάρχει σχετικό ακρότατο $x^* \in C^2[1,2]$ στην περίπτωση που οι συνοριακές συνθήκες είναι $x(1) = 1, x(-2) = -\frac{1}{2}$;

ii) Δίνεται το συναρτησιακό :

$$J(x) = \int_{-1}^1 t^4 \dot{x}(t)^2\, dt$$

Υπάρχει σχετικό ακρότατο $x \in C^2[-1,1]$ στην περίπτωση που οι συνοριακές συνθήκες είναι $x(-1) = -1, x(1) = 1$;

- Οδηγίες επίλυσης

4) Να υπολογισθούν τα ακρότατα των συναρτησιακών :

i) $J(x) = \int_a^b \frac{\dot{x}(t)^2}{t^3} dt$

ii) $J(x) = \int_a^b (x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + 2x(t)e^t) dt$

iii) $J(x) = \int_a^b \left(x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + 2x(t)sin(t)\right)dt$

iv) $J(x) = \int_a^b \left(x(t)^2 - \dot{x}(t)^2 - 2x(t)sin(t)\right)dt$

v) $J(x) = \int_a^b \left(x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 - 2x(t)cosh(t)\right)dt$

5) Να υπολογισθούν τα ακρότατα των συναρτησιακών :

i) $J(x) = \int_0^1 (x(t) - \sin(t))^2 dt$

ii) $J(x) = \int_0^1 (\dot{x}(t) - \cos(t))^2 dt\, , x(0) = 1, x(1) = 0.$

iii) $J(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}(\dot{x}(t)^2 - w^2 x(t)^2)dt$

6) Δείξτε ότι αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί η συνάρτηση $x^* \in C^2[a,b]$ ακρότατο του συναρτησιακού:

$$J(x) = \int_a^b F\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)\right)dt$$

δεδομένου ότι είναι γνωστά, τα $a, b, x(a) = x_a, x(b) = x_b, \dot{x}(a) = x_1^a, \dot{x}(b) = x_b^1$, είναι να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) = 0$$

Ενότητα 6η: Ακρότατα συναρτησιακών διανυσματικών συναρτήσεων.

1) Να υπολογισθεί το ακρότατο του συναρτησιακού :

$$J(x_1, x_2) = \int_0^1 \left(\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2 + x_1(t)^2\right)dt$$

όπου $x_1(0) = x_2(0) = 0$ και $x_1(1) = x_2(1) = 1$.

2) Να υπολογίσετε το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού :

$$J = \int_0^{t_f} \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left\{x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)\right\} + p(t)^T\left(\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t)\right)\right]}_{F\left((x(t),u(t),p(t)),(\dot{x}(t),\dot{u}(t),\dot{p}(t)),t\right)}dt$$

αν τα $t_0, x(t_0)$ είναι γνωστά, τα $t_f, x(t_f)$ άγνωστα και ανεξάρτητα, ο πίνακας Q είναι συμμετρικός θετικά ημιορισμένος, ενώ ο πίνακας R συμμετρικός θετικά ορισμένος.
Σημείωση. Να περιγράψετε μόνο τις εξισώσεις στις οποίες θα καταλήξουμε.

3) Να υπολογίσετε το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού :

$$J(x_1,x_2,x_3)=\int_0^{t_f}\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3(t)\left(\dot{x}_1(t)+x_1(t)-x_2(t)\right)\right)dt$$

όπου $x_1(0)=5, x_1(t_f)=0$ και t_f άγνωστο. Να υπολογισθεί επίσης το t_f.

4) Να υπολογίσετε τα σχετικά ακρότατα των παρακάτω συναρτησιακών, που προκύπτουν από την Αρχή του Hamilton σε προβλήματα της Κλασικής Μηχανικής :

(α) Αρμονικός ταλαντωτής

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2-\frac{1}{2}kx(t)^2\right)dt$$

(β) Απλό εκκρεμές

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\dot{x}(t)^2-mg\left(\ell-\ell\cos\left(x(t)\right)\right)\right)dt \text{ αν ισχύει } \sin\left(x(t)\right)\approx x(t)$$

(γ) Κίνηση σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων

$$J(x_1,x_2)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1(t)^2+x_1(t)^2\,\dot{x}_2(t)^2\right)+\frac{k}{x_1(t)}\right)dt$$

5) Να δείξετε ότι τα συναρτησιακά

α) $J:C^2[-1,1]\to\mathbb{R}$ όπου $J(x)=\int_{-1}^{1}t\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}\,dt$

β) $J:C^2[0,\ell]\to\mathbb{R}$ όπου $J(x)=\int_0^{\ell}\left(\dot{x}(t)^2-x(t)^2\right)dt$, $x(0)=0$, $x(\ell)=\pi$, $\ell>\pi$,

δεν έχουν τοπικά ακρότατα.

Ενότητα 7η: Συναρτησιακά καμπύλων με ασυνέχεια στις παραγώγους.

1) Να βρεθεί η καμπύλη ελαχίστου μήκους που ενώνει τα σημεία $x(-1)=0=x(1)$ και έχει ασυνέχεια της παραγώγου σ' ένα σημείο της καμπύλης $\theta(t)=t^2$, $t\in[-1,1]$.

2) Να προσδιορισθεί το ακρότατο του συναρτησιακού :

$$J(x)=\int_0^2\left(\dot{x}(t)-1\right)^2\left(\dot{x}(t)+1\right)^2dt$$

όταν η παράγωγος $\dot{x}(t)$ διαθέτει ένα σημείο ασυνέχειας στο διάστημα [0,2], και ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες $x(0)=0, x(2)=1$.

Ενότητα 8η: Συναρτησιακά καμπύλων οι οποίες υπόκεινται σε δεσμούς.

1) Να βρεθούν οι αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχει σχετικό ακρότατο το συναρτησιακό

$$J(x_1, x_2, u) = \frac{1}{2}\int_0^1 [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)]dt$$

όταν τα $x_i(t), i = 1{,}2$ ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

και επιπλέον $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$.

2) Να βρεθούν οι αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχει σχετικό ακρότατο το συναρτησιακό

$$J\left(x_1, x_2, u\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(x_1(t) - 1\right)^2 + \left(x_2(t) - 1\right)^2 + u^2(t)\right]dt$$

όταν τα $x_i(t), i = 1, 2$ ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

και επιπλέον $x_1(0) = 0 = x_2(0)$.

3) (**Πρόβλημα αλυσίδας**) Να υπολογίσετε καμπύλη $x \in \left(C^2\left[t_0, t_f\right], \|\cdot\|_w\right)$ δοθέντος μήκους *l*, η οποία να περνά από τα σημεία $\left(t_0, x(t_0)\right), \left(t_f, x(t_f)\right)$ και της οποίας το κέντρο βάρους να βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση ή ισοδύναμα να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του συναρτησιακού

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)\left(1 + \dot{x}(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

δεδομένου ότι $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ και το μήκος της καμπύλης δίνεται από τη συνθήκη

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(1 + \dot{x}(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = l$$

4) (**Γεωδαισιακό πρόβλημα**) Να υπολογισθεί το ακρότατο του συναρτησιακού :

$$J(x, y, z) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

όταν ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 - R\right) dt = 0$$

Θέλουμε δηλαδή να υπολογίσουμε την παραμετρική εξίσωση $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ της καμπύλης που ενώνει μέσω του πιο σύντομου δρόμου δύο σημεία $\left(x(t_0),y(t_0),z(t_0)\right)$ και $\left(x(t_f),y(t_f),z(t_f)\right)$ της σφαίρας $x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2=R$.

5) Να υπολογίσετε καμπύλη $x\in\left(C^2\left[t_0,t_f\right],\|\square\|_w\right)$, η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$J(x)=\int_0^1 \dot{x}(t)^2dt$$

δεδομένου ότι $x(0)=0, x(1)=0$ και $\int_0^1 x(t)dt=l$.

6) Να υπολογίσετε καμπύλη $x\in\left(C^2\left[t_0,t_f\right],\|\square\|_w\right)$, η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$J(x)=\int_0^1 x(t)\dot{x}(t)^2dt$$

δεδομένου ότι $x(0)=1, x(1)=2$ και $\int_0^1 x(t)^2dt=3$.

7) **<u>Πρόβλημα</u>**: Δίνεται σύστημα που περιγράφεται από το σύστημα δ.ε.

$$\Bigg[\underbrace{A_0+A_1\rho+\cdots+A_q\rho^q}_{A(\rho)}\Bigg]\beta(t)=\Bigg[\underbrace{B_0+B_1\rho+\cdots+B_q\rho^q}_{B(\rho)}\Bigg]u(t)$$

$$\rho\coloneqq\frac{d}{dt}, A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}, B_i\in\mathbb{R}^{n\times m}$$

Να βρεθούν τα σχετικά ακρότατα του συναρτησιακού

$$J(\beta,u)=\int_0^t\frac{1}{2}(\beta^TQ\beta+u^TRu)dt$$

όπου $Q\geq 0, R>0$.

Σημείωση: Κυβεντίδης (σελ.84)

Επίσης για

$$J(\omega,v)=\int_0^t\frac{1}{2}(\omega^TQ\omega+v^TRv)dt$$

$$\omega^T(t)=[\beta(t)\quad \beta^{(1)}(t)\quad \dots\quad \beta^{(q-1)}(t)]$$

$$v^T(t)=[u(t)\quad u^{(1)}(t)\quad \dots\quad u^{(q-1)}(t)]$$

Ενότητα 9η: Εφαρμογές του Λογισμού των Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο.

1) Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

και θέλουμε το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

αν $x(0) = 0$ και θέλουμε για $t_f = 2$ το σύστημα να οδηγηθεί στην $x_1^2(t) + x_2^2(t) = 1$.

2) Να βρεθεί ο βέλτιστος έλεγχος του συστήματος

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$$

που ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης

$$J(u) = \frac{1}{2}Hx^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4}u(t)^2\,dt$$

T είναι γνωστό, $H > 0$, $x(T)$ είναι ελεύθερο.

3) Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 3u(t)$$

Να βρεθεί το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(u) = \frac{1}{2}x_1^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} u(t)^2\,dt$$

αν $x(0) = [0 \quad 1]^T$ και $x(t_f)$ ελεύθερο.

4) Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 3u(t)$$

Να βρεθεί το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(u) = \frac{1}{2}F_{11}\left(x_1(t_f) - 4\right)^2 + \frac{1}{2}F_{22}\left(x_2(t_f) - 2\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\{x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + 4u(t)^2\}dt$$

αν $x(0) = [0 \quad 1]^T$ και

a) $F_{11} = 0, F_{22} = 0, t_f = 2, x(2) = [4 \quad 6]^T$

b) $F_{11} = 3, F_{22} = 5, x(t_f) = [4 \quad 6]^T, t_f$ ελεύθερο

c) $F_{11} = 0, F_{22} = 0,\ x_1(2)\ free,\ x_2(2) = 6$

d) $F_{11} = 3, F_{22} = 5, x_1(t_f) = 4$ και $x_2(t_f)$ ανήκει στην καμπύλη $\theta(t) = -5t + 15$.

Ενότητα 10η: Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα.

1) Να υπολογιστεί το ακρότατο του συναρτησιακού

$$J\left(x,u,t\right)=\frac{1}{2}x^T\left(t_f\right)Hx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix}x^T & u^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & S\\ S^T & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}dt$$

υπό τις συνθήκες

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

Ενότητα 11η: Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένη είσοδο-Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

1) Άσκηση (εξετάσεις 2003)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

Ιδιοτιμές $\{-2,2\}$, ασταθές και ελέγξιμο.

Θέλουμε να μεταφέρουμε το σύστημά μας από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $x(0)=[x_1(0) \quad x_2(0)]^T$ στην μηδενική κατάσταση στον ελάχιστο δυνατό χρόνο

a) Όταν η είσοδος δεν είναι φραγμένη.

b) Όταν $|u(t)|\leq 1$.