ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 5: Ακρότατα συναρτησιακών μιας συνάρτησης

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα

- Διατύπωση **ικανών** (Legendre - Jacobi) **και αναγκαίων** (Euler - Lagrange) **συνθηκών** για την εύρεση τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού το οποίο εξαρτάται από μια συνάρτηση μιας μεταβλητής x(t) και την παράγωγο της π.χ. J(t,x(t),x’(t)).
- **Συνθήκες εγκαρσιότητας** που πρέπει να πληρούνται από τις αρχικές και τις τελικές συνθήκες της συνάρτησης x(t) ώστε να έχει ακρότατο το συναρτησιακό J(t,x(t),x’(t)).
- Επίλυση του **βραχυστόχρονου προβλήματος** (brachistochrone problem) και του **προβλήματος της αλυσίδας** (hanging chain or catenary problem).

Σκοποί Ενότητας

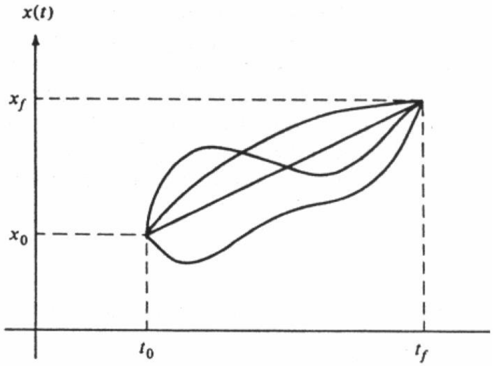
- Διατύπωση ***αναγκαίων συνθηκών*** Euler-Lagrance για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού.
- Διατύπωση ***ικανών συνθηκών*** Legendre-Jacobi για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού.
- Τερματική συνθήκη/ες ή **συνθήκη/ες εγκαρσιότητας** και μελέτη ειδικών περιπτώσεων.
- Επίλυση βραχυστόχρονου προβλήματος (brachistochrone problem).
- Επίλυση του προβλήματος αλυσίδας (hanging chain or catenary problem).

Πρόβλημα 1

Έστω $x(t)$ συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση $x^*(t)$ για την οποία το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) dt$$

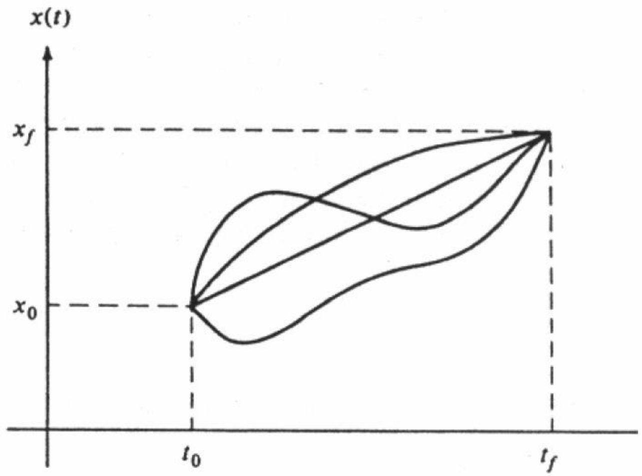
έχει σχετικό ακρότατο.



Υπόθεση:

1. Η F έχει πρώτη και δεύτερη μερική παράγωγο ως προς $x, \dot{x}, t$.
2. Έστω $x(t_0) = x_0, x\big(t_f\big) = x_f, t_0, t_f$ συγκεκριμένα.

Παράδειγμα 1



Να βρεθεί η συνάρτηση $x^*(t)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_1^3 [1 + [\dot{x}(t)]^2]^{1/2} dt, x(1) = 1, x(3) = 3$$

Αναγκαίες συνθήκες Euler-Lagrange

Θεώρημα Έστω το συναρτησιακό $J: \left(C^2[t_0, t_f], \|\cdot\|\right) \to \mathbb{R}$ με

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) dt$$

όπου $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ και έστω ότι η συνάρτηση F είναι κλάσης C^2 ως προς $t, x, \dot{x}$ (έχει δηλαδή συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς $t, x, \dot{x}$).

Εάν το συναρτησιακό J δέχεται ακρότατο στη συνάρτηση

$$x^* \in C^2[t_0, t_f]$$

Απόδειξη (1)

τότε θα ικανοποιείται **η διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) = 0, \forall t \in \left[t_0, t_f\right]$$

Απόδειξη

$$\Delta \mathrm{J}(x, \delta x) = J(x + \delta x) - J(x) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f}\left[F\left(t, x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t)\right) - F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\right]dt$$

Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor της

$$F\left(t, x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t)\right)$$

Απόδειξη (2)

στο $\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)$ είναι

$$F\left(t, x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t)\right) =$$

$$= F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)$$

$$+ \frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\delta x(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\delta \dot{x}(t)\right\}$$

$$+ \frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\left(\delta x(t)\right)^2 + 2\delta x(t)\delta \dot{x}(t)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\right.$$

Απόδειξη (3)

- Αντικατάσταση στην $\Delta J(x, \delta x)$ και διατήρηση του γραμμικού μέρους $\left(\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] \Rightarrow \delta\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[\delta x(t)]\right)$

$$\delta J(x, \delta x) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\delta\dot{x}(t)}_{\int_{t_0}^{t_f} f\dot{y} = fy|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} y\dot{f}} \right\} \mathrm{dt}$$

$$=$$

Απόδειξη (4)

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\delta x(t)\right]_{t_0}^{t_f} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{\frac{\partial F}{\partial x}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\right]\right\} \delta x(t) dt$$

Επειδή από την υπόθεση $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ προκύπτει

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\delta x(t)\right]_{t_0}^{t_f} =$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\right]_{t=t_f} \delta x(t_f) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\right]_{t=t_0} \delta x(t_0) = 0$$

Απόδειξη (5)

Συνεπώς η πρώτη μεταβολή θα έχει την μορφή

$$\delta J(x,\delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) \right] \right\} \delta x(t) dt$$

Συνεπώς αναγκαία συνθήκη ακρότατου του συναρτησιακού είναι η παρακάτω

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) \right] \right\} \delta x(t) dt = 0$$

Η παραπάνω σχέση, σύμφωνα με το λήμμα που δείξαμε ισχύει για κάθε $\delta x \in C^2\left[t_0, t_f\right]$ που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\delta x(t_0) = \delta x\left(t_f\right) = 0 \text{ ανν}$$

Απόδειξη (6)

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right)\right] = 0$$

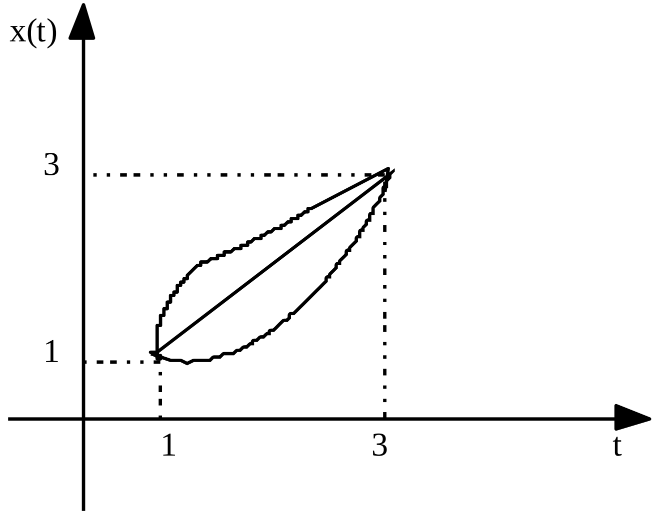
Διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange

Παράδειγμα 1: Ελάχιστη απόσταση μεταξύ σημείων (1)

Να βρεθεί συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_1^3 [1 + [\dot{x}(t)]^2]^{1/2} dt,$$

και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $x(1) = 1, x(3) = 3$.



Παράδειγμα 1: Ελάχιστη απόσταση μεταξύ σημείων (2)

Από

$$\frac{\partial F}{\partial x}\big(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\big)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\big)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}[1+[\dot{x}^*(t)]^2]^{\frac{1}{2}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}[1+[\dot{x}^*(t)]^2]^{\frac{1}{2}}\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}[1+[\dot{x}^*(t)]^2]^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}[1+[\dot{x}^*(t)]^2]^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

Παράδειγμα 1: Ελάχιστη απόσταση μεταξύ σημείων (3)

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{2\dot{x}^*(t)}{2\sqrt{1+[\dot{x}^*(t)]^2}}\right]=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}^*(t)}{\sqrt{1+[\dot{x}^*(t)]^2}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{x}^*(t)}{\sqrt{1+[\dot{x}^*(t)]^2}}=c \Leftrightarrow \frac{[\dot{x}^*(t)]^2}{1+[\dot{x}^*(t)]^2}=c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\dot{x}^*(t)]^2=c^2[1+[\dot{x}^*(t)]^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\dot{x}^*(t)]^2=\frac{c^2}{1-c^2} \Leftrightarrow \dot{x}^*(t)=\pm\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} \equiv c_1 \Leftrightarrow$$

$$x^*(t)=c_1 t+c_2$$

Παράδειγμα 1: Ελάχιστη απόσταση μεταξύ σημείων (4)

Για να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να έχουμε

- $x^*(1) = 1 = c_1 + c_2$
- $x^*(3) = 3 = 3c_1 + c_2$

Άρα $c_1 = 1, c_2 = 0$.

Συνεπώς έχουμε πιθανό σχετικό ακρότατο (λόγω αναγκαίας συνθήκης) στην καμπύλη $x^*(t) = t$ η οποία είναι η ευθεία η οποία ενώνει τα σημεία $x^*(1) = 1, x^*(3) = 3$.

Είναι όμως τοπικό ελάχιστο;

<u>Η συνθήκη Euler-Lagrange είναι αναγκαία και όχι ικανή!</u>

Ικανές συνθήκες Legendre-Jacobi

Θεώρημα: Ας υποθέσουμε ότι το συναρτησιακό $J: \left(C^2\left[t_0, t_f\right], \|\cdot\|_w\right) \to \mathbb{R}$ με

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt$$

δέχεται ακρότατο στην συνάρτηση $x^* \in C^2\left[t_0, t_f\right]$.

Η άκρα καμπύλη x^* δίνει **ασθενές** σχετικό ελάχιστο (μέγιστο) στο συναρτησιακό J όταν επαληθεύει τις 2 παρακάτω αυστηρές συνθήκες των Legendre και Jacobi:

1. Αυστηρή συνθήκη του Legendre

- **Σχετικό Ελάχιστο**

$$R(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) > 0, \forall t \in \left[t_0, t_f\right]$$

- **Σχετικό Μέγιστο**

$$R(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) < 0, \forall t \in \left[t_0, t_f\right]$$

2. Αυστηρή συνθήκη του Jacobi

Έστω $P(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big)$

$$Q(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big)$$

$$R(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big)$$

Θα πρέπει η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\left(P(t) - \frac{d}{dt}Q(t)\right)u(t) - \frac{d}{dt}[R(t)\dot{u}(t)] = 0, u(t_0) = 0, \dot{u}(t_0) = 1$$

να μην μηδενίζεται στο $\big(t_0, t_f\big], \pi. \chi.\ u(t) \neq 0, \forall t \in \big(t_0, t_f\big]$.

Ισχυρό σχετικό ελάχιστο (μέγιστο)

Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για **ισχυρό** σχετικό ελάχιστο (μέγιστο) θα πρέπει να προστεθούν και άλλες επιπλέον συνθήκες οι οποίες διατυπώθηκαν από τον Weierstrass.

Παράδειγμα 1: Συνθήκη Legendre (1)

Να βρεθεί η συνάρτηση $x^* \in C^1[1,3]$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_1^3 \underbrace{[1 + [\dot{x}(t)]^2]^{1/2}}_{F(\dot{x}(t))} dt,$$

και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $x(1) = 1, x(3) = 3$.

Η $J(x)$ έχει πιθανό σχετικό ακρότατο στην καμπύλη $x^*(t) = t$.

Από την αυστηρή συνθήκη Legendre θα έχουμε

$$R(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) = \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2}\Big[[1 + [\dot{x}(t)]^2]^{1/2}\Big]$$

Παράδειγμα 1: Συνθήκη Legendre (2)

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{\dot{x}^*(t)}{\sqrt{1+[\dot{x}^*(t)]^2}}\right]_{x(t)=x^*(t)} =$$

$$= \frac{1\sqrt{1+[\dot{x}^*(t)]^2} - \dot{x}^*(t)\dfrac{2\dot{x}^*(t)}{2\sqrt{1+[\dot{x}^*(t)]^2}}}{1+[\dot{x}^*(t)]^2} =$$

$$= \frac{1}{[1+[\dot{x}^*(t)]^2]^{3/2}} = \frac{1}{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{3/2}} > 0$$

και συνεπώς επειδή $\mathrm{R}(t) = \frac{1}{2^{3/2}} > 0$ θα έχουμε πιθανό σχετικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 1: Συνθήκη Jacobi

Για το $J(x) = \int_1^3 \underbrace{[1 + [\dot{x}(t)]^2]^{1/2}}_{F(\dot{x}(t))} dt,$

έχουμε

$$P(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) = 0$$
$$Q(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) = 0$$
$$R(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right) = \frac{1}{2^{3/2}}$$

Οπότε

$$\left(P(t) - \frac{d}{dt}Q(t)\right)u(t) - \frac{d}{dt}[R(t)\dot{u}(t)] = 0 \Rightarrow$$

Παράδειγμα 1: Συνθήκη Jacobi συνέχεια

$$\left(0-\frac{d}{dt}0\right)u(t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\dot{u}(t)\right]=0\Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2^3}}\ddot{u}(t)\right]=0\Rightarrow u(t)=c_1t+c_2$$

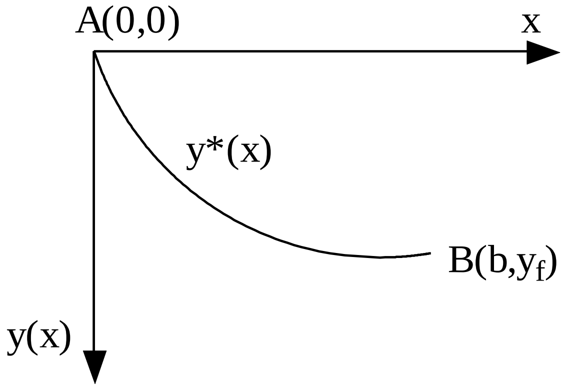
$$\begin{cases} u(1)=0=c_1+c_2 \\ \dot{u}(1)=1=c_1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c_1=1 \\ c_2=-1 \end{cases}$$

και άρα η λύση είναι η $\mathrm{u}(t)=t-1\neq 0, \forall t\in(1,3]$.

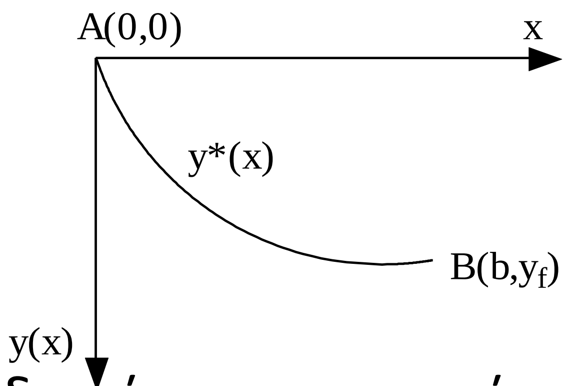
Συνεπώς ικανοποιείται η αυστηρή συνθήκη του Jacobi και η $x^*(t)=t$ αποτελεί ασθενές σχετικό ελάχιστο για το συναρτησιακό μας .

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (1)

Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε μια καμπύλη $y^* \in C^1$ που ενώνει τα σημεία A,B υπό την επίδραση της βαρύτητας. Ποιο είναι το σχήμα της καμπύλης που ελαχιστοποιεί τον χρόνο κατάβασης;



Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (2)

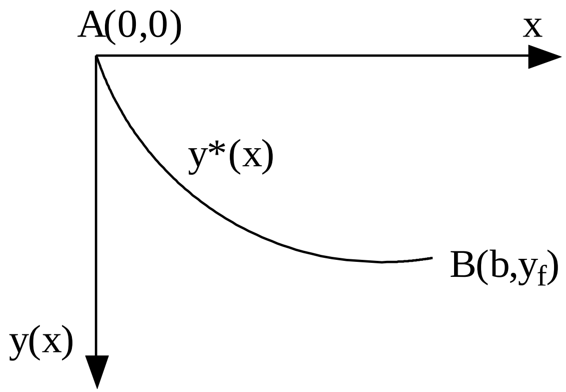


Λύση Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε ότι η κινητική ενέργεια στην θέση Β θα είναι ίση με την δυναμική ενέργεια στην θέση Α

$$\frac{1}{2}mu(t)^2 = mgv(x) \Rightarrow u(t) = \sqrt{2gv(x)} = \frac{ds}{dt}$$

- Εάν Τ είναι ο χρόνος κατάβασης και s το μήκος της καμπύλης,

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (3)



$$T=\int_0^T dt=\int_0^T \frac{dt}{ds}ds=\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2gy(x)}}\sqrt{1+(\dot{y}(x))^2}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^T \underbrace{\frac{(1+\dot{y}(x)^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}}}_{F(y,\dot{y},x)}$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (4)

- Αναγκαίες συνθήκες Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y^*(t), \dot{y}^*(t)\right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\left(x, y^*(t), \dot{y}^*(t)\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1+\dot{y}^*\,(x)^2)^{1/2}}{y^*(x)^{1/2}}\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\frac{(1+\dot{y}^*\,(x)^2)^{\frac{1}{2}}}{y^*(x)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(1+\dot{y}^*\,(x)^2)^{\frac{1}{2}}}{2y^*(x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\dot{y}^*(\mathrm{x})}{y^*(x)^{\frac{1}{2}}(1+\dot{y}^*\,(x)^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \dot{y}^*\,(x)^2 + 2\ddot{y}^*(x)y^*(x) = 0$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (5)

$$\dot{y}^*(x) = p\big(y^*(x)\big) \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow}$$

$$\ddot{y}^*(x) = \frac{\partial p}{\partial y^*} \times \dot{y}^*(x) = \frac{\partial p}{\partial y^*} p\big(y^*(x)\big)$$

$$1 + p^2 + 2p \frac{\partial p}{\partial y^*} y^* = 0 \Leftrightarrow$$

$$2p \frac{\partial p}{\partial y^*} y^* = -(1 + p^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2p\partial p}{p^2 + 1} = -\frac{\partial y^*}{y^*} \overset{y>0}{\Longleftrightarrow}$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (6)

$$\log(p^2+1)+\log(y^*)=c_1 \Leftrightarrow$$

$$\log(y^*(p^2+1))=c_1 \Leftrightarrow$$

$$\log(y^*((\dot{y}^*)^2+1))=c_1 \Leftrightarrow$$

$$y^*((\dot{y}^*)^2+1)=e^{c_1}=c$$

Έστω

$$\dot{y}^*=\frac{1}{\tan(z)}$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (7)

$$y^*\left(\frac{1}{tan^2(z)}+1\right)=c\Rightarrow$$

$$y^*=c\times sin^2(z)=\frac{c}{2}\big(1-cos(2z)\big)$$

$$\frac{dy}{dz}=csin(2z),$$

$$\frac{dy^*}{dx}=\frac{dy^*/dz}{dx/dz}=\frac{1}{tan(z)}$$

$$\frac{dx}{dz}=tan(z)\frac{dy}{dz}=csin(2z)\,tan(z)=2csin(z)\,cos(z)\,\frac{sin(z)}{cos(z)}=$$

$$=2csin^2(z)=\frac{2c}{2}\,(1-cos(2z))$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (8)

$$x(z) = c\int(1-\cos(2z))dz = c\left(z - \frac{\sin(2z)}{2} + c_1\right)$$

$$y^* = \frac{c}{2}(1-\cos(2z))$$

$$x = \frac{c}{2}(2z - \sin(2z)) + c'$$

$$0 \leq z \leq \pi$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (9)

- Οριακές συνθήκες-Υπολογισμός παραμέτρων

$$y^*(0) = 0 \Leftrightarrow x = y^* = 0$$

$$\begin{cases} y^* = \dfrac{c}{2}(1 - \cos(2z)) = 0 \\ x = \dfrac{c}{2}(2z - \sin(2z)) + c' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{c}{2} = \dfrac{c}{2}\cos(2z) \\ \dfrac{c}{2}2z = \dfrac{c}{2}\sin(2z) - c' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = \cos(2z) \vee c = 0 \\ cz = \dfrac{c}{2}\sin(2z) - c' \end{cases} \Rightarrow$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (10)

$$\begin{cases} z = \pm k\pi \vee c = 0 \\ \begin{cases} c(\pm k\pi) = \dfrac{c}{2}\sin(\pm 2k\pi) - c' \Rightarrow \\ \vee\, 0 = 0 - c' \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \pm k\pi \vee c = 0 \\ \begin{cases} c(\pm k\pi) = -c' \quad \Rightarrow \\ \vee\, c' = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \pm k\pi \vee c = 0 \\ \begin{cases} \gamma\iota\alpha\ k = 0\ \varepsilon\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ 0 = c' \Rightarrow \\ \vee\, c' = 0 \end{cases} \end{cases}$$

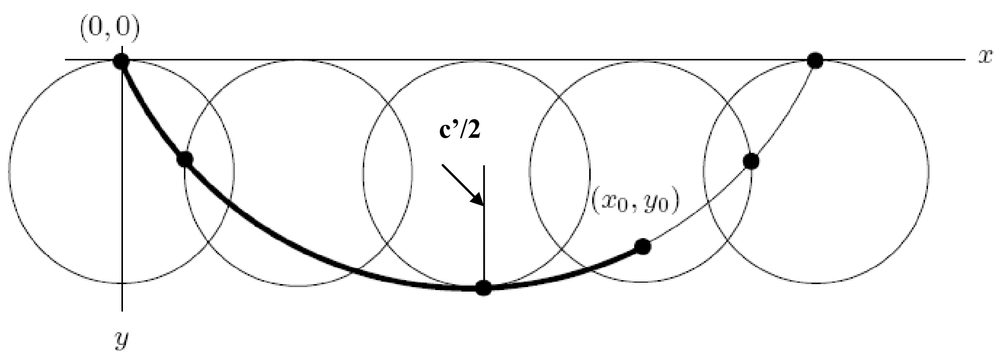
$$c' = 0 \vee c = c' = 0$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (11)

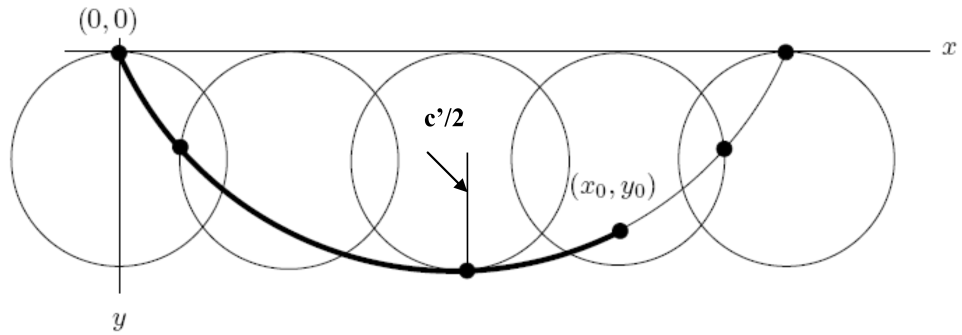
- Αν πάρουμε $c' = 0$ και θέσουμε $\theta = 2z$

$$\begin{cases} y^*(\theta) = \dfrac{c}{2}(1 - \cos(\theta)) \\ x(\theta) = \dfrac{c}{2}(\theta - \sin(\theta)) \end{cases}, 0 \leq \theta < 2\pi$$

όπου $c/2$ είναι η ακτίνα του κυλιόμενου κύκλου.



Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (12)



- Αν για παράδειγμα είχαμε επιπλέον $y(1) = -1$

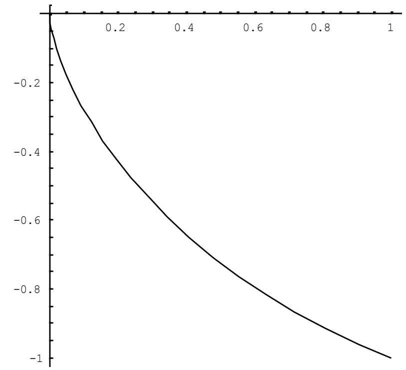
$$\frac{y^*}{x} = \frac{-1}{1} = -1 = \frac{\frac{c}{2}(1-\cos(\theta))}{\frac{c}{2}(\theta-\sin(\theta))} = \frac{1-\cos(\theta)}{\theta-\sin(\theta)} \Rightarrow \theta = -2.41201$$

$$y^* = \frac{c}{2}(1-\cos(\theta)) \Rightarrow c = \frac{2y^*}{1-\cos(\theta)} == \frac{-2}{1-\cos(-2.41201)}$$
$$= -1.14583$$

Βραχυστόχρονο Πρόβλημα (13)

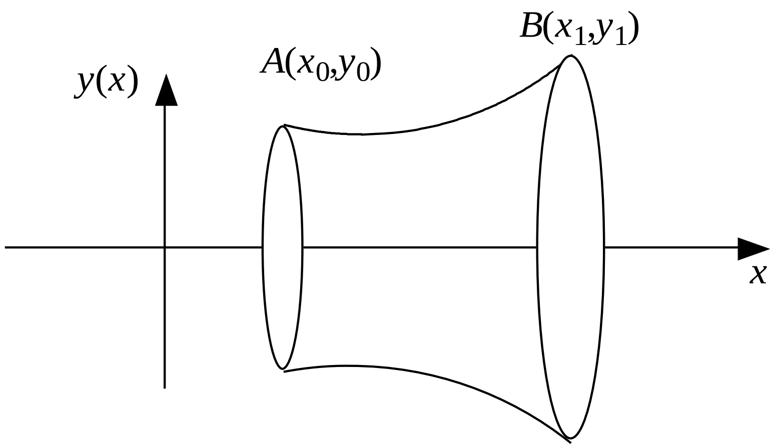
Συνεπώς η παραμετρική οικογένεια που ψάχνουμε θα είχε την μορφή

$$\begin{cases} y^* = -0.5729127(1-\cos(\theta)) \\ x = -0.5729127(\theta - \sin(\theta)) \end{cases}, -2.41201 \leq \theta \leq 0$$



Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (1)

Παράδειγμα: Δοθέντων δύο σημείων $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$ να βρεθεί καμπύλη $y \in C^2[x_0, x_1]$ με $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ που ενώνει τα σημεία Α,Β και η οποία αν περιστραφεί γύρω από τον άξονα των xx’ να δημιουργεί μια επιφάνεια ελαχίστου εμβαδού.



$$J(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_f} \underbrace{y(x)(1 + \dot{y}(x)^2)^{1/2}}_{F(y,\dot{y})} dx$$

Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (2)

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y^*(x), \dot{y}^*(x)\right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\left(x, y^*(x), \dot{y}^*(x)\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^*(x)(1+\dot{y}^*\,(x)^2)^{1/2}\right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(y^*(x)(1+\dot{y}^*\,(x)^2)^{1/2}\right)\right] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(1+\dot{y}^*\,(x)^2)^{1/2} - \frac{d}{dx}\frac{2y^*(x)\dot{y}^*(x)}{2(1+\dot{y}^*\,(x)^2)^{1/2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\dot{y}^*\,(x)^2 - y^*(x)\ddot{y}^*(x) + 1 = 0$$

Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (3)

$$\dot{y}^*(\mathrm{x}) = p\big(y^*(\mathrm{x})\big) \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} \ddot{y}^*(\mathrm{x}) = \frac{\partial p}{\partial y^*}\dot{y}^*(\mathrm{x}) \Rightarrow \ddot{y}^*(\mathrm{x}) = \frac{\partial p}{\partial y^*}p$$

Οπότε

$$\dot{y}^*\,(x)^2 - y^*(x)\ddot{y}^*(\mathrm{x}) + 1 = 0 \Rightarrow p^2 - y^*(x)\frac{\partial p}{\partial y^*}p + 1 = 0$$

$$p^2 + 1 = y^*(x)\frac{\partial p}{\partial y^*}p \Rightarrow \frac{p}{p^2+1}\partial p = \frac{1}{y^*}\partial y^* \Rightarrow$$

$$\int \frac{p}{p^2+1}\partial p = \int \frac{1}{y^*}\partial y^* + c_1 \overset{y>0}{\Longrightarrow}$$

$$\log(p^2+1)^{\frac{1}{2}} - \log\big(y^*(x)\big) = c_1 \xRightarrow{\substack{c_1=\log(c),\\ c>0}}$$

Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (4)

$$\log\left(\frac{(p^2+1)^{\frac{1}{2}}}{y^*}\right) = \log(c) \Rightarrow$$

$$\frac{(p^2+1)^{\frac{1}{2}}}{y^*(x)} = c \Rightarrow$$

$$y^*(x) = \frac{1}{c}(p^2+1)^{\frac{1}{2}} \xRightarrow{c'=1/c}$$

$$y^*(x) = c'(\dot{y}^*(x)^2+1)^{\ 1/2}$$

Όμως $\dot{y}^*(x) = sinh(t)$

$$y^*(t) = c'(sinh(t)^2+1)^{\frac{1}{2}} = c'\left(cosh^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} = c'cosh(t)$$

Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (5)

Έχουμε

$$\frac{dy^*}{dt} = c' sinh(t)$$

$$\frac{dy^*}{dx} = \frac{\frac{dy^*}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow sinh(t) = \frac{c' sinh(t)}{\frac{dx}{dt}} \overset{t \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{dx}{dt} = c' \Rightarrow x$$

$$= c't + c'' \Rightarrow t = \frac{x - c''}{c'}$$

$$y^*(x) = c' \cosh(t) = c' \cosh(\frac{x - c''}{c'})$$

Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (6)

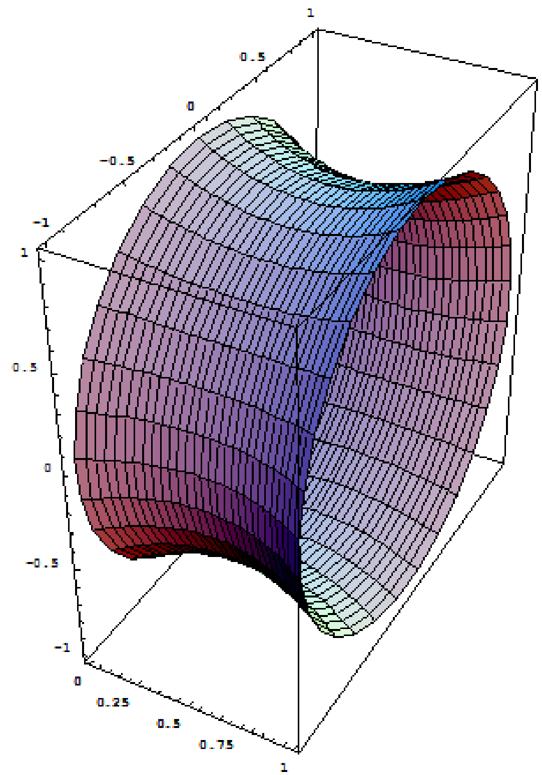
- Συνοριακές συνθήκες

Έστω για παράδειγμα το σημείο Α έχει συντατεγμένες $(0{,}1)$ και το Β έχει $(1{,}1)$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \Leftrightarrow c' cosh\left(\dfrac{-c''}{c'}\right) = 1 \\ y(1) = 1 \Leftrightarrow c' cosh\left(\dfrac{1-c''}{c'}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$c' = 0.848448, c'' = 0.5$$

Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (7)



Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (8)

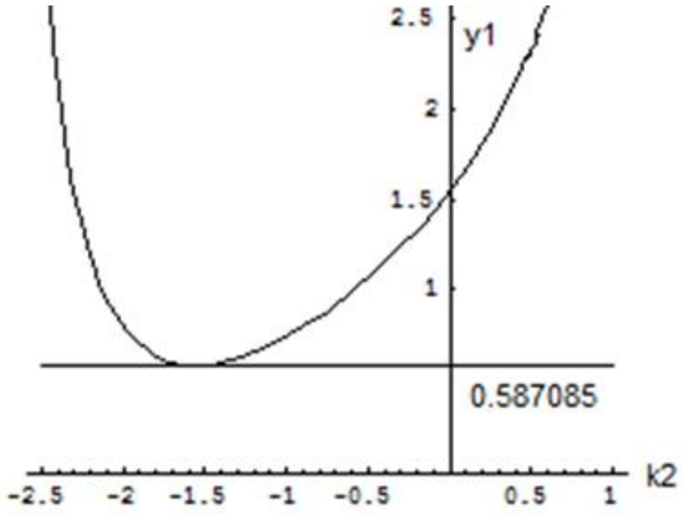
- Συνοριακές συνθήκες

Έστω τώρα ότι το σημείο Α έχει συντατεγμένες $(0,1)$ και το Β έχει $(1, y_1)$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \Leftrightarrow c' cosh\left(\dfrac{-c''}{c'}\right) = 1 \\ y(1) = y_1 \Leftrightarrow c' cosh\left(\dfrac{1-c''}{c'}\right) = y_1 \end{cases} \xRightarrow{k_1 = c',\ k_2 = -c''/c'}$$

$$\begin{cases} 1 = k_1 \cosh(k_2) \\ y_1 = k_1 cosh\left(\dfrac{1}{k_1} + k_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{\cosh(k_2)} \\ y_1 = \dfrac{\cosh(\cosh(k_2) + k_2)}{\cosh(k_2)} \end{cases}$$

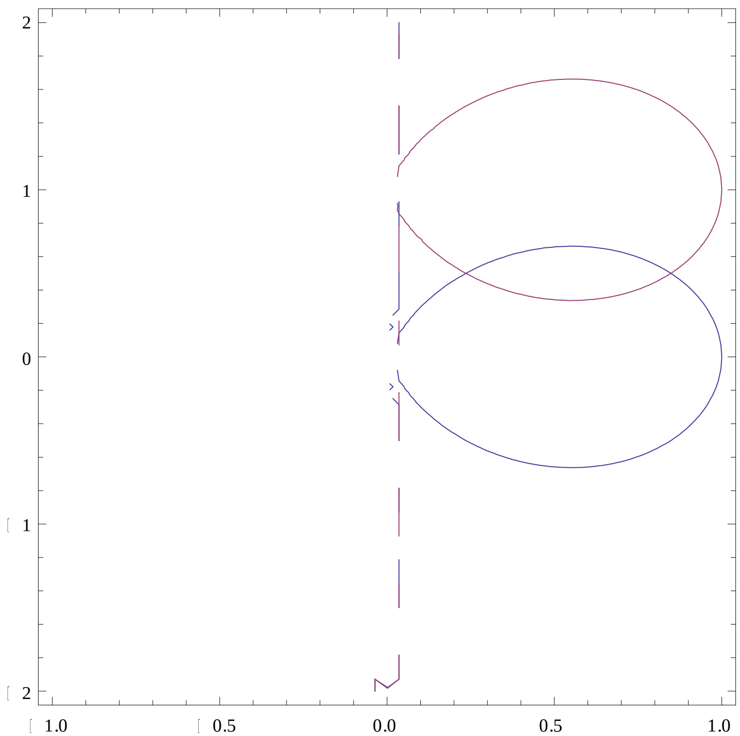
Ελάχιστη επιφάνεια περιστρεφόμενης καμπύλης (9)



Επίλυση Mathematica (1)

In[13]:=
```
ContourPlot[{
  k1 Cosh[-k2/k1] == 1,
  k1 Cosh[(1-k2)/k1] == 1}, {k1, -1, 1}, {k2, -2, 2}]
```

Out[13]=



Επίλυση Mathematica (2)

```
FindRoot[{k1 Cosh[-k2/k1] == 1, k1 Cosh[(1 - k2)/k1] == 1}, {k1, 1}, {k2, 1}] // N
```

Out[8]= $\{k_1 \to 0.848338,\ k_2 \to 0.5\}$

```
FindRoot[{k1 Cosh[-k2/k1] == 1, k1 Cosh[(1 - k2)/k1] == 1}, {k1, 0.3}, {k2, 0.3}] // N
```

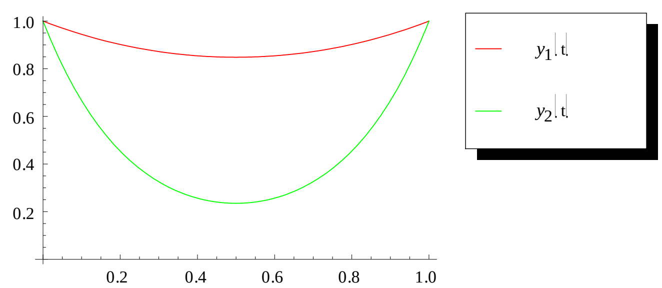
Out[16]= $\{k_1 \to 0.235095,\ k_2 \to 0.5\}$

```
In[20]:= y1[x_] := 0.848448 Cosh[(x - 0.5)/0.848448]

In[21]:= y2[x_] := 0.23509499023453276` Cosh[(x - 0.5)/0.23509499023453276`]

In[32]:= Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, 0, 1}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0]},
          PlotLegend -> {"y1[t]", "y2[t]"}, LegendPosition -> {1, 0}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

Out[32]=



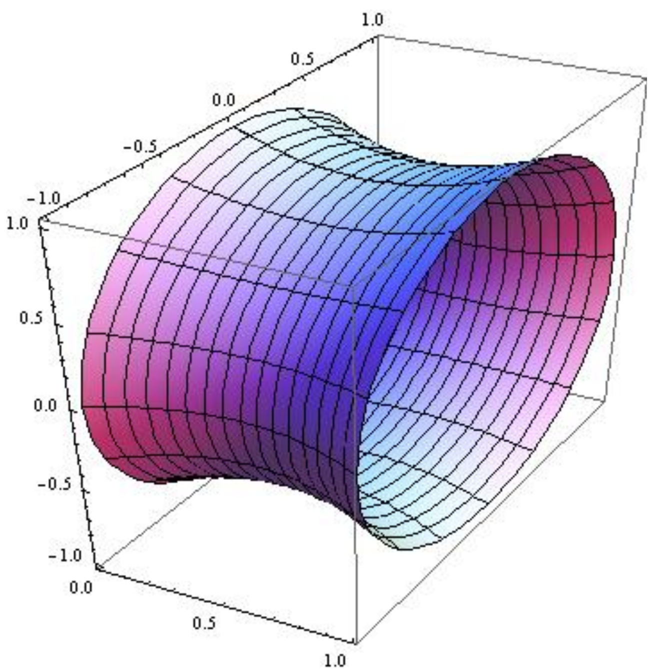
Επίλυση Mathematica (3)

In[24]:=
```
Integrate[2 Pi y1[x] Sqrt[1 + y1'[x]^2], {x, 0, 1}]
```

Out[24]= 5.99239

In[27]:=
```
RevolutionPlot3D[y1[x], {x, 0, 1}, AspectRatio -> 1, RevolutionAxis -> {1, 0, 0}]
```

Out[27]=



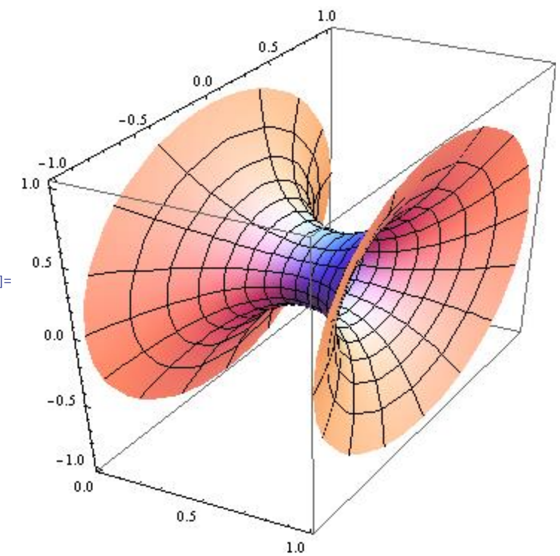
Επίλυση Mathematica (4)

```
In[25]:= Integrate[2 Pi y2[x] √(1 + y2'[x]^2), {x, 0, 1}]

Out[25]= 6.84566

In[30]:= SurfaceOfRevolution[y2[x], {x, 0, 1}, AspectRatio → 1, RevolutionAxis → {1, 0, 0}]
```

Out[30]=



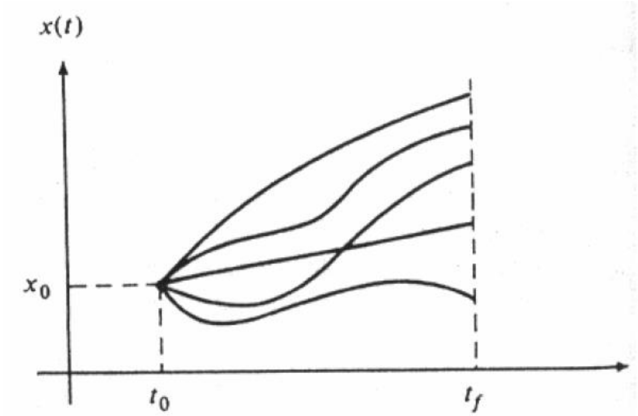
Άσκηση. Να ελέγξετε τις ικανές συνθήκες Legendre-Jacobi για τις δύο καμπύλες.

Ελεύθερη τελική κατάσταση $x(t_f)$ (1)

<u>Πρόβλημα 2</u>: Να βρεθεί μια αναγκαία συνθήκη ώστε το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

Με συγκεκριμένα $t_0, x(t_0), t_f$ αλλά ελεύθερα $x(t_f)$, να έχει σχετικό ακρότατο.



Ελεύθερη τελική κατάσταση $x(t_f)$ (2)

$$\delta J(x,\delta x) = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\right]\delta x(t)\Bigg|_{t_0}^{t_f} +$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\right]\right\}\delta x(t)dt$$

Ας είναι η x^* η λύση, τότε θα ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες για το Πρόβλημα 1, μια που θα αποτελεί σχετικό ακρότατο για το Πρόβλημα 1.

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\right] = 0$$

Ελεύθερη τελική κατάσταση $x(t_f)$ (3)

Τότε επειδή $\delta x(t_0) = 0$ θα έχουμε $\delta J(x, \delta x) = 0$ αν-ν

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\delta x(t_f) = 0 \ \forall \delta x(t_f)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right) = 0$$

<u>Θεώρημα</u>: Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι το $x^*(t)$ σχετικό ακρότατο της $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t)dt$ με σταθερά t_0, $t_f, x(t_0)$ και ελεύθερο $x(t_f)$ είναι οι εξής:

1. $\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right] = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right) = 0$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η καμπύλη ελαχίστου μήκους που συνδέει το σημείο $x(1) = 1$ με την ευθεία $t = 3$.

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν

$$\ddot{x}^*(t) = 0 \Rightarrow x^*(t) = c_1 t + c_2$$

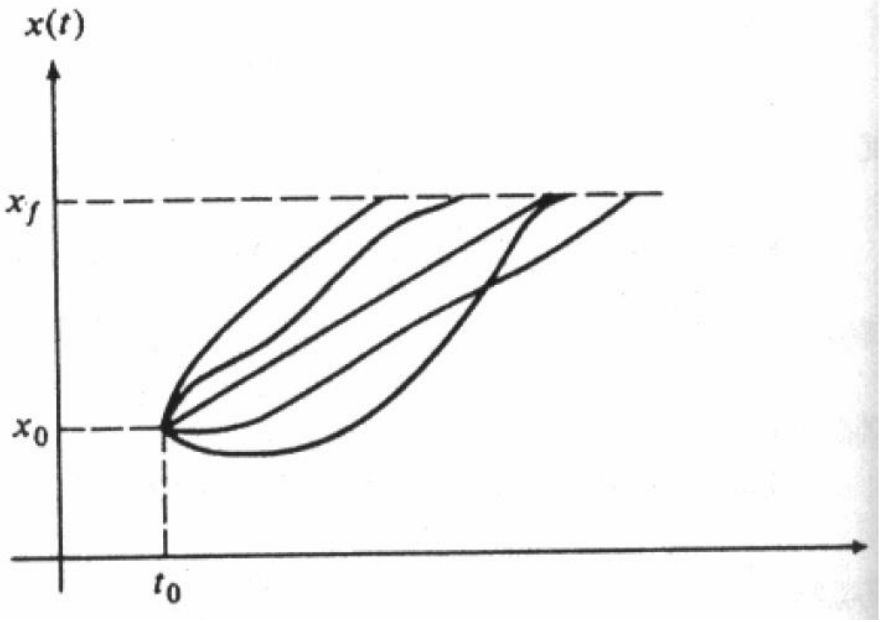
Επειδή

$$\left.\begin{array}{l} x^*(1) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x(3), \dot{x}(3), 3\ ) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dfrac{\dot{x}^*(3)}{(1+[\dot{x}^*(3)]^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^*(1) = 1$$

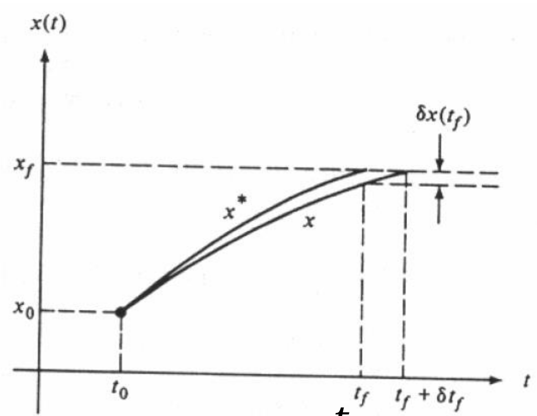
$$J(x) = \int_1^3 [1 + 0^2]^{1/2} dt = \int_1^3 1 dt = [t]_1^3 = 2$$

Ελεύθερος ο τελικός χρόνος t_f (1)

<u>Πρόβλημα 3</u>: Να βρεθεί αναγκαία συνθήκη η οποία πρέπει να ικανοποιείται ώστε το συναρτησιακό με $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ συγκεκριμένα και t_f ελεύθερο, να έχει σχετικό ακρότατο.



Ελεύθερος ο τελικός χρόνος t_f (2)



$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt - \int_{t_0}^{t_f} F(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \{F(x(t),\dot{x}(t),t) - F(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\}dt + \int^{t_f+\delta t_f} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \underbrace{F(x^*(t)+\delta x(t),\dot{x}^*(t)+\delta\dot{x}(t),t)}_{\text{Ανάπτυγμα } Taylor\ (x^*,\dot{x}^*)} - F(x^*(t),\dot{x}^*(t),t) \right\} +$$

$$+ \int^{t_f+\delta t_f} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt$$

Ελεύθερος ο τελικός χρόνος t_f (3)

$$
\begin{aligned}
&\Delta J \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \delta \dot{x}(t) \right\} dt \\
&+ O(\delta x(t), \delta \dot{x}(t)) + \underbrace{\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t) dt}_{(2) \ldots F(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) \delta t_f + O(\delta t_f)} \\
&= \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} (x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) + \left[F(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) \delta t_f \right] \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + O(\cdot)
\end{aligned}
$$

Ελεύθερος ο τελικός χρόνος t_f (4)

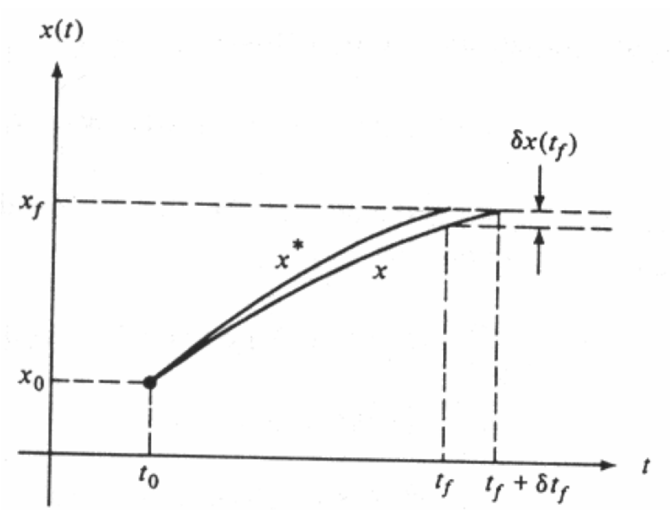
Ανάπτυγμα Taylor στο $\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f)\right)$

$$F\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right) = F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) +$$
$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*\ (t_f), t_f\right)\right] \delta x(t_f)$$
$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*\ (t_f), t_f\right)\right] \delta \dot{x}(t_f) + O(\cdot)$$

$$\delta x(t_f) + \dot{x}^*(t_f)\delta t_f = 0 \Rightarrow \delta x(t_f) = -\dot{x}^*(t_f)\delta t_f$$

Ελεύθερος ο τελικός χρόνος t_f (5)

$$\Delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*\,(t_f), t_f\right)\right]\delta x(t_f) + F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\delta t_f$$
$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*\,(t), t\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*\,(t), t\right)\right]\right\}\delta x(t)dt$$
$$+ O(\cdot)$$
$$\delta x(t_f) + \dot{x}^*\,(t_f)\delta t_f = 0 \Rightarrow$$
$$\delta x(t_f) = -\dot{x}^*\,(t_f)\delta t_f$$



Ελεύθερος ο τελικός χρόνος t_f (6)

Γραμμική Συνάρτηση

$$(\Gamma) \xrightarrow{(\Delta)} \delta J(x^*, \delta x) = 0 \Rightarrow$$

Μεταβολή λόγω διαφοράς τελικού χρόνου

$$\left\{\left[-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*\,(t_f), t_f\right)\right]\dot{x}(t_f) + F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right\}\delta t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*\,(t), t\right)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*\,(t), t\right)\right]\right\}\delta x(t)dt$$

Λόγω:

μεταβολή λόγω $\delta x(t)$ στο $[t_0, t_f]$

1. δt_f αυθαίρετο
2. Η $x^*(t)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος (1) στο $[t_0, t_f]$.

Ελεύθερος ο τελικός χρόνος t_f (7)

<u>Θεώρημα</u>: Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι το $x^*(t)$ σχετικό ακρότατο της $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t)dt$ με σταθερά t_0,$x(t_0), x(t_f)$ και ελεύθερο t_f είναι οι εξής:

1) $\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right] = 0$

2) $\left[F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right] - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*\left(t_f\right), t_f\right)\right]\dot{x}^*(t_f) = 0$

Παράδειγμα 3: Ελεύθερο t_f (1)

Να βρεθεί η καμπύλη ελαχίστου μήκους που συνδέει το σημείο $x(1) = 1$ με το $x(t_f) = 3$.

$$J(x) = \int_1^{t_f} \underbrace{[1 + [\dot{x}(t)]^2]^{1/2}}_{F(\dot{x}(t))} dt$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν: $x^*(t) = c_1 t + c_2$

$$x^*(1) = 1 = c_1 + c_2$$

$$\left[F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right] - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*\,(t_f), t_f\right)\right] \dot{x}^*(t_f) = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + {c_1}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{c_1}{(1+{c_1}^2)^{\frac{1}{2}}} c_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{(1+{c_1}^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \text{ ΑΤΟΠΟ}$$

$c_1 \to \infty$ άρα κάθετη

Παράδειγμα 3: Ελεύθερο t_f (2)

Φυσικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $t(x)$ (αντί $x(t)$) και να εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία για το συναρτησιακό

$$J(t) = \int_1^3 [1 + (\dot{t}(x))^2]^{1/2} dx$$

Με την υπόθεση ότι $x(1) = 1 \Rightarrow t(1) = 1$ και $x(t_f) = 3 \Rightarrow t(3) = t_f$.

Το πρόβλημα αυτό έχει ως λύση την $t^*(x) = c_1 x + c_2$. Λόγω των αρχικών συνθηκών θα έχουμε

$$t^*(1) = 1 = c_1 + c_2$$

$$t^*(3) = t_f = 3c_1 + c_2$$

Πρόβλημα ελεύθερης τελικής κατάστασης $x(t_f)$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} g(3, t^*(3), \dot{t}^*(3)) = \frac{\dot{t}^*(3)}{(1 + (\dot{t}^*(3)^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{c_1}{(1 + {c_1}^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Από τις παραπάνω συνθήκες έχουμε

$$c_1 = 0, c_2 = 1, t_f = 1$$

και άρα η συνάρτηση που αναζητούμε είναι η $t^*(x) = 1$ δηλαδή η κάθετη στην στον άξονα xx’ στο σημείο $(1{,}0)$.

Παράδειγμα 4: Ελεύθερος t_f (1)

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(x) = \int_1^{t_f} [x^2(t) + \dot{x}^2(t)]dt$$

όπου $x(0) = 1, x\left(t_f\right) = 2, t_f > 0.$

Διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^*(t) - \frac{d}{dt}[2\dot{x}^*(t)] = 0 \Leftrightarrow x^*(t) - \ddot{x}^*(t) = 0 \xLeftrightarrow[\rho=\pm 1]{1-\rho^2=0}$$

Παράδειγμα 4: Ελεύθερος t_f (2)

$$\Leftrightarrow x^*(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Άγνωστα c_1, c_1, t_f.

Συνοριακές συνθήκες

$$x^*(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$x^*(t_f) = 2 \Rightarrow c_1 e^{t_f} + c_2 e^{-t_f} = 2$$

$$\left[F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right] - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*\,(t_f), t_f\right)\right]\dot{x}^*(t_f) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[(c_1 e^{t_f} + c_2 e^{-t_f})^2 + (c_1 e^{t_f} - c_2 e^{-t_f})^2\right] - 2(c_1 e^{t_f} - c_2 e^{-t_f})^2 = 0$$

$$(c_1 e^{t_f} + c_2 e^{-t_f})^2 - (c_1 e^{t_f} - c_2 e^{-t_f})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

Παράδειγμα 4: Ελεύθερος t_f (3)

$$4c_2e^{-t_f}c_1e^{t_f} = 0 \Leftrightarrow 4c_2c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \vee c_2 = 0$$

- $c_1 = 0, c_2 = 1 - c_1 = 1 - 0 = 1$

$$c_1e^{t_f} + c_2e^{-t_f} = 2 \overset{\substack{c_1=0\\ c_2=1}}{\Longleftrightarrow} e^{-t_f} = 2 \Leftrightarrow e^{t_f} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$t_f = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

- $c_2 = 0, c_1 = 1 - c_2 = 1 - 0 = 1$

$$c_1e^{t_f} + c_2e^{-t_f} = 2 \overset{\substack{c_1=1\\ c_2=0}}{\Longleftrightarrow} e^{t_f} = 2 \Rightarrow$$

$$t_f = \ln(2)$$

Παράδειγμα 4: Ελεύθερος t_f (4)

$$J(x) = \int_1^{\ln(2)} [(e^t)^2 + (e^t)^2]dt =$$

$$= \int_1^{\ln(2)} 2e^{2t}dt = 2\int_1^{\ln(2)} 2e^{2t}dt =$$

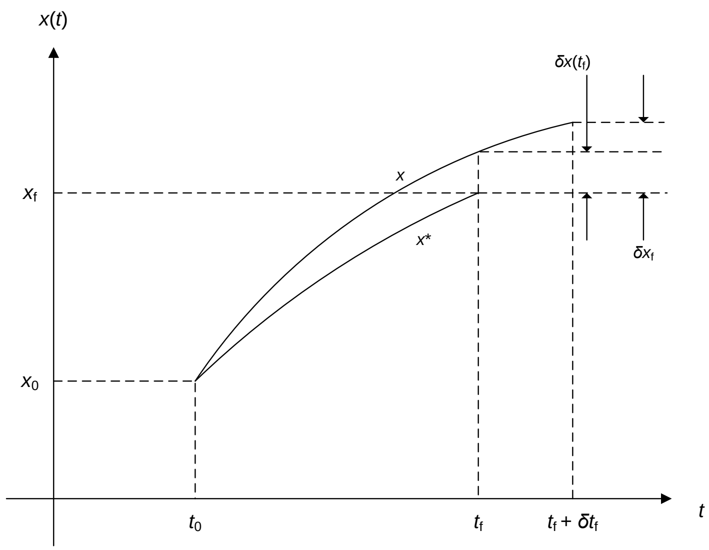
$$= 4 - e^2$$

Ελεύθερος τελικός χρόνος και η τελική κατάσταση (1)

Πρόβλημα 4: Να βρεθεί αναγκαία συνθήκη για να είναι το $x^*(t)$ σχετικό ακρότατο της

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

αν $t_0, x(t_0)$ είναι συγκεκριμένα και $t_f, x(t_f)$ ελεύθερα.



Ελεύθερος τελικός χρόνος και η τελική κατάσταση (2)

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt - \int_{t_0}^{t_f} F(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \{F(x(t),\dot{x}(t),t) - F(x^*,\dot{x}^*(t),t)\}dt + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt \overset{x=x^*+\delta x}{\cong}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \Big\{\underbrace{F(x^*(t)+\delta x(t),\dot{x}^*(t)+\delta\dot{x}(t),t)}_{Taylor\ F(x^*+\delta x,\dot{x}^*+\delta\dot{x})} - F(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\Big\} dt + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right]\delta x(t) + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right]\delta\dot{x}(t)\right\} dt + O\big(\delta x(t),\delta\dot{x}(t)\big)$$

$$+ \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt =$$

$$\downarrow \quad \boxed{\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt = F\big(x(t_f),\dot{x}(t_f),t_f\big)\delta t_f + O(\delta t_f)}$$

Ελεύθερος τελικός χρόνος και η τελική κατάσταση (3)

$$\Delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\delta x(t_f) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_0), \dot{x}^*(t_0), t_0\right)\right]\delta x(t_0) + F\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\delta t_f$$
$$+ \int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right)\right]\right\}\delta x(t)dt + O(\cdot) \quad \boxed{\delta x(t_0) = 0}$$

Αν τώρα πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f)\right)$ της $F\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)$ θα έχουμε:

$$\downarrow \quad \boxed{\begin{aligned} F\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right) &= F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) + \left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\delta x(t_f) + \\ &+ \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\delta \dot{x}(t_f) + O(\cdot) \end{aligned}}$$

Ελεύθερος τελικός χρόνος και η τελική κατάσταση (4)

$$\Delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\delta x(t_f) + F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\delta t_f + \int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right)\right]\right\}\delta x(t)dt + O(\cdot)$$

$$\downarrow$$

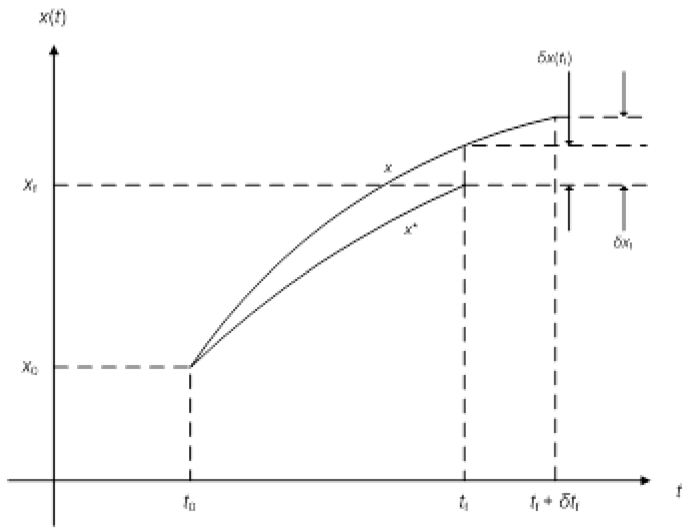
$$\delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\delta x(t_f) + F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\delta t_f + \int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right)\right]\right\}\delta x(t)dt$$

Ελεύθερος τελικός χρόνος και η τελική κατάσταση (5)

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + \dot{x}^*(t_f)\delta t_f$$

$$\downarrow$$

$$\delta x(t_f) = \delta x_f - \dot{x}^*(t_f)\delta t_f$$



$$\delta J(x^*, \delta x) = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\delta x_f +$$

$$+\left[F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\dot{x}^*(t_f)\right]\delta t_f +$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right]\right\}\delta x(t)dt = 0$$

Ελεύθερος τελικός χρόνος και η τελική κατάσταση (6)

$$\boxed{\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\delta x_f + \left[F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]\dot{x}^*(t_f)\right]\delta t_f + \\ + \int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right]\right\}\delta x(t)dt = 0}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει την άκρα καμπύλη x^* του συναρτησιακού $J(x)$ και συνεπώς γνωρίζουμε την τιμή των $t_f, x^*(t_f) = x_f$. Τότε από το Θεώρημα 2.3 η καμπύλη αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις των Euler-Lagrange, εφόσον έχουμε συγκεκριμένες αρχικές και τελικές συνθήκες π.χ.

$$\boxed{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right] = 0}$$

Συνεπώς η πρώτη μεταβολή ανάγεται στη σχέση

Τερματική συνθήκη ή συνθήκη εγκαρσιότητας (1)

$$\boxed{\begin{gathered}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\right]\delta x_f + \\ + \left[F\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\right)\dot{x}^*(t_f)\right]\delta t_f = 0\end{gathered}}$$

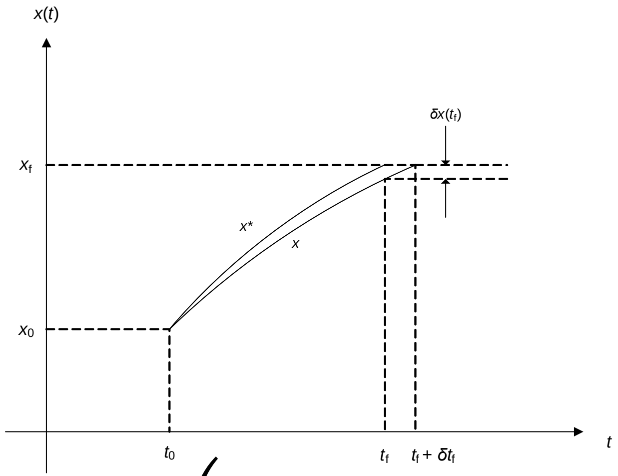
Τερματική συνθήκη ή συνθήκη εγκαρσιότητας (transversality conditions)

Περίπτωση 1. Γνωρίζουμε τα $t_f, x(t_f) = x_f$ και συνεπώς η παραπάνω σχέση είναι εκ'ταυτότητας μηδέν μιας και οι μεταβολές $\delta x_f, \delta t_f$ θα είναι μηδέν.

Τερματική συνθήκη ή συνθήκη εγκαρσιότητας (2)

Περίπτωση 2. Δεν γνωρίζουμε τον τελικό χρόνο t_f αλλά γνωρίζουμε την τελική κατάσταση $x(t_f) = x_f$.

$$\delta x_f = 0$$

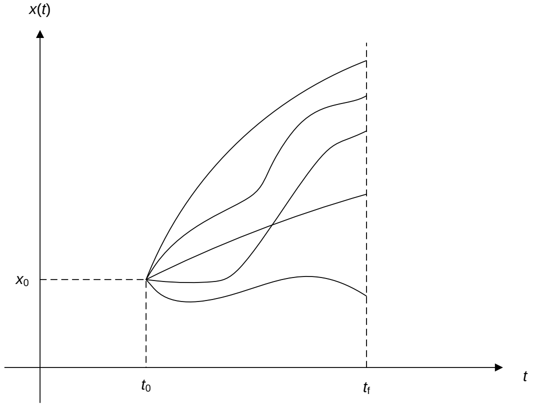


$$F(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)\right)\dot{x}^*(t_f) = 0$$

Τερματική συνθήκη ή συνθήκη εγκαρσιότητας (3)

Περίπτωση 3. Γνωρίζουμε τον τελικό χρόνο t_f αλλά δεν γνωρίζουμε την τελική κατάσταση $\mathrm{x}(t_f) = x_f$.

$$\delta t_f = 0$$



$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) = 0$$

Τερματική συνθήκη ή συνθήκη εγκαρσιότητας (4)

Περίπτωση 4. Δεν γνωρίζουμε τον τελικό χρόνο t_f αλλά ούτε και την τελική κατάσταση $x(t_f) = x_f$.

Εδώ διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

Περίπτωση 4.1 Δεν υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των t_f και $x(t_f) = x_f$ και συνεπώς τα $\delta t_f, \delta x_f$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) = 0$$

$$F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right)\dot{x}^*(t_f) = 0 \Rightarrow$$

$$F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) = 0$$

Τερματική συνθήκη ή συνθήκη εγκαρσιότητας (5)

Περίπτωση 4.2 Υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των t_f και $x(t_f) = x_f$ της μορφής

$$x(t_f) = y(t_f) \Rightarrow \delta x_f = \dot{y}(t_f)\delta t_f$$

και συνεπώς

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right] \dot{y}(t_f)\delta t_f +$$

$$+\left[F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right)\dot{x}^*(t_f)\right]\delta t_f = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

Τερματική συνθήκη ή συνθήκη εγκαρσιότητας (6)

$$\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\right)\dot{y}(t_f)+F\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\\ -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\right)\dot{x}^*(t_f)\end{array}\right]\delta t_f=0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\right)\left(\dot{y}(t_f)-\dot{x}^*(t_f)\right)+F\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)=0}$$

Παράδειγμα 5 (1)

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την καμπύλη $x^* \in C^1[0, t_f]$ ελαχίστου μήκους που συνδέει το σημείο $x(0) = 0$ με την ευθεία $y(t) = -t + 1$.

Είναι γνωστό από προηγούμενα παραδείγματα ότι η καμπύλη που ψάχνουμε είναι η ευθεία $x^*(t) = c_1 t + c_2$ που θα πρέπει να ικανοποιεί:

a) Τις αρχικές συνθήκες.

$$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 \times 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

b) Από την περίπτωση 4.2.

$$\delta x_f = \frac{d}{dt} y(t_f) \delta t_f \Rightarrow \delta x_f = -\delta t_f$$

Παράδειγμα 5 (2)

και συνεπώς

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\left(-1-\dot{x}^*(t_f)\right)+F\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{x}^*(t_f)}{\left[1+\dot{x}^*(t_f)^2\right]^{1/2}}\left(-1-\dot{x}^*(t_f)\right)+\left[1+\dot{x}^*(t_f)^2\right]^{1/2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1}{[1+{c_1}^2]^{1/2}}(-1-c_1)+[1+{c_1}^2]^{1/2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-c_1-{c_1}^2+1+{c_1}^2}{[1+{c_1}^2]^{1/2}}=0$$

Παράδειγμα 5 (3)

$$\Leftrightarrow \frac{-c_1 + 1}{[1 + c_1{}^2]^{1/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 1.$$

c) Από το σημείο τομής της $x^*(t)$ με την $y(t)$ στο σημείο t_f θα έχουμε

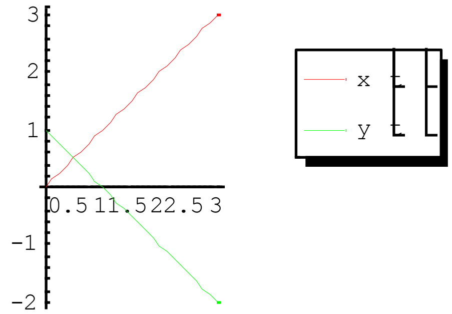
$$x^*(t_f) = y^*(t_f) \Leftrightarrow c_1 t_f + c_2 = -t_f + 1 \Rightarrow$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 0$$

$$t_f + 0 = -t_f + 1 \Rightarrow t_f = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 5 (4)



συνεπώς η ευθεία $x(t) = t$ είναι η καμπύλη ελαχίστου μήκους

που συνδέει το σημείο $x(0) = 0$ με την ευθεία $y(t) = -t + 1$

(η κάθετη από το σημείο $(0,0)$ στην $y(t) = -t + 1$ όπως περιμέναμε).

Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το $t_f = \frac{1}{2}$.

$$J(x) = \int_0^{1/2} [1 + 1^2]^{1/2} dt = \int_0^{1/2} \sqrt{2} dt = \left[\sqrt{2}t\right]_0^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ελεύθερος $t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)$ (1)

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right]=0$$

$$\delta J(x^*,\delta x)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)\right]\delta x_f-\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)\right]\delta x_0\\
&+\left[F(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)-\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)\right)\dot{x}^*(t_f)\right]\delta t_f\\
&-\left[F(x^*(t_0),\dot{x}^*(t_0),t_0)-\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t_0),\dot{x}^*(t_0),t_0)\right)\dot{x}^*(t_0)\right]\delta t_0\\
&+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right]\right\}\delta x(t)dt=0
\end{aligned}$$

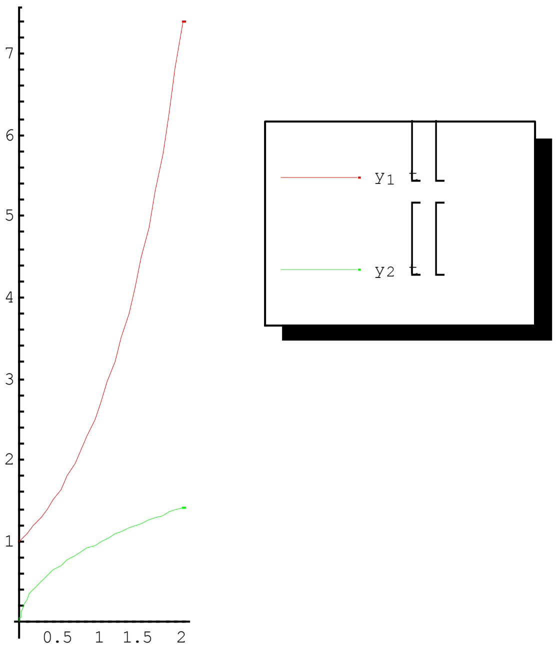
Ελεύθερος $t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)$ (2)

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right]=0$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*\left(t_f\right),\dot{x}^*\left(t_f\right),t_f\right)\right]\delta x_f-\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*\left(t_f\right),\dot{x}^*\left(t_f\right),t_f\right)\right]\delta x_0+$$
$$+\left[F\left(x^*\left(t_f\right),\dot{x}^*\left(t_f\right),t_f\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*\left(t_f\right),\dot{x}^*\left(t_f\right),t_f\right)\right)\dot{x}^*\left(t_f\right)\right]\delta t_f-$$
$$-\left[F(x^*(t_0),\dot{x}^*(t_0),t_0)-\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t_0),\dot{x}^*(t_0),t_0)\right)\dot{x}^*(t_0)\right]\delta t_0=0$$

Παράδειγμα 6 (1)

Να βρεθεί η καμπύλη $x^* \in C^1[t_0, t_f]$ ελαχίστου μήκους που συνδέει τις δύο καμπύλες $y_1(t) = e^t$ και $y_2(t) = \sqrt{t}$.



Παράδειγμα 6 (2)

Είναι γνωστό ότι η καμπύλη ελαχίστου μήκους $x^* \in C^1\left[t_0, t_f\right]$ που ενώνει ένα σημείο $\left(t_0, y_1(t_0)\right)$ της καμπύλης $y_1(t) = e^t$ με ένα σημείο $\left(t_f, y_2\left(t_f\right)\right)$ της καμπύλης $y_2(t) = \sqrt{t}$ είναι η ευθεία $x^*(t) = c_1 t + c_2$.

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t_0), \dot{x}^*(t_0), t_0)\left[\frac{dy_1}{dt}(t_0) - x^*(t_0)\right] + F(x^*(t_0), \dot{x}^*(t_0), t_0) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\dot{x}^*(t_0)}{[1 + \dot{x}^*(t_0)^2]^{1/2}}\left(e^{t_0} - \dot{x}^*(t_0)\right) + [1 + \dot{x}^*(t_0)^2]^{1/2} = 0$$

$\Leftrightarrow$

Παράδειγμα 6 (3)

$$\frac{c_1}{[1+{c_1}^2]^{1/2}}(e^{t_0}-c_1)+[1+{c_1}^2]^{1/2}=0 \Leftrightarrow$$

$$c_1(e^{t_0}-c_1)+[1+{c_1}^2]=0 \Leftrightarrow$$

$$c_1 e^{t_0}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$c_1=-\frac{1}{e^{t_0}} \Leftrightarrow$$

$$c_1=-e^{-t_0}$$

Παράδειγμα 6 (4)

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\left[\frac{dy_2}{dt}(t_f)-x^*(t_f)\right]+F\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\dot{x}^*(t_f)}{\left[1+\dot{x}^*(t_f)^2\right]^{1/2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t_f}}-\dot{x}^*(t_f)\right)+\left[1+\dot{x}^*(t_f)^2\right]^{1/2}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{c_1}{[1+{c_1}^2]^{1/2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t_f}}-c_1\right)+[1+{c_1}^2]^{1/2}=0\Leftrightarrow$$

$$c_1\left(\frac{1}{2\sqrt{t_f}}-c_1\right)+[1+{c_1}^2]=0\Leftrightarrow c_1\frac{1}{2\sqrt{t_f}}+1=0\Leftrightarrow c_1=-2\sqrt{t_f}$$

Παράδειγμα 6 (5)

Η ευθεία $x^*(t)$ θα τέμνει τις καμπύλες $y_1(t) = e^t$ και $y_2(t) = \sqrt{t}$ στα σημεία t_0 και t_f αντίστοιχα και συνεπώς

$$x^*(t_0) = y_1(t_0) \Leftrightarrow c_1 t_0 + c_2 = e^{t_0}$$

$$x^*(t_f) = y_2(t_f) \Leftrightarrow c_1 t_f + c_2 = \sqrt{t_f}$$

$$\begin{matrix} c_1 = -e^{-t_0} \\ c_1 = -2\sqrt{t_f} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = -1.07634 \\ c_2 = 0.849901 \end{matrix}$$

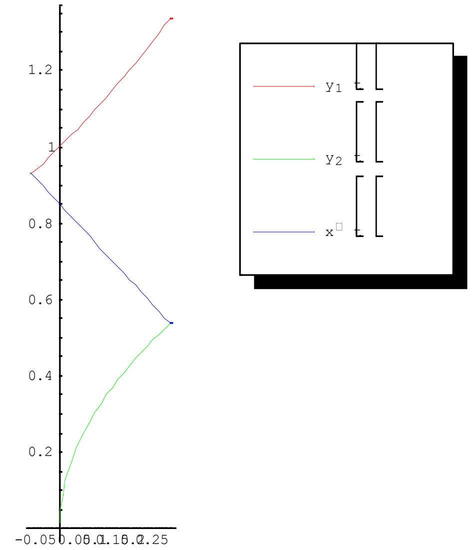
$$\begin{matrix} c_1 t_0 + c_2 = e^{t_0} \\ c_1 t_f + c_2 = \sqrt{t_f} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} t_0 = -0.0735622 \\ t_f = 0.289624 \end{matrix}$$

$$x^*(t) = -1.07634t + 0.849901$$

Παράδειγμα 6 (6)

$$J(x) = \int_{-0.0735622}^{0.289624} [1 + (-1.07634)^2]^{1/2} dt = 0.804432$$

Παρατηρήστε ότι στο σημείο $t_0 = -0.0735622$ η συνάρτηση $x^*(t) = -1.07634t + 0.849901$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της $y_1(t) = e^t$ μιας και $\dot{y}_1(t_0)\dot{x}^*(t_0) = -1$.



Παρόμοια έχουμε ότι στο σημείο

$t_f = 0.289624$ η συνάρτηση

$x^*(t) = -1.07634t + 0.849901$ είναι

κάθετη στην εφαπτομένη της $y_2(t) = \sqrt{t}$

μιας και $\dot{y}_2(t_f)\dot{x}^*(t_f) = -1$.

Παράδειγμα 6 (7)

Η ιδιότητα αυτή ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση $y_1(t), y_2(t)$ μιας και έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\left[\dot{y}_i(t_f) - \dot{x}^*(t_f)\right] + F\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\dot{x}^*(t_f)}{\left[1 + \dot{x}^*(t_f)^2\right]^{1/2}}\left(\dot{y}_i(t_f) - \dot{x}^*(t_f)\right) + \left[1 + \dot{x}^*(t_f)^2\right]^{1/2} = 0$$

$$\xRightarrow{x^*(t)=c_1 t+c_2 \Rightarrow \dot{x}^*(t_f)=c_1}$$

Παράδειγμα 6 (8)

$$\frac{c_1}{[1+{c_1}^2]^{1/2}}\left(\dot{y}_i(t_f)-c_1\right)+[1+{c_1}^2]^{1/2}=0 \Leftrightarrow$$

$$c_1\left(\dot{y}_i(t_f)-c_1\right)+[1+{c_1}^2]=0 \Leftrightarrow$$

$$c_1\dot{y}_i(t_f)+1=0 \Leftrightarrow$$

$$c_1\dot{y}_i(t_f)=-1 \Leftrightarrow$$

$$\dot{x}(t_f)\dot{y}_i(t_f)=-1$$

Ασκήσεις (1)

Άσκηση 2.3 Να υπολογισθεί το σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού:

$$J(x) = \int_1^2 t^2 \dot{x}(t)^2 dt$$

όταν $x(1) = 1, x(2) = \frac{1}{2}$.

Υπάρχει σχετικό ακρότατο $x^* \in C^2[1,2]$ στην περίπτωση που οι συνοριακές συνθήκες είναι $x(1) = 1, x(-2) = -\frac{1}{2}$;

Άσκηση 2.7 Να υπολογισθούν τα ακρότατα των συναρτησιακών:

i. $J(x) = \int_a^b (x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + 2x(t)e^t)dt$

ii. $J(x) = \int_0^1 (\dot{x}(t) - \cos(t))^2 dt\,, x(0) = 1, x(1) = 0.$

iii. $J(x) = \int_0^{\pi/2} (x(t)^2 - \dot{x}(t)^2)dt, x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = free\,.$

iv. $J(x) = \int_0^{t_f} (\frac{1}{2}\left(\dot{x}(t)\right)^2 - x(t) + \frac{3}{2})dt\,, x(0) = 0, x\left(t_f\right) = free.$

Ασκήσεις (2)

Άσκηση 2.16

a) Δείξτε ότι αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί η συνάρτηση $x^* \in C^2[a,b]$ ακρότατο του συναρτησιακού:

$$J(x) = \int_a^b F\big(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)\big)dt$$

Δεδομένου ότι είναι γνωστά τα $a, b, x(a) = x_a, x(b) = x_b, \dot{x}(a) = x_a^1, \dot{x}(b) = x_b^1$, είναι να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) = 0$$

Βιβλιογραφία

- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.
- D.E. Kirk, 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. S. Naidu, 2002, Optimal Control Systems, CRC Press LLC.

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS288/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης