ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 10: Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Επίλυση **Γραμμικού Τετραγωνικού Προβλήματος** (Linear Quadratic Regulator Problem (LQR)) με πεπερασμένο/άπειρο χρονικό ορίζοντα.
- Επίλυση του προβλήματος ανίχνευσης (tracking problem).

Σκοποί Ενότητας

- Επίλυση του ***γραμμικού τετραγωνικού προβλήματος*** με **πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα** :
  - με επίλυση του συστήματος στον χώρο των καταστάσεων που προκύπτει από τις Χαμιλτονιανές εξισώσεις (αναγκαίες συνθήκες ακροτάτου)
  - με επίλυση των **διαφορικών εξισώσεων** πινάκων Riccati.
- Επίλυση του γραμμικού τετραγωνικού προβλήματος με **άπειρο χρονικό ορίζοντα** :
  - Με επίλυση του συστήματος στον χώρο των καταστάσεων που προκύπτει από τις Χαμιλτονιανές εξισώσεις (αναγκαίες συνθήκες ακροτάτου).
  - Με επίλυση των **αλγεβρικών εξισώσεων** πινάκων Riccati.
  - Ικανές και αναγκαίες συνθήκες επίλυσης του προβλήματος.
- Επίλυση του ***προβλήματος ανίχνευσης*** (tracking problem).

Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα (1)

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

και ζητούμε να ελαχιστοποιήσουμε τον δείκτη απόδοσης

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

Απόδειξη:

Θεωρώ την Hamiltonian

$$H(x,u,p,t) = \frac{1}{2}x^TQx + \frac{1}{2}u^TRu + p^T(A(t)x(t) + B(t)u(t))$$

Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα (2)

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q(t)x(t) - A^T(t)p(t)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = R(t)u(t) + B^T(t)p(t) \Rightarrow u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t)$$

και άρα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{p}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix}$$

Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα (3)

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ p^*(t_f) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{11}(t_f, t) & \varphi_{12}(t_f, t) \\ \varphi_{21}(t_f, t) & \varphi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix}}_{\pi\iota\nu\alpha\kappa\alpha\varsigma\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\alpha\sigma\eta\varsigma} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} \ (A)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*, t_f) - p\right]^{\mathrm{T}} \delta x_f + \left[F(x^*, u^*, t_f) + [p^*(t)]^T \dot{x}^*(t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x, t_f)\right] \delta t_f = 0$$

Επειδή το $x(t_f)$ είναι ελεύθερο και το t_f συγκεκριμένο, θα πρέπει

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f)) - p^*(t_f) = 0 \Rightarrow Hx^*(t_f) - p^*(t_f) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{p^*(t_f) = Hx^*(t_f)} \ (\mathrm{B})$$

Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα (4)

(A)+(B)⇒

$$x^*(t_f) = \varphi_{11}(t_f,t)x^*(t) + \varphi_{12}(t_f,t)p^*(t)$$

$$p^*(t_f) = Hx^*(t_f) = \varphi_{21}(t_f,t)x^*(t) + \varphi_{22}(t_f,t)p^*(t)$$

$$\Downarrow$$

$$H\varphi_{11}(t_f,t)x^*(t) + H\varphi_{12}(t_f,t)p^*(t) = \varphi_{21}(t_f,t)x^*(t) + \varphi_{22}(t_f,t)p^*(t) \Rightarrow$$

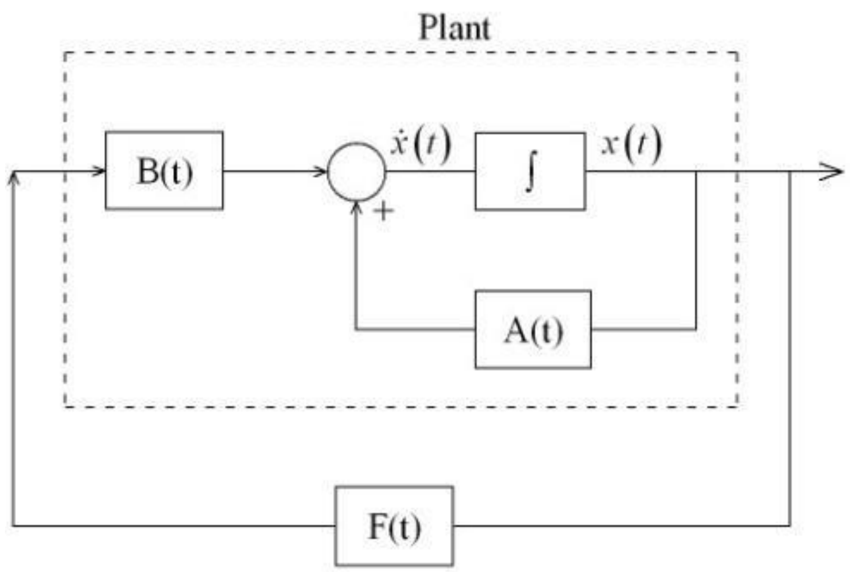
$$p^*(t) = \underbrace{\left[H\varphi_{12}(t_f,t) - \varphi_{22}(t_f,t)\right]}_{Kalman\ 1960 \rightarrow \exists\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho o\varphi o\varsigma}^{-1}\left[\varphi_{21}(t_f,t) - H\varphi_{11}(t_f,t)\right]x^*(t)$$

Άρα $\quad p^*(t) \triangleq K(t)x^*(t)$

$$u^*(t) = \underbrace{-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)}_{F(t)}x(t)$$

Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα (5)

$$u^*(t) = \underbrace{-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)}_{F(t)}x(t)$$



Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα (6)

$$p(t) = K(t)x(t) \Rightarrow \dot{p}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t) \Rightarrow$$

$$\dot{p}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t)[A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)]$$

$$\Rightarrow \dot{p}(t) = \left[\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\right]x(t)$$

(1)

$$\dot{p}(t) = -Q(t)x(t) - A^T(t)p(t) \xRightarrow{p=Kx}$$

$$\dot{p}(t) = [-Q(t) - A^T(t)K(t)]x(t) \qquad (2)$$

(1)+(2) $\Rightarrow$

$$\boxed{\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) = -Q(t) - A^T(t)K(t)}$$

Διαφορική εξίσωση Riccati

Παρατηρήσεις

$$\boxed{\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) = -Q(t) - A^T(t)K(t)}$$

Παρατήρηση 1: $K(t)$ συμμετρικός $\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$ διαφορικές εξισώσεις.

Παρατήρηση 2: Επειδή $p\left(t_f\right) = Hx(t_f) \equiv K\left(t_f\right)x(t_f)$ τελική συνθήκη $K\left(t_f\right) = H$ (θετικά ορισμένος)

Η λύση προκύπτει με προς τα πίσω διαφόριση

$$\dot{K}\left(t_f\right) = \frac{K\left(t_f\right) - K(t_f - \Delta \mathrm{t})}{\Delta t}$$

Ελάχιστο ή Μέγιστο (1)

$$\Pi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + p^T (Ax + Bu)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = Qx + A^T p,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = Q,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} = 0,$$

Ελάχιστο ή Μέγιστο (2)

$$\Pi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T p,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = R,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} = 0.$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R > 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του δείκτη απόδοσης? (1)

Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του δείκτη απόδοσης?

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^T(t_f)K(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^T(t_0)K(t_0)x(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^TQx + u^TRu + \frac{d}{dt}[x^TK(t)x]\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^T(t_0)K(t_0)x(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^TQx + u^TRu + \dot{x}^TKx + x^T\dot{K}x + x^TK\dot{x}\right]dt$$

Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του δείκτη απόδοσης? (2)

Όμως $u = -R^{-1}B^T K x$

$$= \frac{1}{2} x^T(t_0)K(t_0)x(t_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \Big[x^T\big\{Q + KBR^{-1}RR^{-1}B^T K + [A - BR^{-1}B^T K]^T K + \dot{K}$$

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x + u$$

και $\quad J(x,u) = \frac{1}{2}x^T S x + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(2x^2 + u^2)dt$, με $t_f = 1$.

$$A = -\frac{1}{2}, B = 1, H = S, Q = 2, R = 1$$

Άρα ο βέλτιστος έλεγχος $u = -K(t)x$.

$\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) = -Q(t) - A^T(t)K(t)$

$$\dot{K}(t) = K^2(t) + K(t) - 2$$

με οριακή συνθήκη $K(t) = s$.

Παράδειγμα 1 (2)

$$\dot{K}(t) = K^2(t) + K(t) - 2$$

Αν $s = 0$ εφαρμόζουμε προς τα πίσω διαφόριση:

$$\mathrm{K}(\dot{\mathrm{t}}) = \frac{K(t) - K(t - \delta t)}{\delta t}$$

$t = 1.0 \qquad K(1) = s = 0 \Rightarrow$

$$\dot{K}(1) = K^2(1) + K(1) - 2 = -2$$

$$K(0.8) = -\dot{K}(1)\Delta\mathrm{t} + \mathrm{K}(1) = (-2)(-0.2) + 0 = 0.4$$

$t = 0.8 \qquad K(0.8) = 0.4 \Rightarrow$

$$\dot{K}(0.8) = K^2(0.8) + K(0.8) - 2 = -1.44$$

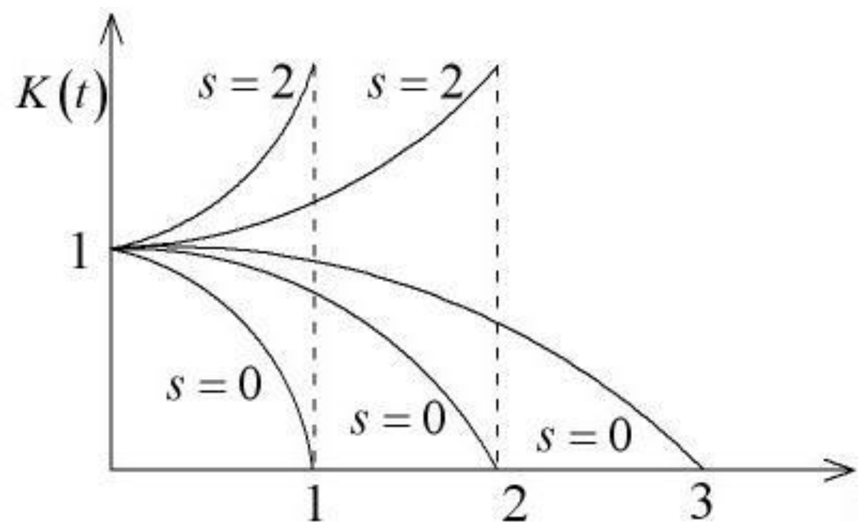
Παράδειγμα 1 (3)

$K(0.6) = -\dot{K}(0.8)\Delta \mathrm{t} + \mathrm{K}(0.8) = (-1.44)(-0.2) + 0.4 = 0.69$

$t = 0.6 \rightarrow K(0.4) = 0.92$

$t = 0.4 \rightarrow K(0.2) = 0.97$

$t = 0.2 \rightarrow K(0) = 1$



Το πρόβλημα του Βέλτιστου Ρυθμιστή
Optimal Regulator Problem

Ο χρόνος $t_f \to \infty$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

Επίλυση με τον ίδιο τρόπο: $u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\widehat{K}(t)x^*(t)$

όπου $\lim_{t_f \to \infty} K(t) = \widehat{K}(t)$

και η $\widehat{K}(t)$ ικανοποιεί την δ.ε. Riccati με τελικές συνθήκες

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f)\right)\delta t_f \Rightarrow \lim_{t_f\to\infty} p^*(t_f) = 0\right]$$

Ειδική Περίπτωση Βέλτιστου Ρυθμιστή (1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

Συνθήκες Ύπαρξης Λύσης

- Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο και $H = 0$ στην δ.ε. Riccati, τότε

$$\lim_{t_f \to \infty} K(t_f) = K > 0 \text{ συμμετρικός}$$

δηλαδή η λύση της δ.ε. είναι σταθ. Θετ. Συμ. Πίνακας και άρα έχουμε να λύσουμε την αλγεβρική εξίσωση Riccati.

Ειδική Περίπτωση Βέλτιστου Ρυθμιστή (2)

$$\boxed{K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + Q(t) + A^T(t)K(t) = 0}$$

Αλγεβρική εξίσωση Riccati

Το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές αν (A, C^T) παρατηρήσιμο όπου $CC^T = Q \leftarrow Cholesky\ Decomposition.$

Μπορώ να περιορίσω ακόμη πιο πολύ τις συνθήκες ύπαρξης λύσης

i. (A, B) stabilizable

ii. (A, C^T) detectable

Παράδειγμα 2 (1)

Έχουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = ax + bu$$

και

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (qx^2 + pu^2)dt$$

Άρα $A = a, B = b, Q = q, R = p$.

Ο βέλτιστος έλεγχος είναι

$$u = -R^{-1}B^T Kx = -p^{-1}bKx$$

$$\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) = -Q(t) - A^T(t)K(t)$$

$$\downarrow$$

$$KA - KBR^{-1}B^T K = -Q - A^T K$$

Παράδειγμα 2 (2)

$$Ka - Kbp^{-1}bK + q + a^T K = 0 \overset{K>0}{\Longrightarrow}$$

$$K = \frac{a + \sqrt{a^2 + \frac{q}{p}b^2}}{\frac{b^2}{p}}$$

και άρα

$$u = -\frac{a + \sqrt{a^2 + \frac{q}{p}b^2}}{b}x$$

και το σύστημα δ.ε. γίνεται

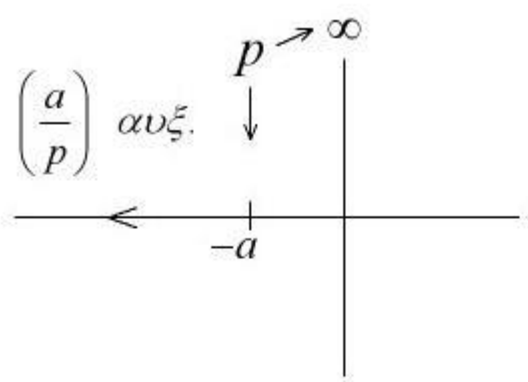
$$\dot{x} = -\sqrt{a^2 + \frac{q}{p}b^2}x$$

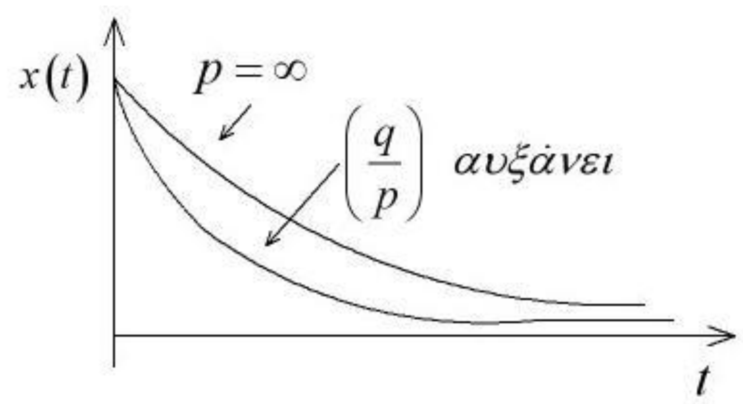
Παράδειγμα 2 (3)

Συμπέρασμα:

$$b \to 0 \, (\mu\eta \ \varepsilon\lambda\acute{\varepsilon}\gamma\xi\iota\mu o) \Rightarrow u \to \infty$$

$$\alpha > 0 \ (\alpha\rho\chi. \Sigma\upsilon\sigma\tau. \ \alpha\sigma\tau\alpha\theta\acute{\varepsilon}\varsigma) \Rightarrow \text{κλ. Συστ. Ευσταθ.}$$





Βέλτιστος Ρυθμιστής Εξόδων

Έστω

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}\right\}\text{ ελέγξιμο, παρατηρήσιμο}$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (y^T Q y + u^T R u)dt$$

$y^T = x^T C^T$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{x^T \underbrace{[C^T Q C]}_{Q\prime} x + u^T \underbrace{R}_{R\prime} u\right\}dt$$

Πρόβλημα Ανίχνευσης (Tracking Problem) (1)

(A) $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$

$J = \frac{1}{2}\left(x(t_f) - r(t_f)\right)^T H\left(x(t_f) - r(t_f)\right) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{(x(t) -$

Πρόβλημα Ανίχνευσης (Tracking Problem) (2)

(B) $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx^* - A^T p + Qr$

(Γ) $0 = \frac{\partial H}{\partial u} = Ru^* + B^T p \Rightarrow u = -R^{-1}B^T p$

Από (A)+(B)+(Γ)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Qr \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ p^*(t_f) \end{bmatrix} = \varphi(t_f, t) \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \varphi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} 0 \\ Q(\tau) r(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t_f, t) & \varphi_{12}(t_f, t) \\ \varphi_{21}(t_f, t) & \varphi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα Ανίχνευσης (Tracking Problem) (3)

1) $x^*(t_f) = \varphi_{11}(t_f, t)x^*(t) + \varphi_{12}(t_f, t)p^*(t) + f_1(t)$

2) $p^*(t_f) = \varphi_{21}(t_f, t)x^*(t) + \varphi_{22}(t_f, t)p^*(t) + f_2(t)$

Αλλά από τις συνοριακές συνθήκες:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f), t_f\right) - p^*(t_f)\right)\delta x_f \Rightarrow$$

$$p^*(t_f) = Hx^*(t_f) - Hr(t_f)$$

$$\Downarrow \quad (1), (2)$$

$$\varphi_{21}(t_f, t)x^*(t) + \varphi_{22}(t_f, t)p^*(t) + f_2(t) =$$

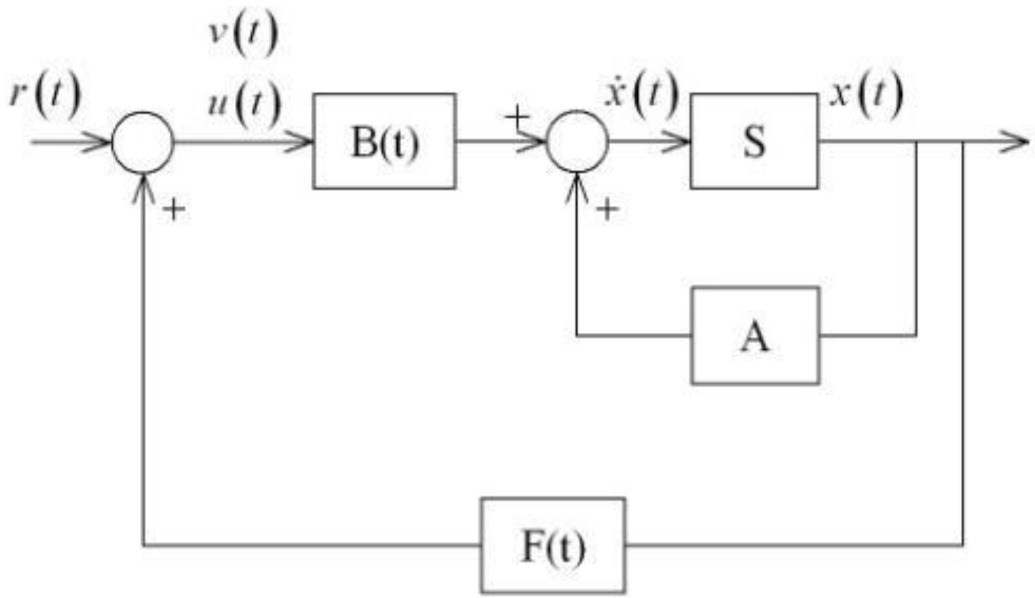
$$= H\varphi_{11}(t_f, t)x^*(t) + H\varphi_{12}(t_f, t)p^*(t) + Hf_1(t) - Hr(t_f) \Rightarrow$$

Πρόβλημα Ανίχνευσης (Tracking Problem) (4)

$$p^*(t) = \left(\varphi_{22}(t_f,t) - H\varphi_{12}(t_f,t)\right)^{-1} \cdot \left(H\varphi_{11}(t_f,t) - \varphi_{212}(t_f,t)\right) x^*(t)$$

$$+ \left(\varphi_{22}(t_f,t) - H\varphi_{12}(t_f,t)\right)^{-1} \left(Hf_1(t) - Hr(t_f)\right) =$$

$$= \boxed{F(t)x^*(t) + v(t)}$$



Πρόβλημα Ανίχνευσης (Tracking Problem) (5)

Ας υποθέσουμε ότι

$$p^*(t) = K(t)x^*(t) + s(t) \Rightarrow$$

$$\dot{p}^*(t) = \dot{K}(t)x^*(t) + K(t)\dot{x}^*(t) + \dot{s}(t) \Rightarrow$$

$$[-Q(t)x^*(t) - A^T(t)\{K(t)x^*(t) + s(t)\}] =$$

$$= \dot{K}(t)x^*(t) +$$

$$+K(t)\{A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)[K(t)x^*(t) + s(t)]\} + \dot{s}(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

$$\dot{s}(t) = -[A^T(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)]s(t) + Q(t)r(t)$$

Πρόβλημα Ανίχνευσης (Tracking Problem) (6)

Με συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(t_f),t_f\right)-p^*(t_f)=0 \Rightarrow$$

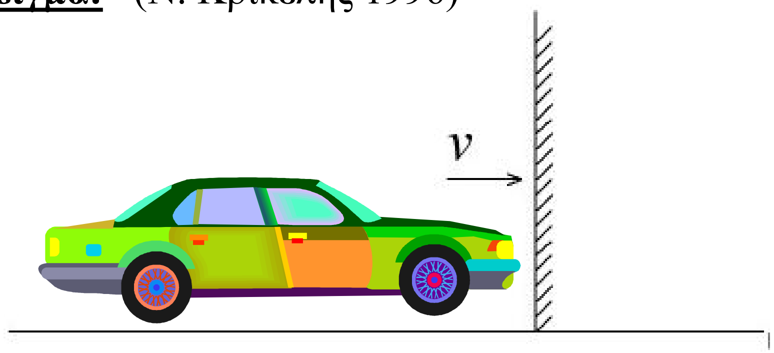
$$p^*(t_f)=Hx^*(t_f)-Hr(t_f)\equiv K(t_f)x^*(t_f)+s(t_f)$$

$$\Downarrow \quad \forall x^*(t_f), r(t_f)$$

$$K(t_f)=H \;\oplus\; s(t_f)=-Hr(t_f)$$

Παράδειγμα (Ν. Κρικέλης 1996) (1)

<u>Παράδειγμα:</u> (Ν. Κρικέλης 1996)



$\xrightarrow{F}$ Δύναμη απο προφυλ. $\boxed{\frac{1}{m}}$ $\xrightarrow{\ddot{v}}$ Επιταχ. $\boxed{\frac{1}{s}}$ $\xrightarrow{\dot{v}}$ Ταχυτ. $\boxed{\frac{1}{s}}$ $\xrightarrow{v}$ Θέση

Μοντέλο κατάστασης: $\{x_1 = y, x_2 = \dot{y}\}$

Εξισώσεις κατάστασης: $\left\{\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \frac{F}{m} = u\right\}$

Παράδειγμα (Ν. Κρικέλης 1996) (2)

Επαφή προφυλακτήρα με τοίχο: (χρόνος 0)

$$\{y(0) = 0, \dot{y}(0) = 4\}$$

Μετά από 1 sec ο προφυλακτήρας φέρει την ταχύτητα του αυτοκ. στο μηδέν: $\dot{y}(1) = 0$

$y(1)$ ελεύθερο

a) *Προστασία επιβατών* $\Rightarrow$ *Ελαχιστοποίηση* $\ddot{y}$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \ddot{y}^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt$$

b) $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα (Ν. Κρικέλης 1996) (3)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(y^2 + pu^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x_1^2 + pu^2)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[(x_1 \quad x_2)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + pu^2\right]dt$$

<u>Λύση:</u> Η συνάρτηση Pontryagin είναι

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow u + \lambda_2 = 0 \Rightarrow u^* = -\lambda_2$$

$$H = \frac{1}{2}(-\lambda_2)^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-\lambda_2) = -\frac{1}{2}{\lambda_2}^2 + \lambda_1 x_2$$

Παράδειγμα (Ν. Κρικέλης 1996) (4)

$$H = \frac{1}{2}(-\lambda_2)^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-\lambda_2) = -\frac{1}{2}{\lambda_2}^2 + \lambda_1 x_2$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \\ \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\boxed{\dot{x}_1 = x_2} \\ &\boxed{\dot{x}_2 = -\lambda_2} \\ &\boxed{\dot{\lambda}_1 = 0} \\ &\boxed{\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Παράδειγμα (Ν. Κρικέλης 1996) (5)

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1 = c_1 \\ \lambda_2 = -c_1 t + c_2 \\ x_1 = c_1 \dfrac{t^3}{6} - c_2 \dfrac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 \\ x_2 = c_1 \dfrac{t^2}{2} - c_2 t + c_3\end{array}\right\} \begin{array}{c}\underbrace{\begin{array}{l} t = 0, x_1(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \\ t = 0, x_2(0) = 4 \Rightarrow c_3 = 4 \\ t = 1, \lambda_1(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ t = 1, x_2(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 4 \end{array}} \\ \Downarrow \\ \lambda_2 = 4\end{array}$$

Άρα $\boxed{u^* = -4}$

<u>**Συμπέρασμα:**</u> Ελαχιστοποίηση επιτάχυνσης ⇒σταθερή δύναμη

Άσκηση

Να υπολογιστεί το ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(x,u,t)=\frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix}x^T & u^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & S\\ S^T & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}dt$$

υπό τις συνθήκες

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t).$$

Βιβλιογραφία

- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.
- D.E. Kirk, 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. S. Naidu, 2002, Optimal Control Systems, CRC Press LLC.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου. Ενότητα 10: Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα ». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS288/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης