ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

**Ενότητα 11**: Βέλτιστος Έλεγχος με φραγμένη είσοδο - Αρχή ελαχίστου του Pontryagin

**Νίκος Καραμπετάκης**
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα

- Αρχή ελαχίστου του Pontryagin.
- Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου (time optimal control problem).
- Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων (fuel optimal control problem).
- Πρόβλημα ελάχιστης ενέργειας (energy optimal control problem).

# Σκοποί Ενότητας

- Επίλυση του προβλήματος Bolza με την παραδοχή ότι η είσοδος είναι φραγμένη.
- Αντικατάσταση της συνθήκης στατικότητας με την αρχή ελαχίστου του Pontryagin για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος.
- Εφαρμογή του παραπάνω προβλήματος στα παρακάτω ειδικά προβλήματα :
  - Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου (time optimal control problem)
  - Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων (fuel optimal control problem)
  - Πρόβλημα ελάχιστης ενέργειας (energy optimal control problem)

# Ακρότατο συναρτησιακού υπό συνθήκες (1)

**<u>Άσκηση:</u>** Να υπολογιστεί το ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(x,u,t)=\frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix}x^T & u^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & S\\ S^T & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}dt$$

υπό τις συνθήκες

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

**<u>Απάντηση:</u>** Ορίζουμε την

$$H(x,u,p,t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x^T & u^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & S\\ S^T & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}+p^T(t)[Ax(t)+Bu(t)\,]$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}u^TS^Tx+\frac{1}{2}x^TSu+\frac{1}{2}u^TRu+p^TAx+p^TBu$$

(1) $\boxed{\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)}$, $\left\{\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}\right\}$

# Ακρότατο συναρτησιακού υπό συνθήκες (2)

(2) $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left\{Qx + \frac{1}{2}Su + \frac{1}{2}[Su]^T + A^T p\right\}$

$$\dot{p}(t) = -Qx - \frac{1}{2}([Su] + [Su]^T) - A^T p \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{p}(t) = -Qx - Su - A^T p}$$

(3) $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[S^T x] + \frac{1}{2}[x^T S] + Ru + B^T p = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\{[S^T x]^T + [S^T x]\} + Ru + B^T p = 0$$

$$\Rightarrow S^T x + Ru + B^T p = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u = -R^{-1} S^T x - R^{-1} B^T p}$$

# Ακρότατο συναρτησιακού υπό συνθήκες (3)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[-R^{-1}S^T x(t) - R^{-1}B^T p(t)] \Rightarrow$$

$$\dot{x}(t) = [A - BR^{-1}S^T]x(t) - BR^{-1}B^T p(t)$$

$$\dot{p}(t) = -Qx(t) - S[-R^{-1}S^T x(t) - R^{-1}B^T p(t)] - A^T p(t) \Rightarrow$$

$$\dot{p}(t) = [-Q + SR^{-1}S^T]x(t) + [SR^{-1}B^T - A^T]p(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}S^T & -BR^{-1}B^T \\ -Q + SR^{-1}S^T & SR^{-1}B^T - A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

# Ακρότατο συναρτησιακού υπό συνθήκες (4)

$$p(t) = K(t)x(t) \Rightarrow$$

$$\dot{p}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t) \Rightarrow$$

$$[-Q + SR^{-1}S^T]x(t) + [SR^{-1}B^T - A^T]p(t)$$

$$= \dot{K}(t)x(t) + K(t)[(A - BR^{-1}S^T)x(t) - BR^{-1}B^T p(t)]$$

$$p(t) = Kx(t)$$

$$[-Q + SR^{-1}S^T]x(t) + [SR^{-1}B^T - A^T]K(t)x(t) =$$

$$= \dot{K}(t)x(t) + K(t)(A - BR^{-1}S^T)x(t) - K(t)BR^{-1}B^T K(t)x(t) \Rightarrow$$

# Δ.Ε. Riccati

$$\underbrace{(-Q + SR^{-1}S^T)}_{Q\prime} + \underbrace{(SR^{-1}B^T - A^T)}_{-(A\prime)^T} K(t)$$
$$= \dot{K}(t) + K(t)\underbrace{(A - BR^{-1}S^T)}_{A'} - K(t)\underbrace{B}_{B'}\underbrace{R^{-1}}_{R'}K(t)$$

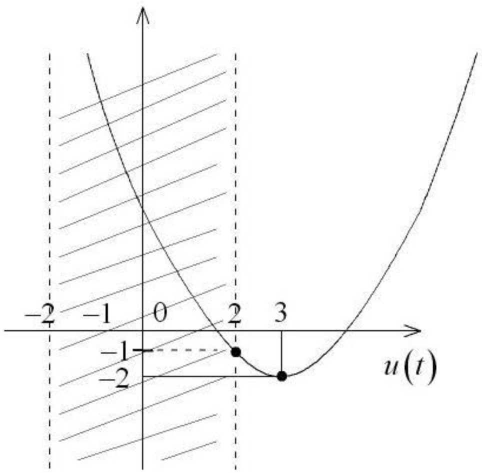
**Διαφορική εξίσωση Riccati**

$$J(x, u, t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt$$

Stabilizable+detectable ⇒ $K(t) = K$ (άρα $\dot{K}(t) = 0$)

**Αλγεβρική εξίσωση Riccati**

# Ελαχιστοποίηση συνάρτησης σε φραγμένο διάστημα




**Παράδειγμα**: Να ελαχιστοποιήσετε την

$$H = u^2 - 6u + 7$$

αν $|u| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq u \leq 2.$

**Λύση**: Αν δεν υπήρχαν περιορισμοί

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{u = 3}$$

Όμως $u = 3$ είναι μη επιτρεπτή λύση, επομένως θέλω

$$H(u^*) \leq H(u), \forall |u| \leq 2$$

Παρατηρώ ότι για $u = 2$ έχω ελάχιστο

$$H = 2^2 - 6 \cdot 2 + 7 = -1$$

# Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένη είσοδο (1)

Πρόβλημα (μη φραγμένη είσοδο)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$J = h\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} v(x(t), u(t), t)dt$$

1. Δημιουργία της Χαμιλτονιανής (συν.Pontryagin ): $H(x, u, p, t) = v(x, u, t) + p^T(t) \cdot f(x, u, t)$
2. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$
3. Συνοριακές Συνθήκες: $\left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{*t_f} \delta x_f + \left[H + \frac{\partial h}{\partial t}\right]_{*t_f} \delta t_f = 0$

# Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένη είσοδο (2)

Συνήθως όμως έχουμε περιορισμούς στο εύρος τιμών:

a) Της εισόδου $u(t)$.

b) Του διανύσματος κατάστασης $x(t)$.

c) Της εξόδου $y(t)$.

Στον υπολογισμό του σχετικού ακρότατου της $J$ πήραμε μια μικρή αυθαίρετη μεταβολή $\delta x$ ($\delta u$ στα γραμ. συστήματα). Αυτό όμως δεν είναι εφικτό πάντα όταν η $u(t)$ υπόκειται σε περιορισμούς.

$$\Delta J(u^*, \delta u) = J(u) - J(u^*) \geq 0 \;(\varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau o)$$
$$= \underbrace{\delta J(u^*, \delta u)}_{\frac{\partial J}{\partial u}\delta u} + \acute{o}\rho o\iota\; \upsilon\psi\eta\lambda\acute{o}\tau\varepsilon\rho\eta\varsigma\; \tau\alpha\xi\eta\varsigma$$

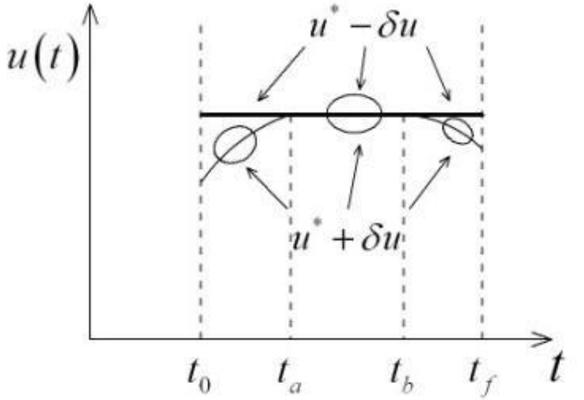
# Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένη είσοδο (3)

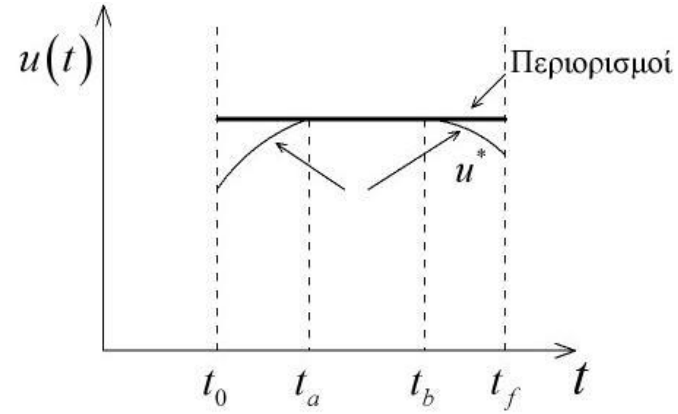
Αν η $u$ δεν είχε περιορισμούς, τότε είχαμε δείξει ότι αναγκαία συνθήκη για ακρότατο είναι

$$\delta J(u^*, \delta u) = 0$$

Αν όμως η $u$ υπόκειται σε περιορισμούς τότε η αναγκαία συνθήκη για να έχουμε ελάχιστο είναι

$$\delta J(u^*, \delta u) \geq 0$$



# Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένη είσοδο (4)

$$\delta J(u^*, \delta u)$$
$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p}\right]^T \delta x + \left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]^T \delta u + \left[-\frac{\partial H}{\partial p} + \dot{x}\right]^T \delta p \right\} dt$$
$$+ \left[\frac{\partial h}{\partial x} - p\right]_{*t_f}^T \delta x_f + \left[H + \frac{\partial h}{\partial t}\right]_{*t_f} \delta t_f$$

- Τα βέλτιστα $x^*(t)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση του συστήματος και συνεπώς

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \text{ (μηδεν. ο συντελ. του } \delta p\text{)}$$

- Ζητώ να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} - p\right]^{\mathrm{T}} \delta x_f + \left[H + \frac{\partial h}{\partial t}\right] \delta t_f = 0$$

# Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένη είσοδο (5)

και καταλήγω σε

$$\delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial H}{\partial u} \right]^T \delta u \right\} dt$$

αλλά

$$\left[ \frac{\partial H}{\partial u} (x^*, u^*, p^*, t\ ) \right]^T \delta u =$$

$$= H(x^*, u^* + \delta u, p^*, t) - H(x^*, u, p^*, t)$$

(Επειδή στο σχήμα υποθέσαμε $-\delta u$ μη επιτρεπτή. Διαφορετικά θα έπαιρνα $H(x^*, u^* - \delta u, p^*, t) - H(x^*, u, p^*, t)$ αν $+\delta u$ ήταν μη επιτρεπτή).

# Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένη είσοδο (6)

ΆΡΑ για να έχω ελάχιστο θα πρέπει

$$\delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \{H(x^*, u^* + \delta u, p^*, t) - H(x^*, u, p^*, t)\}dt \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$H\left(x^*, \underbrace{u^* + \delta u}_{u}, p^*, t\right) \geq H(x^*, u^*, p^*, t)$$

Ή διαφορετικά

$$H(x^*, u^*, p^*, t) = \min_{|u(t)| \leq u} \{H(x^*, u, p^*, t)\}.$$

Θα πρέπει δηλαδή η είσοδος $u(t)$ να ελαχιστοποιεί την Hamiltonian (κάτι που ίσχυε με την $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ όταν δεν είχαμε περιορισμούς στην $u(t)$).

# Συμπέρασμα

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ (Pontryagin Minimum Principle)**

Οι συνθήκες παραμένουν ίδιες εκτός από την $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ που αντικαθίσταται από την πιο γενική

$$H(x^*, u^*, p^*, t) = \min_{|u(t)| \leq u} \{H(x^*, u, p^*, t)\}$$

**Επιπλέον αναγκαίες συνθήκες**

Αν ο τελικός χρόνος $t_f$ είναι γνωστός και επιπλέον η Χαμιλτονιανή $H$ είναι ανεξάρτητη του $t$, τότε η $H$ θα πρέπει να είναι σταθερή όταν υπολογιστεί για τις βέλτιστες τιμές των $x^*, u^*, p^*$

$$H\big(x^*, u^*, p^*(t)\big) = c \in \mathbb{R} \ \forall t \in \left[t_0, t_f\right]$$

# Επιπλέον αναγκαίες συνθήκες

**Επιπλέον αναγκαίες συνθήκες**

Αν ο τελικός χρόνος $t_f$ είναι ελεύθερος ή δεν έχει καθοριστεί και επιπλέον η Χαμιλτονιανή H είναι ανεξάρτητη του $t$, τότε η $H$ θα πρέπει να είναι μηδέν για τις βέλτιστες τιμές των $x^*, u^*, p^*$.

$$H\left(x^*, u^*, p^*(t)\right) = 0 \; \forall t \in \left[t_0, t_f\right]$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \; (controllable)$$

$$u^- \leq u(t) \leq u^+ \Rightarrow |u(t)| \leq u$$

$$(|u(t)| \leq 1, B \rightarrow B' = Bu)$$

# Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου – Time optimal control problem (1)

**Πρόβλημα:** Να βρεθεί είσοδος $u^*(t)$ που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και που οδηγεί το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ στο μηδέν στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

Δείκτης απόδοσης: $J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{1}_{v(x,u,t)} dt = t_f - t_0$

$$H(x,p,u) = 1 + p^T(t)[Ax(t) + Bu(t)]$$

$$= 1 + p^T(t)Ax(t) + p^T(t)Bu(t)$$

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax^*(t) + Bu^*(t)$$

# Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου – Time optimal control problem (2)

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T p^*(t)$$

$$x^*(t_0) = x(t_0)$$

$$x^*(t_f) = 0$$

**Αρχή ελάχιστου του Pontryagin:**

$$H(x^*, u^*, p^*) \leq H(x^*, u, p^*) \Rightarrow$$

$$1 + p^T A x^* + p^T B u^* \leq 1 + p^{*T} A x^* + p^{*T} B u \Rightarrow$$

# Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου – Time optimal control problem (3)

$$\Rightarrow \underbrace{p^{*T}B}_{q^*(t)^T} u^* \leq \underbrace{p^{*T}B}_{q^*(t)^T} u, |u(t)| \leq 1$$

$$q^*(t)^T u^*(t) \leq q^*(t)^T u(t)$$

- $q^*(t)$ θετικό $\Rightarrow u(t)$ πρέπει να είναι ελάχιστη άρα $u(t) = -1.$
- $q^*(t)$ αρνητικό $\Rightarrow u(t)$ πρέπει να είναι μέγιστη άρα $u(t) = 1.$

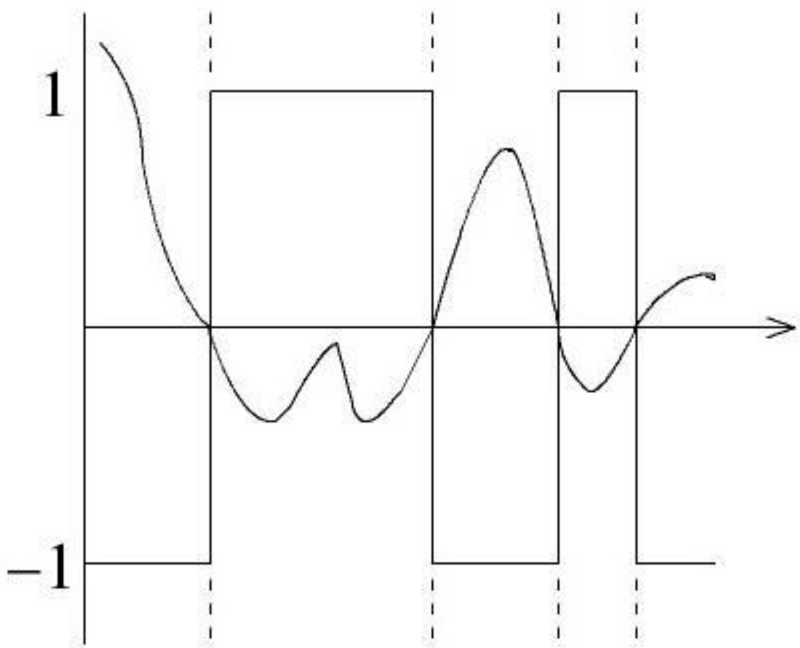
$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & q^*(t) < 0 \\ -1 & q^*(t) > 0 \\ οποιαδηποτε & q^*(t) = 0 \end{cases}$$

$$u^*(t) = -Sgn\{q^*(t)\}$$

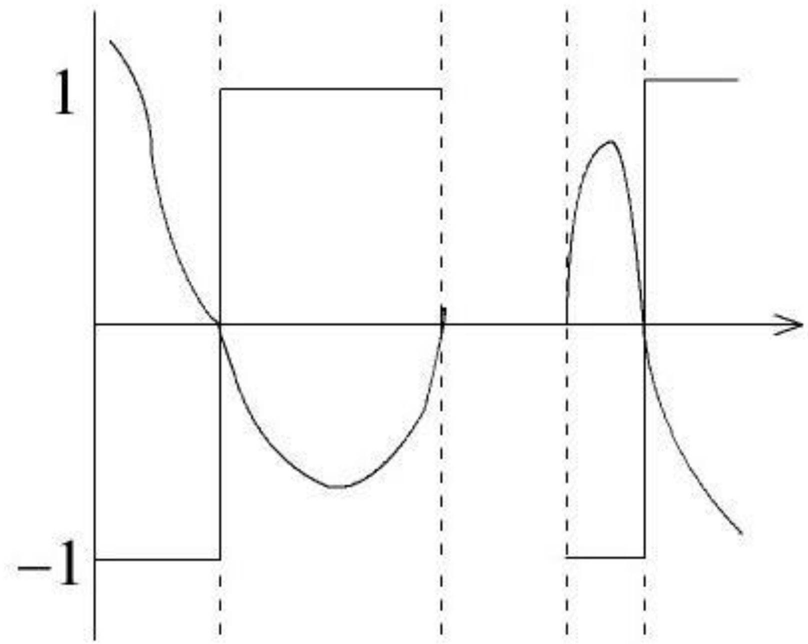
$$u_J^*(t) = -Sgn\{q_J^*(t)\} = -Sgn\{b_J^T p(t)\}$$

# Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου – Time optimal control problem (4)

**Κανονικό TOCP**




**Ιδιόμορφο TOCP**



# Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου – Time optimal control problem (5)

Συνθήκη για να έχω ένα normal (κανονικό) TOCP (controllable)

$$\dot{p}^*(t) = -A^T p^*(t) \Rightarrow p^*(t) = e^{-A^T t} p^*(0)$$

$$u_J^*(t) = -Sgn\left\{b_J^T e^{-A^T t} p^*(0)\right\}$$

Αν ήταν ιδιόμορφο $\Rightarrow \exists [T_1, T_2]: q_J^*(t) = 0 \ \forall t \in [T_1, T_2]$

$$\left.\begin{aligned} q_J^*(t) &= b_J^T e^{-A^T t} p^*(0) = 0 \\ \dot{q}_J(t) &= b_J^T A^T e^{-A^T t} p^*(0) = 0 \\ &\vdots \\ q_J^{(n-1)}(t) &= b_J^T A^{T(n-1)} e^{-A^T t} p^*(0) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_J & Ab_J & \cdots & A^{n-1} b_J \end{bmatrix}^T \underbrace{e^{-A^T t}}_{nonsign} \underbrace{p^*(0)}_{\neq 0} = 0$$

Επομένως $[B \quad AB \quad A^{n-1}B]$ singular.

# Θεωρήματα

**<u>Θεώρημα 1</u>**: Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το TOCP να είναι κανονικό είναι το σύστημα ελέγξιμο (και το αντίστοιχο για μη ελέγξιμο ιδιόμορφο TOCP).

Στην περίπτωση που το σύστημα είναι κανονικό τότε ο βέλτιστος έλεγχος είναι μοναδικός.

**<u>Θεώρημα 2</u>**: Εάν το TOCP είναι κανονικό και το σύστημα έχει n πραγματικές ιδιοτιμές (και υπάρχει βέλτιστος έλεγχος), τότε ο βέλτιστος έλεγχος μπορεί να αλλάξει από -1 σε 1 και αντίστροφα n-1 φορές.

**<u>Θεώρημα 3:</u>** (Ύπαρξη βέλτιστου ελέγχου) Εάν όλες οι ιδιοτιμές του Α είναι μη θετικές, τότε υπάρχει βέλτιστος έλεγχος που μεταφέρει το state στο 0.

**<u>Θεώρημα 4</u>**: (Μοναδικότητα) Εάν υπάρχει βέλτιστος έλεγχος τότε είναι μοναδικός.

# Παράδειγμα 1 (1)

**Άσκηση:** $m\ddot{y} = f(t)$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ u(t) &= \frac{f(t)}{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \text{(ελέγξιμο)}$$

$$J(\mathrm{u}) = \int_{t_0}^{t_f} 1dt$$

$$\boxed{H(x,u,p) = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)}$$

$$H(x^*,u^*,p^*) \leq H(x^*,u,p^*) \ |u| \leq 1$$

$$1 + p_1^*(t)x_2^*(t) + p_2^*(t)u^*(t) \leq 1 + p_1^*(t)x_2^*(t) + p_2^*(t)u(t) \Rightarrow$$

# Παράδειγμα 1 (2)

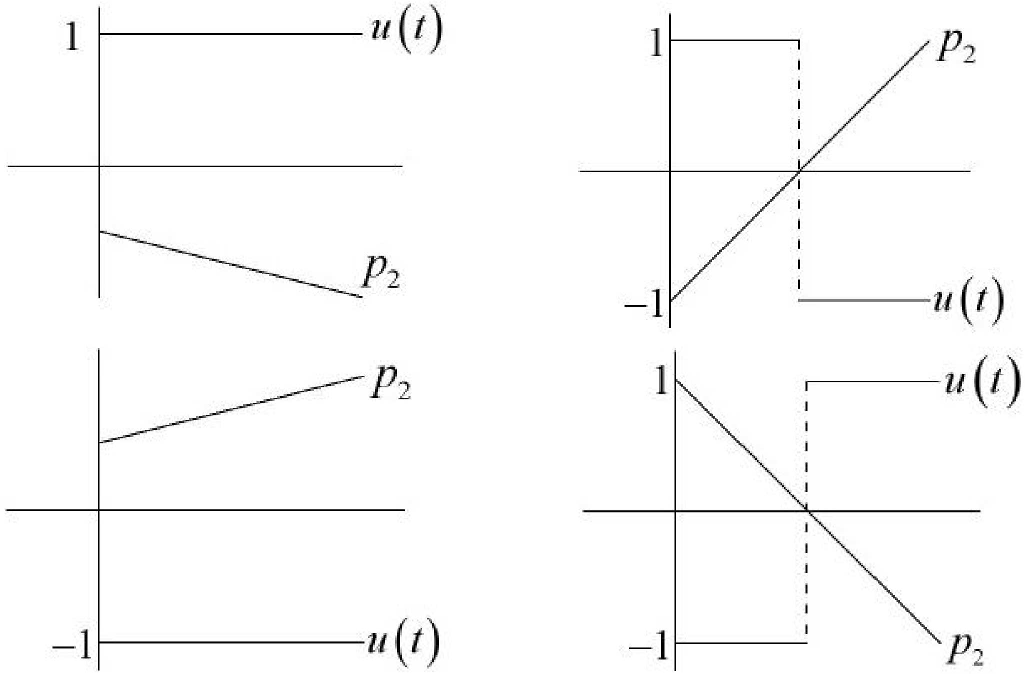
$$\Rightarrow p_2^*(t)u^*(t) \leq p_2^*(t)u(t)$$

$$u(t) = -Sgn\{p_2^*(t)\}$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{p}_1^*(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2^*(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} p_1^*(t) = p_1^*(0) \\ p_2^*(t) = p_2^*(0) - p_1^*(0)t \end{matrix}$$

# Παράδειγμα 1 (3)




Βέλτιστοι Έλεγχοι $\{+1\}, \{-1\}, \{+1, -1\}, \{-1, +1\}$

# Παράδειγμα 1 (4)

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$U = u^*(t) = \pm 1 \qquad \left.\begin{matrix} x_1^*(t) = x_1^*(0) + x_2^*(0)t + \frac{1}{2}Ut^2 \\ x_2^*(t) = x_2^*(0) + Ut \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$t = \frac{x_2^*(t) - x_2^*(0)}{U},$$

$$x_1^*(t) = x_1^*(0) - \frac{1}{2}Ux_2^{2*}(0) + \frac{1}{2}Ux_2^2(t)$$

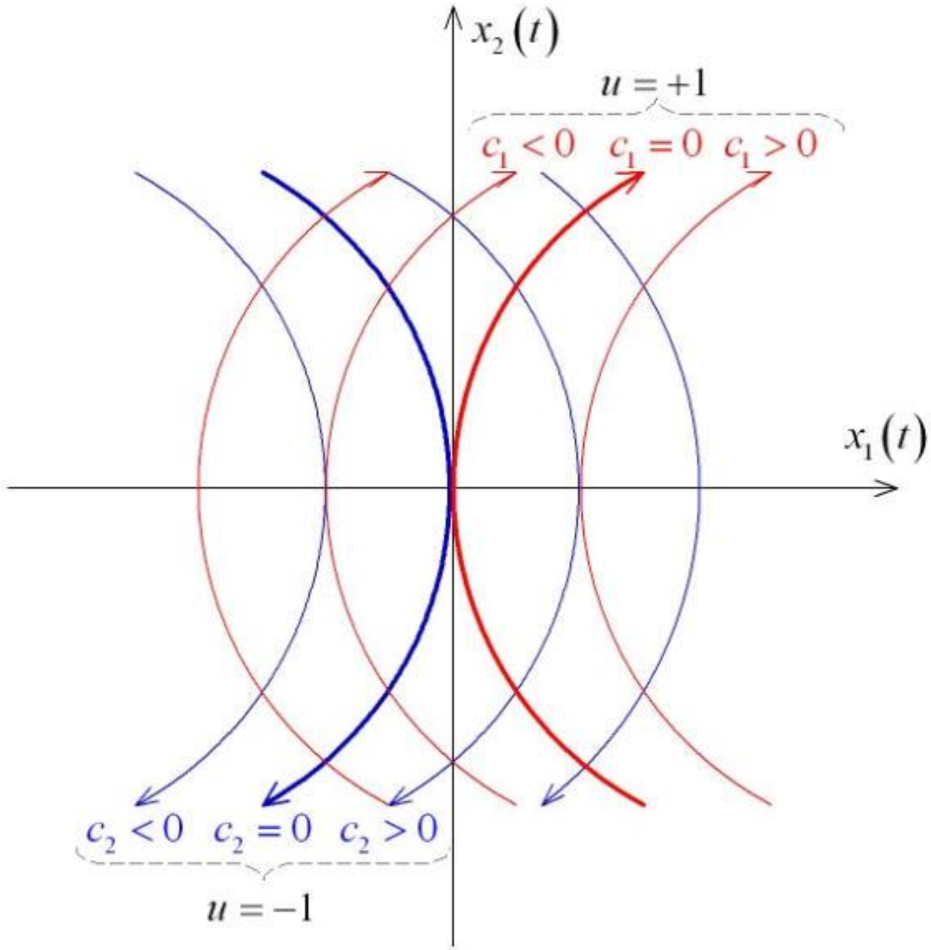
$$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$$

$$u = +1 \qquad\qquad\qquad\qquad u = -1$$

$$t = x_2^*(t) - x_2^*(0) \qquad\qquad t = x_2^*(0) - x_2^*(t)$$

$$x_1^*(t) = \underbrace{x_1^*(0) - \frac{1}{2}x_2^2(0)}_{c_1} + \frac{1}{2}x_2^2(t) \qquad x_1^*(t) = \underbrace{x_1^*(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)}_{c_2} - \frac{1}{2}x_2^2(t)$$

# Παράδειγμα 1 (5)



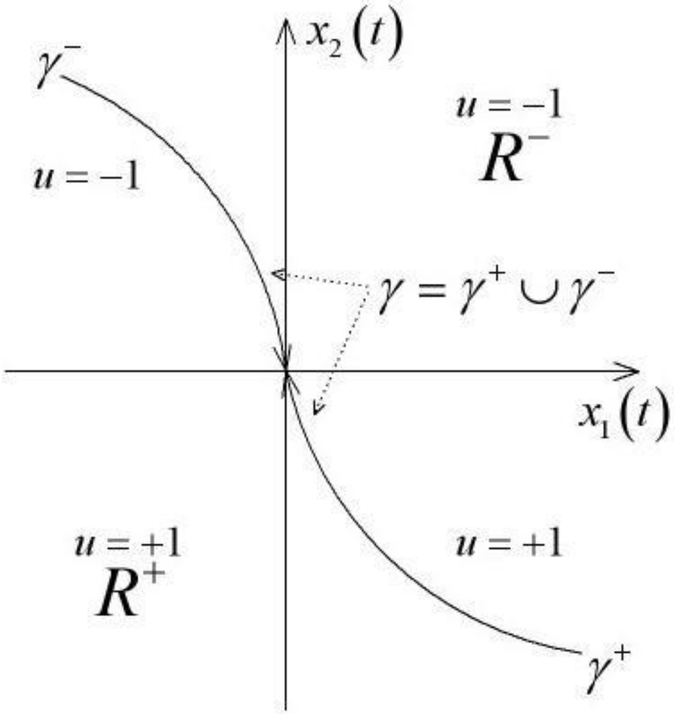
# Παράδειγμα 1 (6)

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{array}\right\} \\ x_1(t) = x_1(0) - \frac{1}{2}Ux_2^2(0) + \frac{1}{2}Ux_2^2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x_1(0) - \frac{1}{2}Ux_2^2(0) = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}Ux_2^2(t)$$

# Παράδειγμα 1 (7)




$$\gamma^+ = \left\{(x_1, x_2): x_1 = \frac{1}{2}x_2^2, x_2 \le 0\right\}$$

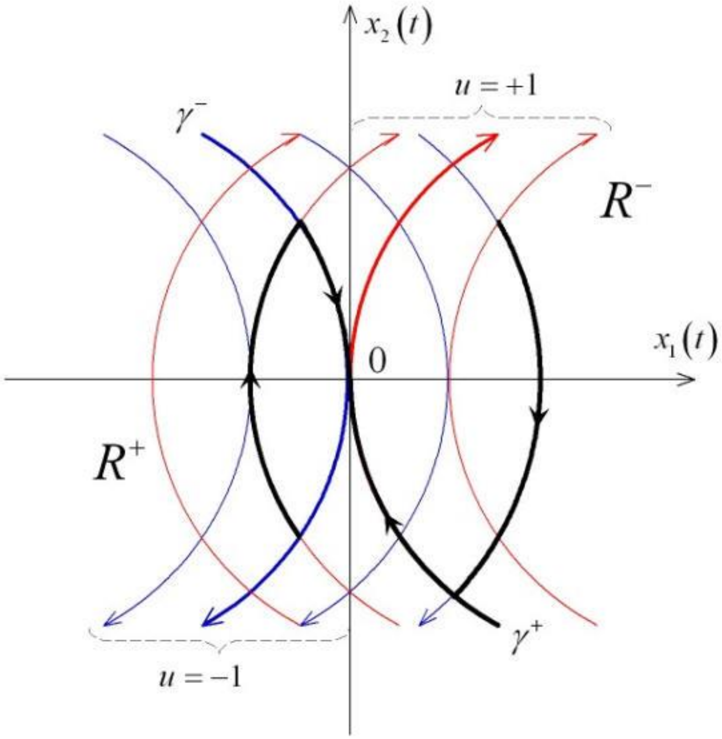
$$\gamma^- = \left\{(x_1, x_2): x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2, x_2 \ge 0\right\}$$

$$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- = \left\{(x_1, x_2): x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|\right\}$$

$$R^- = \left\{(x_1, x_2): x_1 > -\tfrac{1}{2}x_2|x_2|\right\} \rightarrow \mathrm{u} = -1$$

$$R^+ = \left\{(x_1, x_2): x_1 < -\tfrac{1}{2}x_2|x_2|\right\} \rightarrow \mathrm{u} = +1$$

# Παράδειγμα 1 (8)




*i.* $(x_1, x_2) \in \gamma^-$

*ii.* $(x_1, x_2) \in \gamma^+$

*iii.* $(x_1, x_2) \in R^+$

*iv.* $(x_1, x_2) \in R^-$

# Άσκηση 1 (1)

**Άσκηση:**

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad\qquad |u| \leq 1$$

$$\dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - x_2(t) + u(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 2 \qquad\qquad \textbf{TOCP}$$

$$J(x,u) = \int_0^{t_f} 1dt$$

$$H(x,u,p) = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(6x_1(t) - x_2(t) + u(t))$$

Συνεπώς από την αρχή ελάχιστου του Pontryagin:

$$H(x^*,u^*,p^*) \leq H(x^*,u,p^*)\ \forall u\colon |u(t)| \leq 1$$

$$1 + p_1^* x_2^* + p_2^*(6x_1^* - x_2^* + u^*) \leq 1 + p_1^* x_2^* + p_2^*(6x_1^* - x_2^* + u)$$

$$\Leftrightarrow p_2^* u^* \leq p_2^* u\ \forall u\colon |u(t)| \leq 1$$

# Άσκηση 1 (2)

$$u(t)=\begin{cases}-1 & p_2^*(t)>0\\ +1 & p_2^*(t)<0\\ \alpha\upsilon\theta. & p_2^*(t)=0\end{cases}$$

$$\left\{l=[B \quad AB]=\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\middle| \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, rank_{\mathbb{R}} l=1\right\}$$

**Normal TOCP**

$$\dot{p}^*(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\dot{p}_1^*(t)&=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-6p_2(t)\\ \dot{p}_2^*(t)&=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-p_1(t)+p_2(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

# Άσκηση 1 (3)

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1^*(t) \\ \dot{p}_1^*(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{-A^T} \begin{pmatrix} p_1^*(t) \\ p_2^*(t) \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές του $-A^T$: $det[sI + A^T] = \begin{bmatrix} s & 6 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} = s^2 - s - 6$

(Ιδιοτιμές 3,-2)

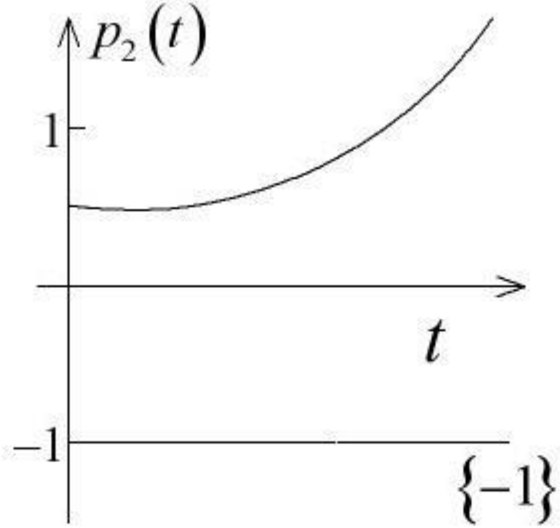
Οπότε η λύση: $p_2(t) = Le^{-2t} + Me^{3t}$

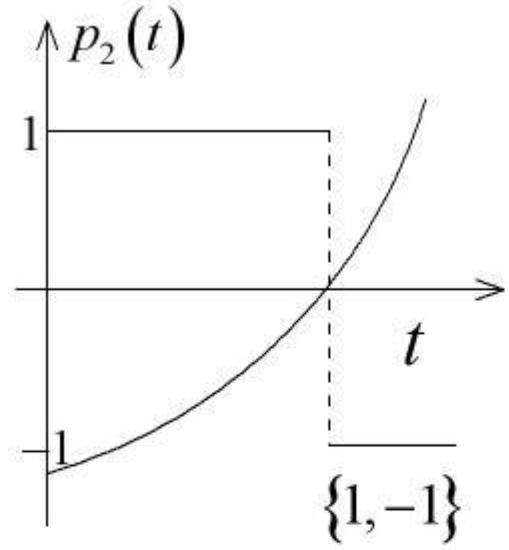
Πιο συγκεκριμένα:

$$p_2(t) = \frac{1}{2}(p_1(0) + 2p_2(0))e^{-2t} - \frac{1}{2}\big(p_1(0) - 3p_2(0)\big)e^{3t}$$

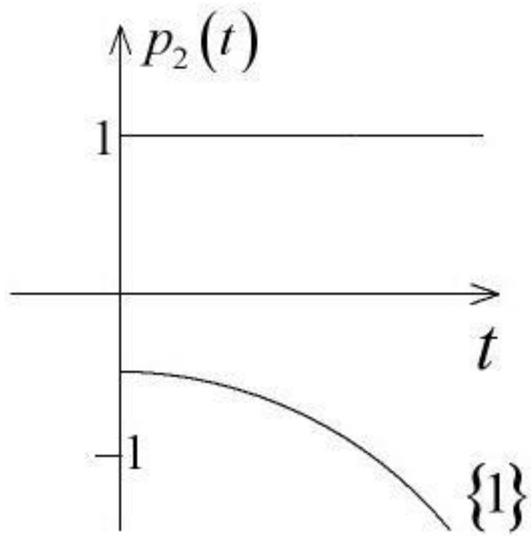
και συνεπώς τέμνει τον $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

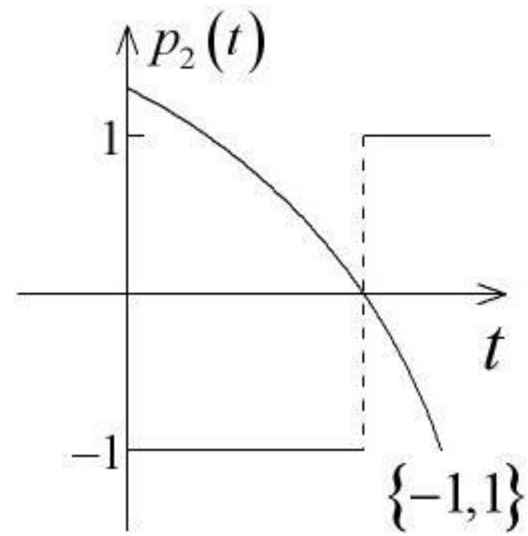
# Άσκηση 1 (4)



# Άσκηση 1 (5)



# Άσκηση 1 (6)

Υπολογίζουμε τα ιδιόμορφα σημεία

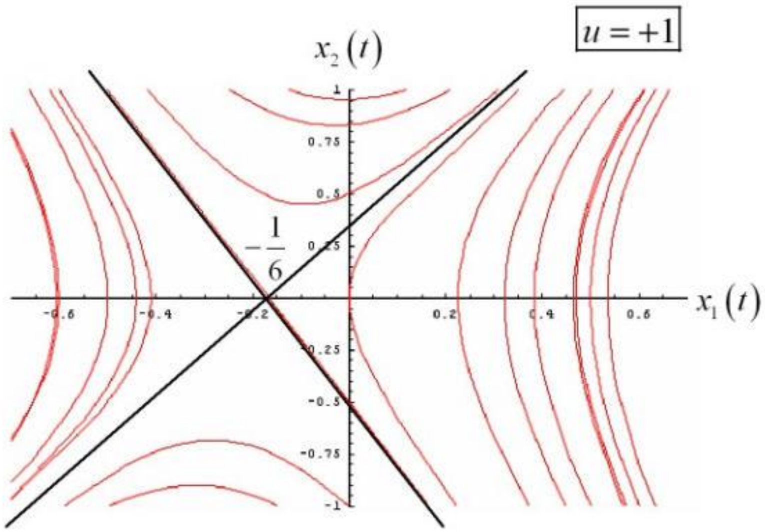
$$(\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0) \Rightarrow$$
$$(x_1(t) = c_1, x_2(t) = c_2)$$

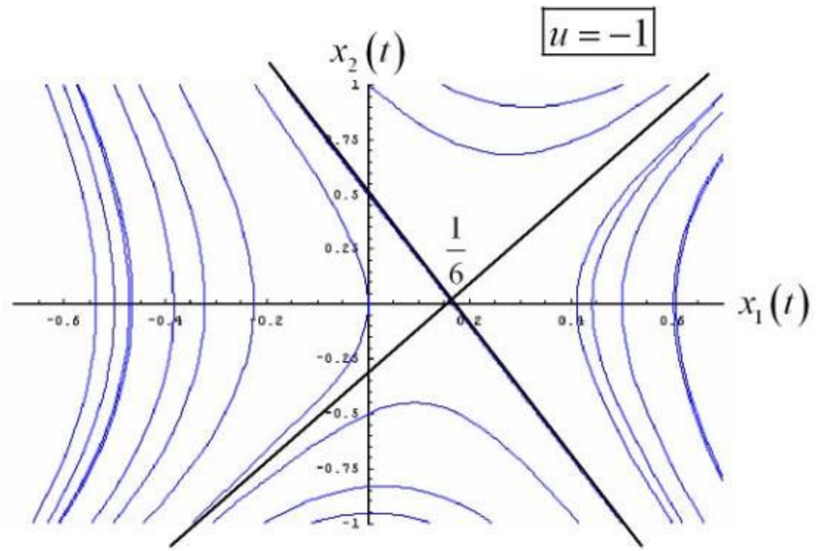
$\boxed{u = +1}$ $$\left.\begin{array}{c} x_2 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 = -1/6 \end{array}$$

$\boxed{u = -1}$ $$\left.\begin{array}{c} x_2 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 = 1/6 \end{array}$$

Σχεδιάζω τις τροχιές $x_1 - x_2$ για $u = \pm 1$.

# Άσκηση 1 (7)

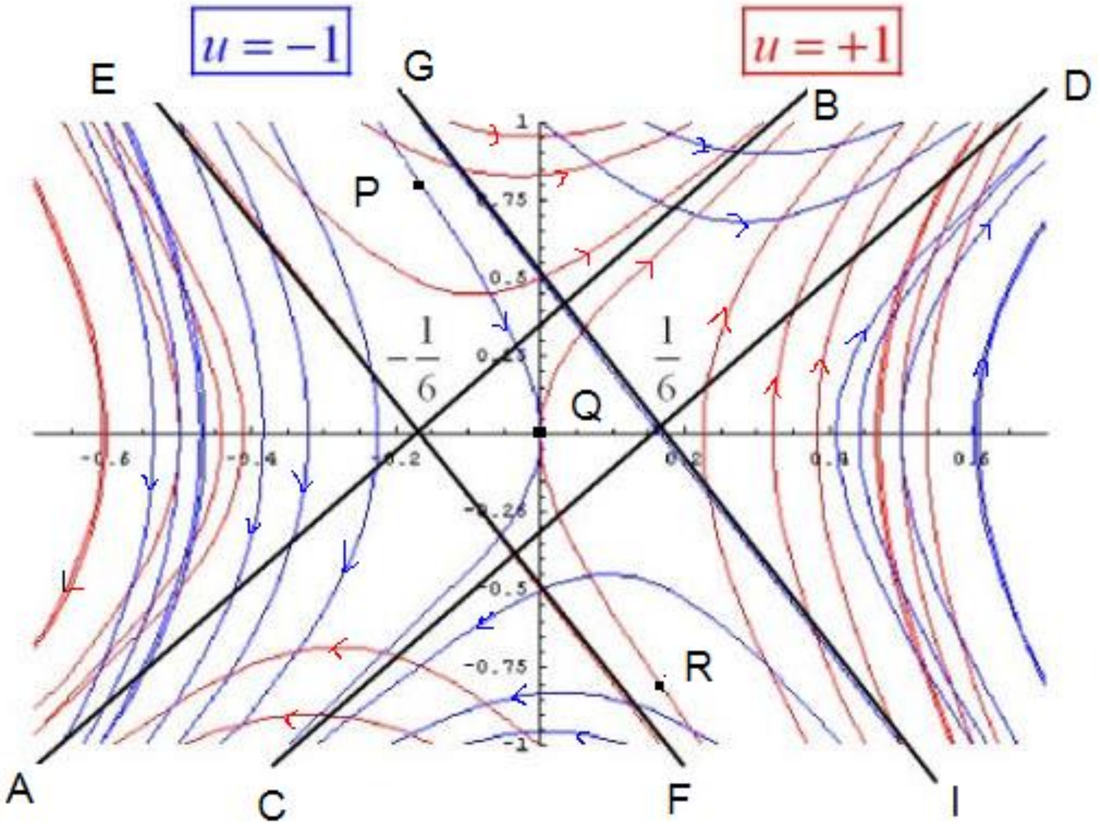



u=+1

u=-1

# Άσκηση 1 (8)



# Άσκηση για σπίτι

**Άσκηση (εξετάσεις 2003)**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Ιδιοτιμές {-2,2} ασταθές & ελέγξιμο.

Θέλουμε να μεταφέρουμε το σύστημά μας από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $x(0) = (x_1(0) \quad x_2(0))^T$ στην μηδενική κατάσταση στον ελάχιστο δυνατό χρόνο

a) όταν η είσοδος δεν είναι φραγμένη.

b) όταν $|u(t)| \leq 1$.

# Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων
# Fuel optimal control problem (1)

**Fuel Optimal Control Problem (FOCP)**

$$\text{(1)} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad |u(t)| \leq 1 \text{ ή } \left|u_J(t)\right| \leq 1$$

$$J(u) = \int_0^{t_f} \sum_{j=1}^{r} \left|u_j(t)\right| dt$$

**Πρόβλημα ελάχιστων καυσίμων:** Να βρεθεί είσοδος $u^*(t)$ που να οδηγεί το σύστημα (1) από κάθε αρχική συνθήκη $x(0)$ σε οποιαδήποτε δεδομένη τελική συνθήκη $x\left(t_f\right)$ (συνήθως $x\left(t_f\right) = 0$ ) και η οποία θα ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J(u)$.

Ορίζουμε την Χαμιλτονιανή:

$$H(x, u, p) = \sum_{j=1}^{r} \left|u_j(t)\right| + p^T(t)Ax(t) + p^T(t)Bu(t)$$

# Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων
# Fuel optimal control problem (2)

$$H(x^*, u^*, p^*) \le H(x^*, u, p^*)\ \forall u\colon |u(t)| \le 1$$

$$\Leftrightarrow \textstyle\sum_{j=1}^{r} \left|u_j^*(t)\right| + p^{*T}(t)Ax^*(t) + p^{*T}(t)Bu^*(t) \le$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{r} \left|u_j(t)\right| + p^{*T}(t)Ax^*(t) + p^{*T}(t)Bu(t)\ \forall u\colon |u(t)| \le 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r} \left|u_j^*(t)\right| + p^{*T}(t)Bu^*(t) \le \sum_{j=1}^{r} \left|u_j(t)\right| + p^{*T}(t)Bu(t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r} \left|u_j^*(t)\right| + u^{*T}(t)\,\underbrace{B^T p^*(t)}_{q^*(t)} \le \sum_{j=1}^{r} \left|u_j(t)\right| + u^{T}(t)\,\underbrace{B^T p^*(t)}_{q^*(t)}$$

# Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων
# Fuel optimal control problem (3)

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r} \left|u_j^*(t)\right| + u^{*T}(t)\,\underbrace{B^T p^*(t)}_{q^*(t)} \leq \sum_{j=1}^{r} \left|u_j(t)\right| + u^{T}(t)\,\underbrace{B^T p^*(t)}_{q^*(t)}$$

$$\downarrow \quad q(t) = B^T p^*(t)$$

$$\sum_{j=1}^{r} \left\{\left|u_j^*(t)\right| + u_j^*(t) q_j^*(t)\right\} \leq \sum_{j=1}^{r} \left\{\left|u_j(t)\right| + u_j(t) q_j^*(t)\right\}$$

$$\left|u_j(t)\right| = \begin{cases} u_j(t) & u_j(t) \geq 0 \\ -u_j(t) & u_j(t) \leq 0 \end{cases} \qquad \downarrow$$

# Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων
# Fuel optimal control problem (4)

$$\min_{|u_j(t)|\le 1}\left\{\left|u_j(t)\right| + u_j(t)q_j^*(t)\right\} = \begin{cases} \min\limits_{|u_j(t)|\le 1}\left\{\left(1+q_j^*(t)\right)u_j(t)\right\} & u_j(t)\ge 0 \\ \min\limits_{|u_j(t)|\le 1}\left\{\left(-1+q_j^*(t)\right)u_j(t)\right\} & u_j(t)\le 0 \end{cases}$$

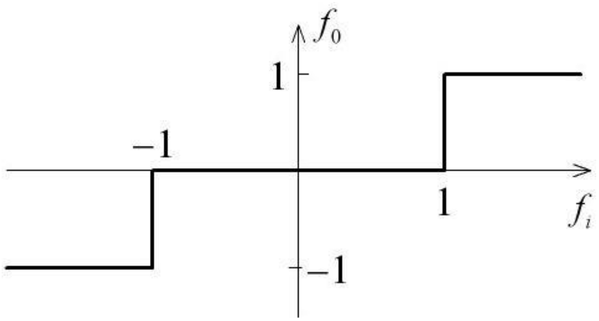
| **Πιθανές τιμές για $\boldsymbol{q_j^*(t)}$** | **Τιμές για $\boldsymbol{u_j^*(t)}$** | **Ελάχιστη τιμή** $\left\|u_j(t)\right\| + u_j(t)\boldsymbol{q_j}(t)$ |
|---|---|---|
| $q_j^*(t) > 1$<br>$q_j^*(t) < -1$ | $u_j^*(t) = -1$<br>$u_j^*(t) = +1$ | $1 - q_j^*(t)$<br>$1 + q_j^*(t)$ |
| $q_j^*(t) = 1$<br>$q_j^*(t) = -1$ | $-1 \le u_j^*(t) \le 0$<br>$0 \le u_j^*(t) \le 1$ | 0<br>0 |
| $-1 < q_j^*(t) < 1$ | $u_j^*(t) = 0$ | 0 |

# Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων
# Fuel optimal control problem (5)

$$u_j^*(t) = \begin{cases} 0 & \left|q_j^*(t)\right| < 1 \\ -Sgn\{q_j(t)\} & \left|q_j^*(t)\right| > 1 \\ \alpha\pi\rho o\sigma. & \left|q_j^*(t)\right| = 1 \end{cases}$$

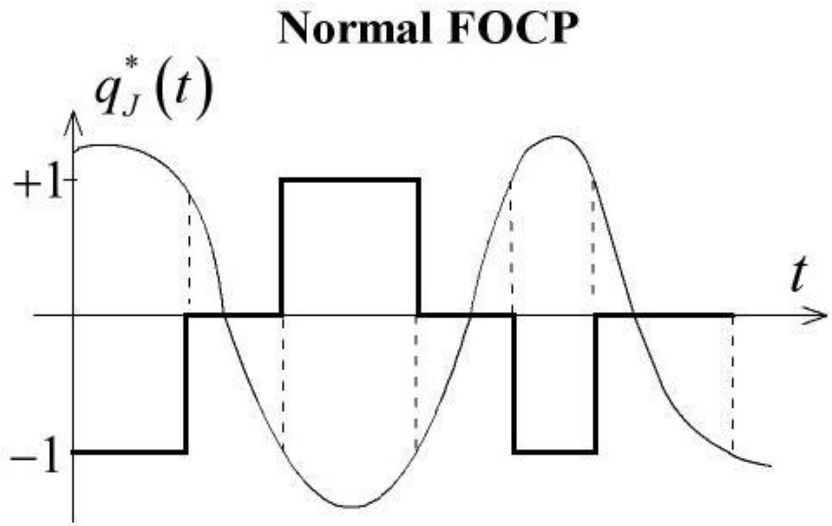
Αν τώρα ορίσουμε την συνάρτηση (<u>dead zone function</u>)

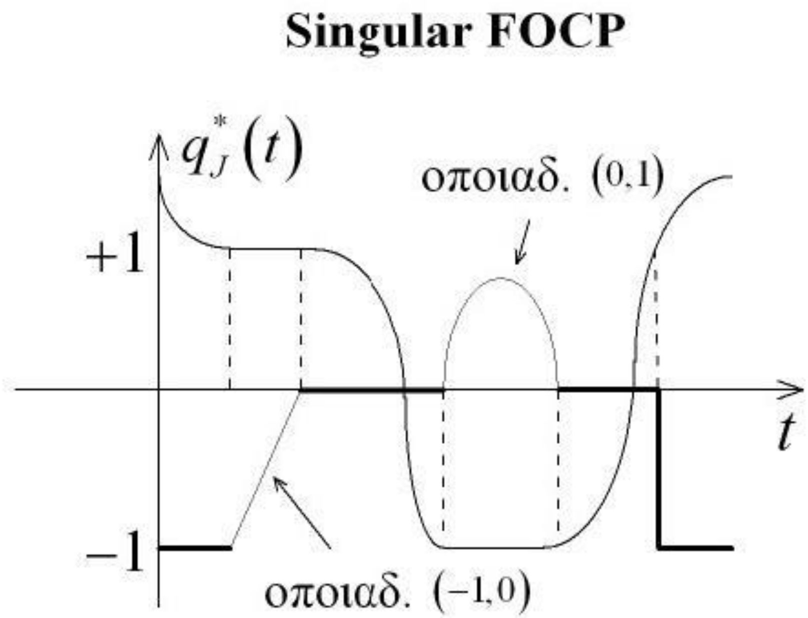
$$f_0 = dez\{f_i\} = \begin{cases} 0 & |f_i| < 1 \\ Sgn\{f_i\} & |f_i| > 1 \end{cases}$$




$$u_j^*(t) = -dez\{q_j^*(t)\} = -dez\{b_j^T p^*(t)\}$$

# Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων
# Fuel optimal control problem (6)



# Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων
# Fuel optimal control problem (7)

$$\left.\begin{array}{r}\left|q_j^*(t)\right| = 1 \; \forall t \in [t_0, t_1] \\ \left|q_j^*(t)\right| = \left|b_j^T p^*(t)\right| = 1 \\ \dot{p}^*(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -A^T p^*(t) \Rightarrow p^*(t) = e^{-A^T t} p(0)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}b_j^T e^{-A^T t} p(0) = \pm 1 \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} b_j^T A^T e^{-A^T t} p(0) = 0 \\ \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} b_j^T (A^T)^2 e^{-A^T t} p(0) = 0 \\ \cdots \\ \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} b_j^T (A^T)^n e^{-A^T t} p(0) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

# Πρόβλημα ελαχίστων καυσίμων Fuel optimal control problem (8)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_j & Ab_j & \cdots & A^{n-1}b_j \end{bmatrix}^T A^T p^*(t) = 0 \; \forall t \in [t_0, t_1]$$

Αλλά $p^*(t) \neq 0$ (διαφορετικά $q_j^*(t) = b_j^T \cdot 0 = 0 \neq 1$)

και συνεπώς θα πρέπει

$$\begin{bmatrix} b_j & Ab_j & \cdots & A^{n-1}b_j \end{bmatrix}^T A^T = 0$$

**<u>Συμπέρασμα:</u>**

a) Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο.

b) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος.

τότε έχω ένα κανονικό (normal) βέλτιστο πρόβλημα καυσίμων.

# Παράδειγμα 2 (1)

Έστω το σύστημα $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}, |u(t)| \leq 1$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$l = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Δημιουργούμε την Χαμιλτονιανή:

$$H(x, u, p) = |u(t)| + p_1(t) x_2(t) + p_2(t) u\,(t)$$

# Παράδειγμα 2 (2)

και εφαρμόζουμε την αρχή ελαχίστου του Pontryagin

$$H(x^*, u^*, p^*) \leq H(x^*, u, p^*)\ \forall u\colon |u(t)| \leq 1$$

$$\Rightarrow |u^*(t)| + p_1^*(t)x_2^*(t) + p_2^*(t)u^*(t)$$
$$\leq |u(t)| + p_1^*(t)x_2^*(t) + p_2^*(t)u\ (t)$$
$$\Rightarrow |u^*(t)| + p_2^*(t)u^*(t) = \min_{|u(t)|\leq 1}\{|u(t)| + p_2^*(t)u\ (t)\ \}$$

$$|u(t)| = \begin{cases} u(t), & u(t) \geq 0 \\ -u(t), & u(t) \leq 0 \end{cases} \downarrow$$

$$\min_{|u(t)|\leq 1}\{|u(t)| + p_2^*(t)u\ (t)\} = \begin{cases} \min\limits_{|u(t)|\leq 1}\{\left(1 + p_2^*(t)\right)u\ (t)\}, & u\ (t) \geq 0 \\ \min\limits_{|u(t)|\leq 1}\{\left(-1 + p_2^*(t)\right)u\ (t)\}, & u\ (t) \leq 0 \end{cases}$$

# Παράδειγμα 2 (3)

| **Περιπτώσεις για** $p_2^*(t)$ | **Τιμές για** $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$ | **Ελάχιστη τιμή** $\boldsymbol{min}\{\lvert u(t)\rvert + p_2^*(t)u(t)\}$ |
|---|---|---|
| $p_2^*(t) > 1$ | $u^*(t) = -1$ | $1 - p_2^*(t)$ |
| $p_2^*(t) < -1$<br>$p_2^*(t) = 1$ | $u^*(t) = +1$<br>$-1 \le u^*(t) \le 0$ | $1 + p_2^*(t)$<br>0 |
| $p_2^*(t) = -1$<br>$-1 < p_2^*(t) < 1$<br>ή $\lvert p_2^*(t)\rvert < 1$ | $0 \le u^*(t) \le 1$<br>$u^*(t) = 0$ | 0<br>0 |

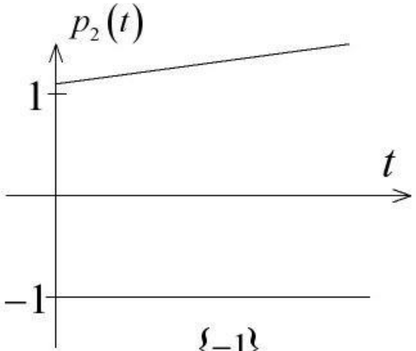
$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \lvert p_2^*(t)\rvert < 1 \\ -Sgn\{p_2^*(t)\}, & \lvert p_2^*(t)\rvert > 1 \\ οποιαδ.σε\ (-1,0)\ η\ (0,1), & \lvert p_2^*(t)\rvert = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{u^*(t) = -dez\big(p_2^*(t)\big)}$$

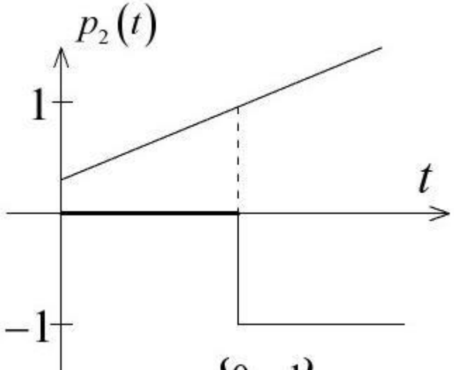
# Παράδειγμα 2 (4)

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t) \end{cases}$$

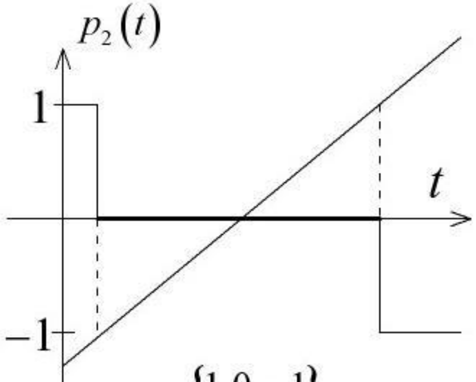
$$\Rightarrow \begin{cases} p_1(t) = p_1(0) \\ p_2(t) = -p_1(0)t + p_2(0) \end{cases}$$




$\{-1\}$

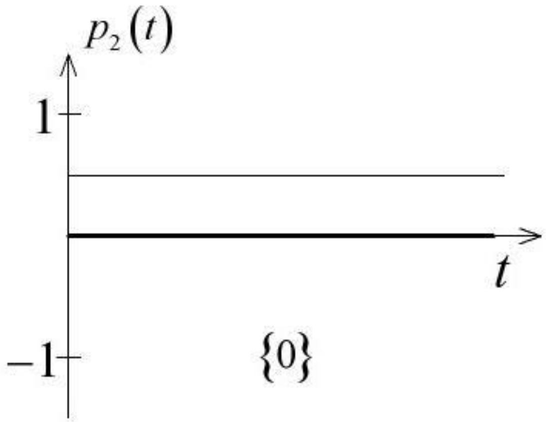


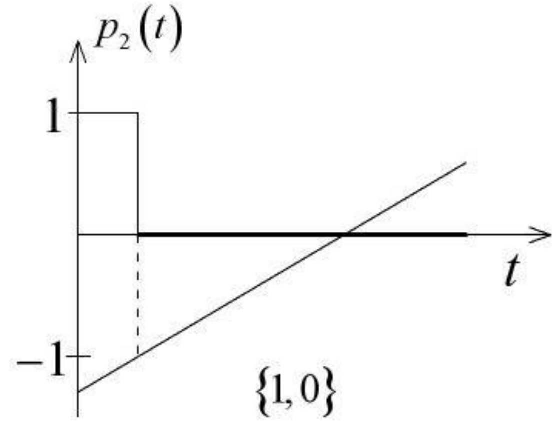

$\{0,-1\}$

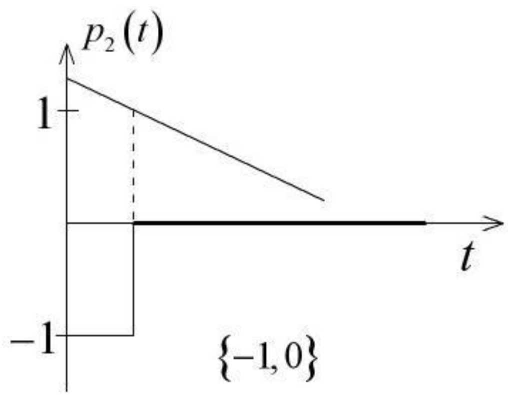



$\{1,0,-1\}$

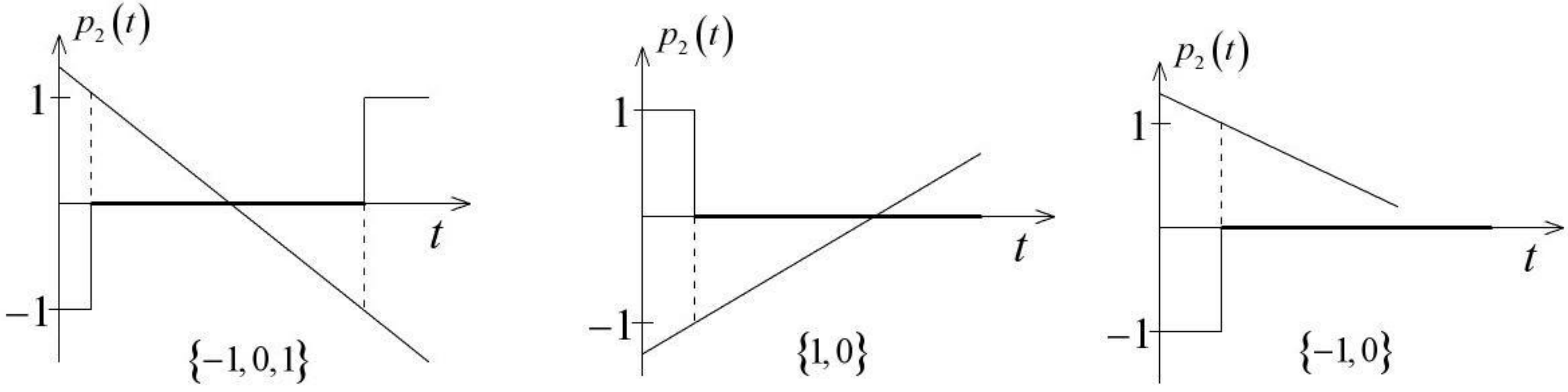
# Παράδειγμα 2 (5)



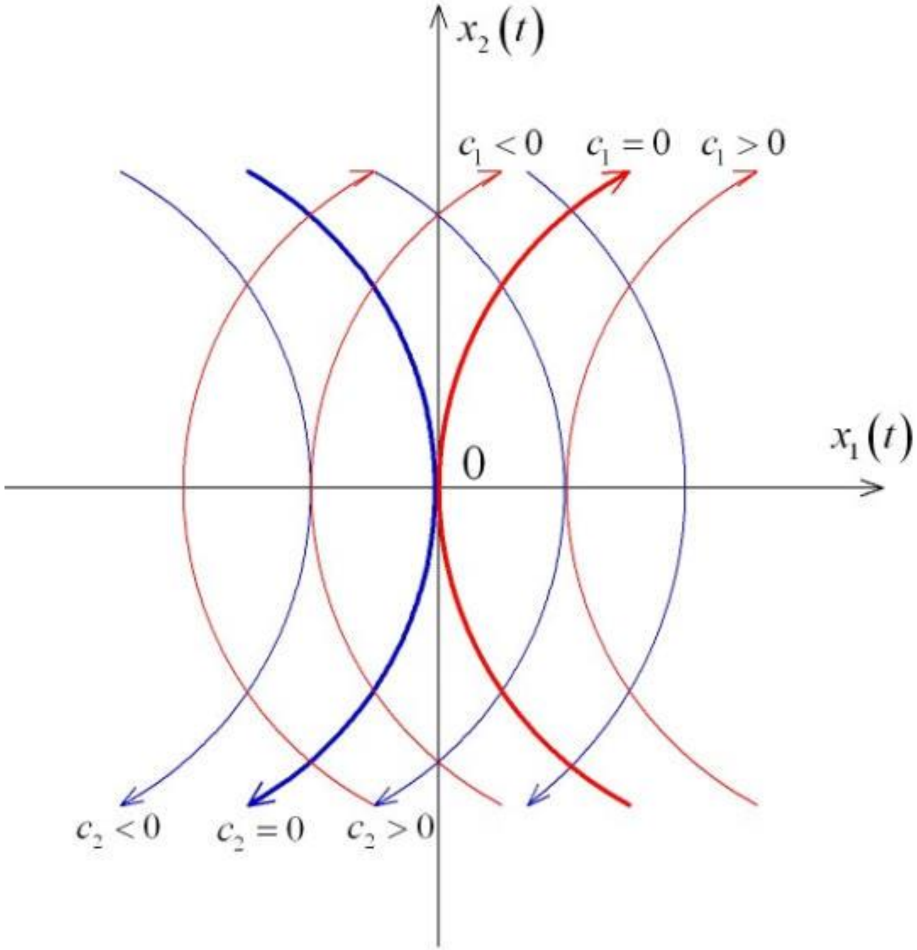
# Παράδειγμα 2 (6)



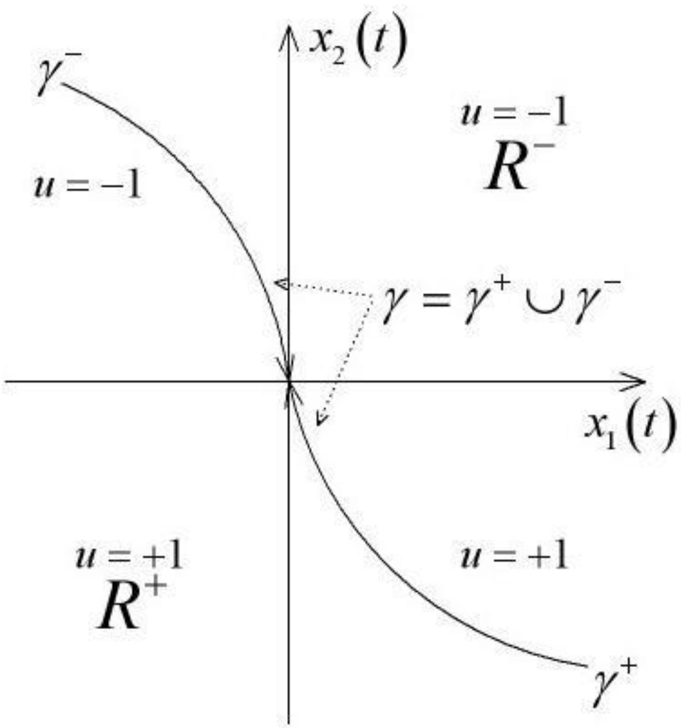

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ x_2(t) &= U \in \mathbb{R}\end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \frac{x_2(t) - x_2(0)}{U}$$

$$x_1(t) = \left\{x_1(0) - \frac{1}{2}Ux_2^2(0)\right\} + \frac{1}{2}Ux_2^2(t)$$

# Παράδειγμα 2 (6)



# Παράδειγμα 2 (7)




$$\gamma^+ = \left\{(x_1, x_2): x_1 = \frac{1}{2}x_2^2, x_2 \leq 0\right\}$$

$$\gamma^- = \left\{(x_1, x_2): x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2, x_2 \geq 0\right\}$$

$$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- = \left\{(x_1, x_2): x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|\right\}$$

$$R^- = \left\{(x_1, x_2): x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2|\right\}$$

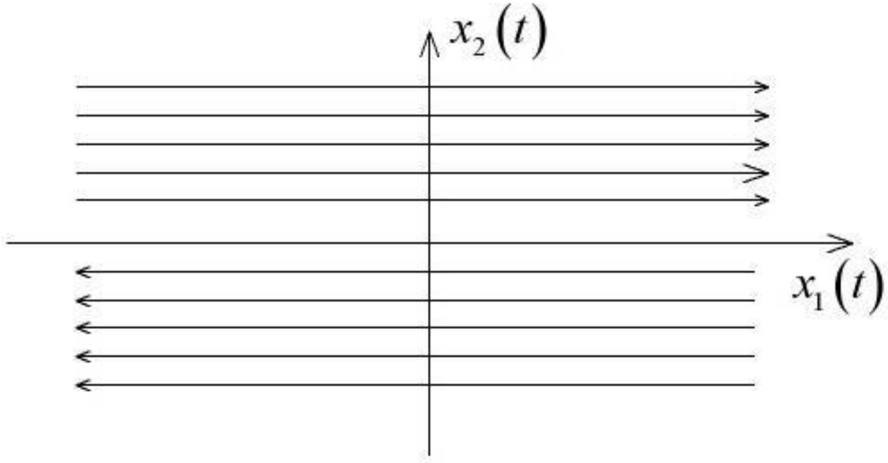
$$R^+ = \left\{(x_1, x_2): x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2|\right\}$$

# Παράδειγμα 2 (8)

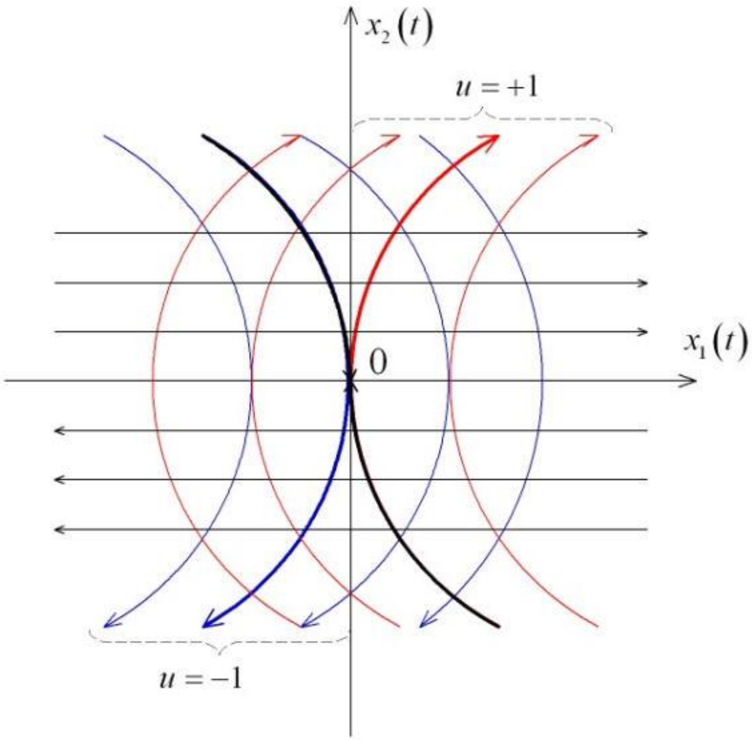
Επιπλέον εκτός από $U = \pm 1$ έχουμε και $U = 0$, για την οποία έχουμε:

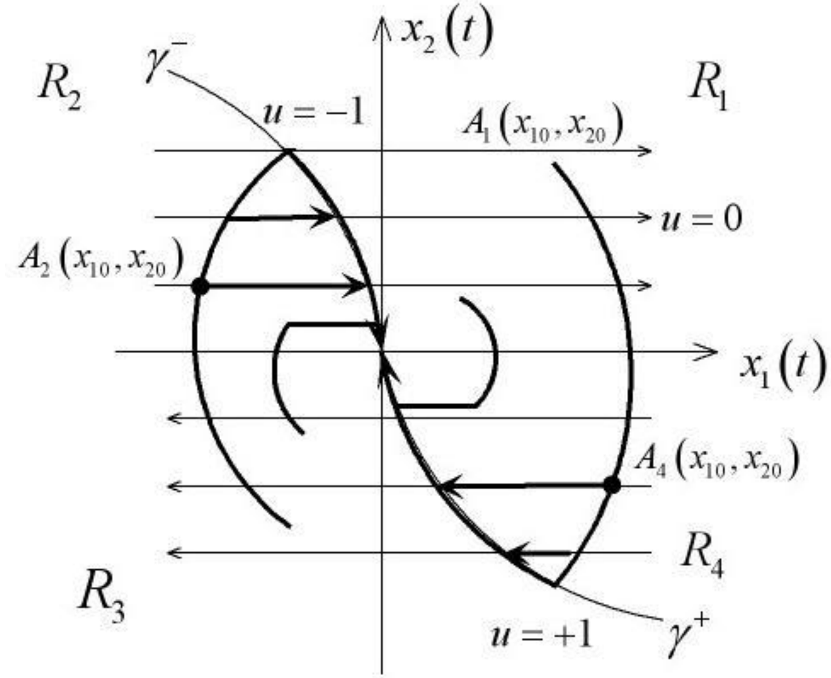
$$\left.\begin{array}{c}\dot{x}_1(t) = x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}x_1(t) = x_2(0)t + x_1(0)\\ x_2(t) = x_2(0)\end{array}\right.$$

$$t = \frac{x_1(t) - x_1(0)}{x_2(0)}$$



# Συνδυασμός των γραφικών παραστάσεων για $U = \{\pm 1, 0\}$




**<u>Συμπεράσματα:</u>**

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & \forall (x_1, x_2) \in \gamma^+ \\ -1, & \forall (x_1, x_2) \in \gamma^- \\ 0, & \forall (x_1, x_2) \in R_2 \cup R_4 \end{cases}$$

# Παράδειγμα 2 (9)

Για τη μετακίνηση από το σημείο $A_1(x_{10}, x_{20})$ στο $A_4\left(x'_{10}, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$ σε χρόνο $t_1$ θα έχουμε από τις εξισώσεις κατάστασης

$$x_2^*(t) = x_2^*(0) + Ut \xRightarrow{U=-1, x_2^*(t_1)=-\frac{\varepsilon}{2}} -\frac{\varepsilon}{2} = x_2^*(0) - t_1 \Rightarrow$$

$$t_1 = x_2^*(0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

και άρα ο δείκτης απόδοσης για αυτή τη διαδρομή θα είναι:

$$J_1(u) = \int_0^{t_1} |u(t)| dt = \int_0^{x_2^*(0)+\frac{\varepsilon}{2}} |-1| dt = x_2^*(0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Για τη μετακίνηση από το σημείο $A_4\left(x'_{10}, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$ στο $B\left(x''_{10}, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$

# Παράδειγμα 2 (10)

δε δαπανούμε είσοδο (χρόνος $t_2$), επειδή η είσοδος που χρησιμοποιούμε είναι $u = 0$, και άρα $J_2(u) = 0$.

Για τη μετακίνηση από το σημείο $B\left(x''_{10}, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$ στο $O(0{,}0)$σε χρόνο $t_3$ θα έχουμε από τις εξισώσεις κατάστασης

$$x_2^*(t) = x_2^*(0) + Ut \xrightarrow{U=+1, x_2^*(t_3)=0} 0 = -\frac{\varepsilon}{2} + t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{\varepsilon}{2}$$

και άρα ο δείκτης απόδοσης για αυτή την διαδρομή θα είναι:

$$J_3(u) = \int_0^{t_3} |u(t)| dt = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} |+1| dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ο συνολικός δείκτης απόδοσης θα είναι:

$$J(u) = J_1(u) + J_2(u) + J_3(u) = x_2^*(0) + \varepsilon$$

# Παράδειγμα 2 (11)

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & \forall\big(x_1(0), x_2(0)\big) \in \gamma^+ \\ -1 & \forall\big(x_1(0), x_2(0)\big) \in \gamma^- \\ 0 & \forall\big(x_1(0), x_2(0)\big) \in R_2 \cup R_4 \\ \delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi\alpha\rho\chi\varepsilon\iota & \forall\big(x_1(0), x_2(0)\big) \in R_1 \cup R_3 \end{cases}$$

Στην περίπτωση που $\big(x_1(0), x_2(0)\big) \in R_1 \cup R_3$ υπάρχει ε-βέλτιστη λύση.

# Το πρόβλημα ελαχίστης ενέργειας (1)

Έστω

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$\left|u_j(t)\right| \leq 1, j = 1,2, \dots, m$$

Έστω επίσης ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $x(t_0)$, ενώ το τελικό διάνυσμα κατάστασης είναι $x(t_f)$ (συνήθως $x(t_f) = 0$).

Το *πρόβλημα ελάχιστης ενέργειας (energy-optimal control problem*) έχει ως στόχο την εύρεση της βέλτιστης εισόδου $u^*$ η οποία :

a) Ικανοποιεί τον περιορισμό που δόθηκε παραπάνω.
b) Οδηγεί το σύστημα από την αρχική κατάσταση $x(t_0)$ σε οποιαδήποτε επιθυμητή τελική κατάσταση π.χ. $x(t_f) = 0$ με $t_f$ σταθερό ή ελευθερο, και

# Το πρόβλημα ελαχίστης ενέργειας (2)

c) Ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T(t)Ru(t)dt$$

όπου ο πίνακας $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος.

$$H\big(x(t), u(t), p(t)\big) = \frac{1}{2}u^T(t)Ru(t) + p(t)^T Ax(t) + p(t)^T Bu(t)$$

Σύμφωνα με την αρχή ελαχίστου του Pontryagin

$$H\big(x^*(t), u^*(t), p^*(t)\big) \le H\big(x^*(t), u(t), p^*(t)\big) \qquad \left|u_j(t)\right| \le 1$$

$$\downarrow$$

# Το πρόβλημα ελαχίστης ενέργειας (3)

$$\frac{1}{2}u^{*T}(t)Ru^*(t) + p^*(t)^T Ax^*(t) + p^*(t)^T Bu^*(t)$$
$$\leq \frac{1}{2}u^T(t)Ru(t) + p^*(t)^T Ax^*(t) + p^*(t)^T Bu(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}u^{*T}(t)Ru^*(t) + p^*(t)^T Bu^*(t) \leq \frac{1}{2}u^T(t)Ru(t) + p^*(t)^T Bu(t) \Leftrightarrow$$
$$\downarrow$$
$$\frac{1}{2}u^{*T}(t)Ru^*(t) + u^*(t)^T B^T p^*(t) \leq \frac{1}{2}u^T(t)Ru(t) + u(t)^T B^T p^*(t)$$
$$|u_j(t)| \leq 1$$

$$q^*(t) = R^{-1}B^T p^*(t) \quad \downarrow \quad Rq^*(t) = B^T p^*(t)$$

$$\frac{1}{2}u^{*T}(t)Ru^*(t) + u^*(t)^T Rq^*(t) \leq \frac{1}{2}u^T(t)Ru(t) + u(t)^T Rq^*(t)$$
$$|u_j(t)| \leq 1$$

# Το πρόβλημα ελαχίστης ενέργειας (4)

$$\frac{1}{2}q^{*T}(t)Rq^*(t) = \frac{1}{2}(R^{-1}B^Tp^*(t))^T R\left(R^{-1}B^Tp^*(t)\right)$$
$$= \frac{1}{2}p^*(t)^T BR^{-1}RR^{-1}B^Tp^*(t) = \frac{1}{2}p^*(t)^T BR^{-1}B^Tp^*(t)$$

$$\downarrow$$

$$\left(u^*(t) + q^*(t)\right)^T R\left(u^*(t) + q^*(t)\right)$$
$$\leq \left(u(t) + q^*(t)\right)^T R\left(u(t) + q^*(t)\right)$$

$$\left|u_j(t)\right| \leq 1$$

Ή ισοδύναμα:

$$\downarrow$$

$$w^*(t)^T Rw^*(t) = \min_{\left|u_j(t)\right|\leq 1} w(t)^T Rw(t) \leq w(t)^T Rw(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} w^*(t) = u^*(t) + q^*(t) = u^*(t) + R^{-1}B^Tp^*(t) \\ w(t) = u(t) + q^*(t) = u(t) + R^{-1}B^Tp^*(t) \end{array}}$$

# Το πρόβλημα ελαχίστης ενέργειας (4)

$$R = M \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}}_{D} M^T$$

$$\downarrow$$

$$w(t)^T R w(t) = w(t)^T M D M^T w(t) = \underbrace{(M^T w(t))^T}_{v(t)^T} D \underbrace{(M^T w(t))}_{v(t)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} d_i v_i(t)^2$$

$$\downarrow \quad MM^T = I$$

# Το πρόβλημα ελαχίστης ενέργειας (5)

$$v(t)^T v(t) = \left(M^T w(t)\right)^T \left(M^T w(t)\right) = w(t)^T M M^T w(t) =$$
$$= w(t)^T w(t)$$

$$\downarrow$$

$$\min_{|u_j(t)|\le 1} \; w(t)^T R w(t) = \min_{|u_j(t)|\le 1} \sum_{i=1}^{m} d_i v_i(t)^2 \overset{d_i>0}{\Longrightarrow}$$

$$\min_{|u_j(t)|\le 1} \; w(t)^T R w(t) = \sum_{i=1}^{m} \min_{u_i(t)} v_i(t)^2 = \sum_{i=1}^{m} \min_{u_i(t)} w_i(t)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \min_{u_i(t)} (u_i(t) + q_i^*(t))^2$$

# Το πρόβλημα ελαχίστης ενέργειας (6)

$$\min_{|u_i(t)|\le 1} w(t)^T R w(t) = \min_{|u_j(t)|\le 1} \sum_{i=1}^{m} d_i v_i(t)^2 \overset{d_i>0}{=} \sum_{i=1}^{m} \min_{u_i(t)} v_i(t)^2 = \sum_{i=1}^{m} \min_{u_i(t)} w_i(t)^2 = \sum_{i=1}^{m} \min_{u_i(t)} (u_i(t) + q_i^*(t))^2$$

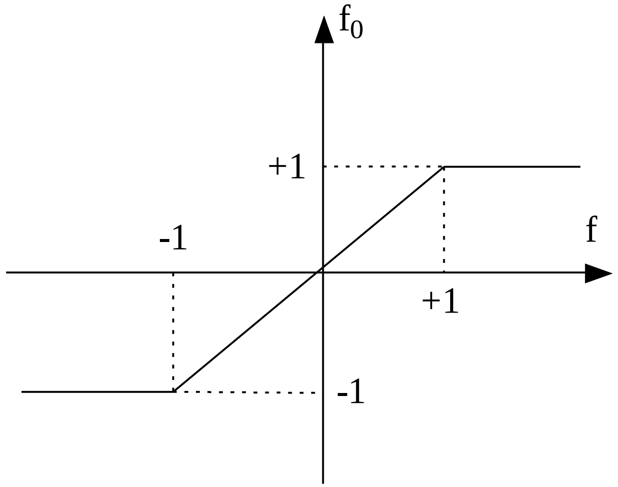
$$u_i^*(t) = \begin{cases} -q_i^*(t) & |q_i^*(t)| \le 1 \\ +1 & q_i^*(t) < -1 \\ -1 & q_i^*(t) > +1 \end{cases}$$

Αν τώρα ορίσουμε την συνάρτηση (saturation function)

$$f_0 = sat\{f_i\} = \begin{cases} f_i & |f_i| \le 1 \\ sgn\{f_i\} & |f_i| > 1 \end{cases}$$

$$u_i^*(t) = -sat\{q_i^*(t)\}$$

# Saturation function




$$\boxed{u^*(t) = -sat\{q^*(t)\} = -sat\{R^{-1}B^T p^*(t)\}}$$

# Παράδειγμα 3 (1)

Έστω

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

$$|u(t)\,| \leq 1 \; \forall t \in \left[t_0, t_f\right]$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την είσοδο $u^*(t)$που θα οδηγήσει το σύστημα από την αρχική κατάσταση $x(0)$ στην κατάσταση $x\left(t_f\right) = 0$, ελαχιστοποιώντας τον δείκτη απόδοσης:

$$J(u) = \int_0^{t_f} \left(2 + u^2(t)\right) dt$$

$$H\left(x(t), u(t), p(t)\right) = 2 + u^2(t) + p(t)(-x(t) + u(t))$$

# Παράδειγμα 3 (2)

$$H\big(x(t),u(t),p(t)\big) = 2 + u^2(t) + p(t)(-x(t) + u(t))$$

$$H\big(x^*(t),u^*(t),p^*(t)\big) \le H\big(x^*(t),u(t),p^*(t)\big) \quad |u(t)| \le 1$$

$$\downarrow$$

$$2 + u^*(t)^2 + p^*(t)(-x^*(t) + u^*(t)) \le 2 + u^2(t) + p^*(t)(-x^*(t) + u\,(t))$$

$\Leftrightarrow$

$$u^*(t)^2 + p^*(t)u^*(t) \le u^2(t) + p^*(t)u(t) \qquad |u(t)| \le 1$$

$$q^*(t) = \frac{1}{2}p^*(t) \quad \downarrow$$

# Παράδειγμα 3 (3)

$$u^*(t)^2 + u^*(t)2q^*(t) \le u^2(t) + u(t)2q^*(t) \qquad |u(t)| \le 1$$

$$+q^*(t)^2 \quad \downarrow$$

$$\left(u^*(t) + q^*(t)\right)^2 \le \left(u(t) + q^*(t)\right)^2 \qquad |u(t)| \le 1$$

$$u^*(t) = \begin{cases} -q^*(t) & |q^*(t)| \le 1 \\ +1 & q^*(t) < -1 \\ -1 & q^*(t) > +1 \end{cases}$$

$$\boxed{q^*(t) = \frac{1}{2}p^*(t)}$$

# Παράδειγμα 3 (4)

$$u^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}p^*(t) & |p^*(t)| \leq 2 \\ +1 & p^*(t) < -2 \\ -1 & p^*(t) > +2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{u^*(t) = -sat\{q^*(t)\} = -sat\{\frac{1}{2}p^*(t)\}}$$

# Παράδειγμα 3 (5)

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{p}^*(t) = p^*(t) \Rightarrow p^*(t) = e^t p^*(0)$$

Η συνάρτηση $p^*(t)$ δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, γιατί στην περίπτωση αυτή η είσοδος θα γίνει 0 δηλαδή

$$u^*(t) = -sat\left\{\frac{1}{2} \times 0\right\} = 0$$

και η κατάσταση του συστήματος $x(t) = e^{-t}x(0)$ ποτέ δεν θα φτάσει στην αρχή των αξόνων για πεπερασμένο χρόνο $t_f$.

Είναι γνωστό από τις αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος Pontryagin ότι αν ο τελικός χρόνος $t_f$ είναι ελεύθερος ή δεν έχει καθοριστεί και επιπλέον

# Παράδειγμα 3 (6)

η συνάρτηση Pontryagin $H$ είναι ανεξάρτητη του $t$, τότε η $H$ θα πρέπει να είναι μηδέν όταν υπολογιστεί για τις βέλτιστες τιμές των $x^*, u^*, p^*$

$$H\left(x^*(t), u^*(t), p^*(t)\right) = 0 \ \forall t \in \left[t_0, t_f\right]$$

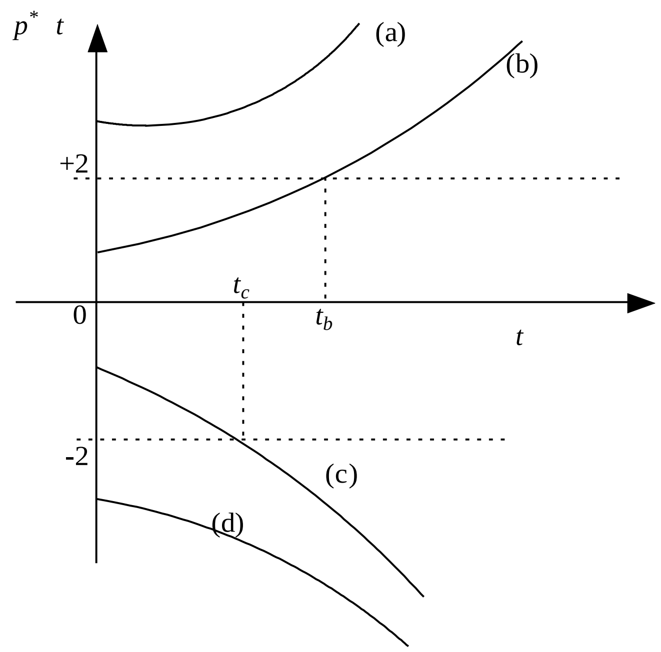
$$2 + u^*(t)^2 + p^*(t)(-x^*(t) + u^*(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$x^*(t) = \frac{2 + u^*(t)^2 + p^*(t)u^*(t)}{p^*(t)}$$

# Παράδειγμα 3 (7)

$$p^*(t) = e^t p(0)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}p^*(t) & |p^*(t)| \leq 2 \\ +1 & p^*(t) < -2 \\ -1 & p^*(t) > +2 \end{cases}$$



# Παράδειγμα 3 (8)

**Περίπτωση 1η** : $p^*(0) > 2.$

Για την περίπτωση αυτή θα έχουμε (από το σχήμα (a))

$$u^*(t) = -1.$$

**Περίπτωση 2η** : $0 < p^*(0) < 2.$

Για την περίπτωση αυτή θα έχουμε (από το σχήμα (b))

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}p^*(t) \text{ ή } u^*(t) = \left\{-\frac{1}{2}p^*(t), -1\right\}$$

το οποίο εξαρτάται από το αν το σύστημα θα οδηγήθεί στο 0 πριν τη χρονική στιγμή $t_b$ ή μετά.

**Περίπτωση 3η** : $-2 < p^*(0) < 0.$

Για την περίπτωση αυτή θα έχουμε (από το σχήμα (c))

# Παράδειγμα 3 (9)

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}p^*(t) \text{ ή } u^*(t) = \left\{-\frac{1}{2}p^*(t), +1\right\}$$

το οποίο εξαρτάται από το αν το σύστημα θα οδηγήθεί στο 0 πριν τη χρονική στιγμή $t_c$ ή μετά.

**Περίπτωση 4η** : $p^*(0) < -2.$

Για την περίπτωση αυτή θα έχουμε (από το σχήμα (d))

$$u^*(t) = +1.$$

$$0 = x(t_f) = e^{-(t_f - t)}x(t) + \int_t^{t_f} e^{-(t_f-\tau)}u(\tau)d\tau\,, \forall t \in [0, t_f]$$

$\Leftrightarrow$

$$e^{-(t_f - t)}x(t) = \int_t^{t_f} e^{-(t_f-\tau)}u(\tau)d\tau \Leftrightarrow$$

# Παράδειγμα 3 (10)

$$-e^{-t_f}e^{t}x(t) = e^{-t_f}\int_{t}^{t_f} e^{\tau}u(\tau)d\tau \overset{\times e^{t_f}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\boxed{-e^{t}x(t) = \int_{t}^{t_f} e^{\tau}u(\tau)d\tau}$$

Όταν η είσοδος $u(\tau)$είναι μη αρνητική σε όλο το διάστημα $[t, t_f]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{t}^{t_f} e^{\tau}u(\tau)d\tau$ θα είναι θετικό και εφόσον η συνάρτηση $e^{t}$ είναι θετική στο διάστημα αυτό θα πρέπει η κατάσταση $x(t)$ να είναι αρνητική ώστε να ισχύει η παραπάνω ισότητα.

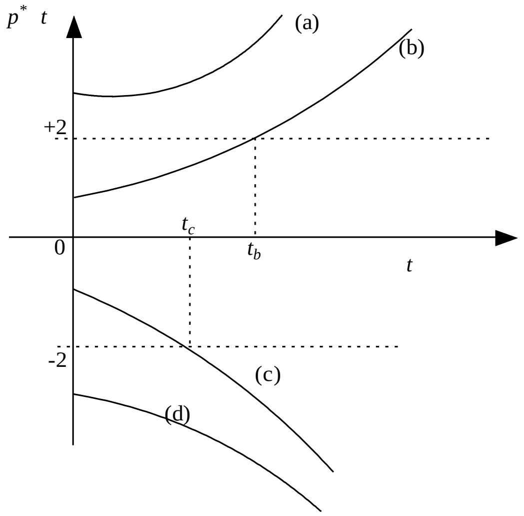
Αν η είσοδος $u(\tau)$ είναι μη θετική σε όλο το διάστημα $[t, t_f]$ τότε θα πρέπει η κατάσταση $x(t)$ να είναι θετική.

# Παράδειγμα 3 (11)

Η κατάσταση $x(t)$ και η είσοδος $u(\tau)$ θα πρέπει να διατηρούν αντίθετα πρόσημα.

$$p^*(t) = e^t p(0)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}p^*(t) & |p^*(t)| \leq 2 \\ +1 & p^*(t) < -2 \\ -1 & p^*(t) > +2 \end{cases}$$



# Κορεσμένη Περιοχή (Saturated region) (a)

1. **Κορεσμένη Περιοχή** (Saturated region)
   a) Στην περίπτωση που $t = t_b$ $p^*(t_b) = 2, u^*(t_b) = -1$ και συνεπώς

$$x^*(t_b) = \frac{2 + u^*(t_b)^2 + p^*(t_b)u^*(t_b)}{p^*(t_b)} = \frac{2 + (-1)^2 + 2 \times (-1)}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

Στη συνέχεια για $t \in [t_b, t_f], p^*(t) > 2, u^*(t) = -1$ και συνεπώς

$$x^*(t) = \frac{2 + u^*(t)^2 + p^*(t)u^*(t)}{p^*(t)} = \frac{2 + (-1)^2 + p^*(t) \times (-1)}{p^*(t)}$$

$$= \frac{3 - p^*(t)}{p^*(t)} < \frac{1}{2} = x^*(t_b)$$

Επειδή όμως η $u^*(t)$ είναι αρνητική, θα πρέπει η $x^*(t)$ να είναι θετική και άρα $0 < x^*(t) < \frac{1}{2} = x^*(t_b)$ όταν $u^*(t) = -1$.

# Κορεσμένη Περιοχή (Saturated region) (b)

b) Στην περίπτωση που $t = t_c$ θα έχουμε $p^*(t_c) = -2$, $u^*(t_c) = +1$ και συνεπώς

$$x^*(t_c) = \frac{2 + u^*(t_c)^2 + p^*(t_c)u^*(t_c)}{p^*(t_c)} = \frac{2 + (+1)^2 + (-2) \times (+1)}{(-2)}$$
$$= -\frac{1}{2} < 0$$

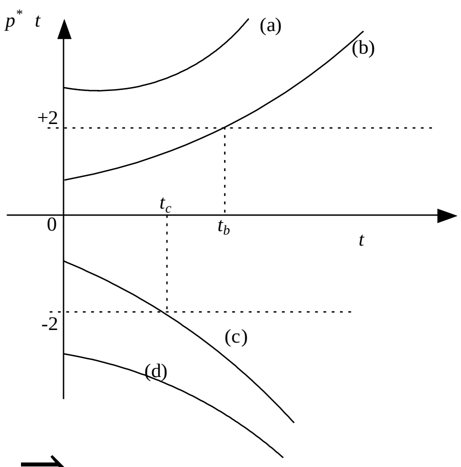
Στη συνέχεια για $t \in [t_c, t_f], p^*(t) < -2, u^*(t) = +1$ και συνεπώς

$$x^*(t) = \frac{2 + u^*(t)^2 + p^*(t)u^*(t)}{p^*(t)} = \frac{2 + (+1)^2 + p^*(t) \times (+1)}{p^*(t)}$$
$$= \frac{3 + p^*(t)}{p^*(t)} > -\frac{1}{2} = x^*(t_c)$$

Επειδή όμως η $u^*(t)$ είναι θετική, θα πρέπει η $x^*(t)$ να είναι αρνητική και άρα $x^*(t_c) = -\frac{1}{2} < x^*(t) < 0$ όταν $u^*(t) = +1$.

# Μη Κορεσμένη Περιοχή (Unsaturated region) (1)

## 2. Μη κορεσμένη περιοχή (Unsaturated region)




Στη μη κορεσμένη περιοχή έχουμε

$|p^*(t)| \leq 2$ και $u^*(t) = -\frac{1}{2}p^*(t)$

$H\big(x^*(t), u^*(t), p^*(t)\big) = 0 \; \forall t \in \big[t_0, t_f\big]$

$$2 + u^*(t)^2 + p^*(t)(-x^*(t) + u^*(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$2 + \left(-\frac{1}{2}p^*(t)\right)^2 + p^*(t)\left(-x^*(t) + \left(-\frac{1}{2}p^*(t)\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{4}p^*(t)^2 - p^*(t)x^*(t) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$p^*(t)^2 + 4p^*(t)x^*(t) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

# Μη Κορεσμένη Περιοχή (Unsaturated region) (2)

$$p^*(t) = \frac{-4x^*(t) \pm \sqrt{\left(4x^*(t)\right)^2 + 32}}{2} =$$
$$= -2x^*(t) \pm \sqrt{x^*(t)^2 + 2}$$

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}p^*(t) = -\frac{1}{2}\left(-2x^*(t) \pm 2\sqrt{x^*(t)^2 + 2}\right)$$
$$= x^*(t) \mp \sqrt{x^*(t)^2 + 2}$$

$$x^*(t) > \frac{1}{2} \rightarrow u^*(t) = x^*(t) - \sqrt{\left(x^*(t)\right)^2 + 2}$$

$$x^*(t) < -\frac{1}{2} \rightarrow u^*(t) = x^*(t) + \sqrt{\left(x^*(t)\right)^2 + 2}$$

# Παράδειγμα 3 (12)
# Είσοδος

$$u^*(t) = \begin{cases} x^*(t) + \sqrt{\left(x^*(t)\right)^2 + 2} & x^*(t) < -\dfrac{1}{2} \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \le x^*(t) < 0 \\ 0 & x^*(t) = 0 \\ -1 & 0 \le x^*(t) \le \dfrac{1}{2} \\ x^*(t) - \sqrt{\left(x^*(t)\right)^2 + 2} & x^*(t) > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} x^*(t) + \sqrt{\left(x^*(t)\right)^2 + 2} & x^*(t) < -\dfrac{1}{2} \\ x^*(t) - \sqrt{\left(x^*(t)\right)^2 + 2} & x^*(t) > \dfrac{1}{2} \\ -sgn\{x^*(t)\} & x^*(t) \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \end{cases}$$

# Βιβλιογραφία


- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.
- D.E. Kirk, 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. S. Naidu, 2002, Optimal Control Systems, CRC Press LLC.

# Σημείωμα Αναφοράς

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης