ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 1: Τοπολογία των Ευκλείδειων χώρων.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ορισμός της απόστασης στον $\mathbb{R}^n$.
2. Σύγκλιση ακολουθιών.

Σκοποί ενότητας

- Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την συνέχεια πραγματικών αλλά και διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και θα αποδείξουμε τα θεωρήματα των άκρων και των ενδιάμεσων τιμών για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις. Θα τελειώσουμε με την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας και την σχέση συνέχειας και συμπάγειας.

Ευκλείδεια απόσταση (1)

Για να μελετήσουμε την συνέχεια συναρτήσεων δύο ή και περισσότερων μεταβλητών, χρειαζόμαστε να ορίσουμε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας διανυσμάτων ή ισοδύναμα την απόσταση δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$.

Αν $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ είναι δύο σημεία του $\mathbb{R}^n$, τότε η **ευκλείδεια απόσταση** τους $d(x, y)$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που τα ενώνει, δηλαδή

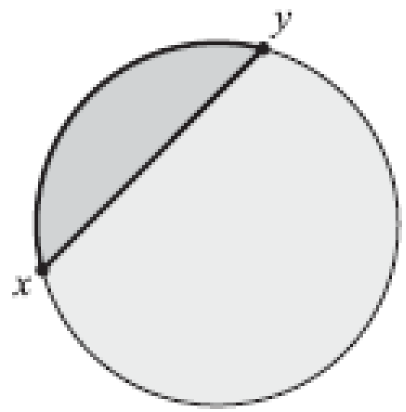
Ευκλείδεια απόσταση (2)

$$d(x, y) = \|x - y\|$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Όπως θα δείτε και στο μάθημα της Τοπολογίας, συνήθως έχουμε αρκετούς και διαφορετικούς τρόπους να μετράμε την απόσταση δύο σημείων ενός χώρου.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό του κύκλου. (δες Σχήμα 1)

Ευκλείδεια απόσταση (3)



Σχήμα 1

Μπορούμε να πούμε ότι η απόσταση των σημείων x και y του κύκλου που βλέπουμε στο σχήμα είναι ή το μήκος του τόξου ή το μήκος της αντίστοιχης χορδής.

Ορισμός

Έστω X ένα σύνολο και d μία θετική συνάρτηση επί του καρτεσιανού γινομένου $X \times X$. Η d λέγεται απόσταση επί του συνόλου X, αν ικανοποιεί τις κάτωθι τρείς ιδιότητες:

- $d(x, y) = 0$ ανν $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$, και
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$, (τριγωνική ιδιότητα)

Απόλυτη τιμή

- Θυμίζουμε ότι οι τρείς παραπάνω ιδιότητες ικανοποιούνται στον $\mathbb{R}$ από την **απόλυτη τιμή**

$$d(x,y) = |x-y|,$$

που είναι και η απόσταση που χρησιμοποιούμε στην πραγματική ευθεία.

- Στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, χρησιμοποιούμε συνήθως, εκτός της ευκλείδειας απόστασης $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$

Αποστάσεις d_1, d_∞

και τις ακόλουθες δύο: την

$$\boldsymbol{d_1}(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$$

και την

$$\boldsymbol{d_\infty}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|$$

Για να δείξουμε ότι οι d_1και d_∞ είναι αποστάσεις, ότι δηλαδή ικανοποιούν τις προυποθέσεις 1, 2 και 3 του ορισμού είναι σχετικά εύκολο.

Ανισότητα των Cauchy-Schwarz

- Για να δείξουμε ότι η ευκλείδεια απόσταση ικανοποιεί την τριγωνική ιδιότητα χρειαζόμαστε την ανισότητα των Cauchy-Schwarz.

Πρόταση: (ανισότητα Cauchy-Schwarz) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|< x, y >| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} = \|x\|\|y\|$$

Ευκλείδεια απόσταση

Πρόταση: Η συνάρτηση

$$d(x, y) = \|x - y\| =$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

είναι μία απόσταση του $\mathbb{R}^n$ και λέγεται **ευκλείδεια απόσταση**.

Σύγκλιση ακολουθιών

Έστω (x_k)μια ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ και δ μία από τις αποστάσεις $d, d_1,$ ή d_∞που είδαμε παραπάνω. Λέμε ότι η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο x κατά την απόσταση δ αν

$$\delta(x_k, x) \xrightarrow{k\to\infty} 0\,,$$

ή ισοδύναμα

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \tau.\omega.\, \delta(x_k, x) \leq \varepsilon \;\alpha\nu\; k \geq N(\varepsilon)$$

- Γράφουμε

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$$

Πρόταση

Οι προτάσεις που ακολουθούν, λύνουν πολλά από τα ερωτήματα που ίσως έχουν προκύψει.

Πρόταση: Αν δ είναι μία από τις αποστάσεις $d, d_1,$ ή d_∞ του $\mathbb{R}^n$ και

$$(x_k) = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$$

μια ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$$

ανν κάθε συνιστώσα ακολουθία $x_{kj} \xrightarrow{k\to\infty} x_j$.

Πορίσματα

Πόρισμα 1: για κάθε ακολουθία (x_k) στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$x_k \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_k \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_k \xrightarrow{d_\infty} x,$$

και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιούμε αδιακρίτως όποια από τις αποστάσεις μας βολεύει καλύτερα.

Πόρισμα 2: (Πληρότητα του $\mathbb{R}^n$) Μία ακολουθία (x_k) στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει ανν είναι Cauchy.

Παρατήρηση

- Το προηγούμενο πόρισμα είναι πολύ σημαντικό. Μας επιτρέπει να συμπεράνουμε αν μία ακολουθία είναι συγκλίνουσα χωρίς να μπούμε, στην συνήθως επίπονη διαδικασία να μαντέψουμε και να υπολογίσουμε το όριό της.
- Στην γλώσσα των Τοπολόγων, ένας χώρος όπου οι ακολουθίες Cauchy είναι συγκλίνουσες, λέγεται **πλήρης**.

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

 «Λογισμός 3, Τοπολογία των Ευκλείδειων χώρων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης