Λογισμός 3

Ενότητα 4: Συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων-Ιδιότητες της συνέχειας.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων.
2. Ιδιότητες της συνέχειας.

Σκοποί ενότητας

- Ορίζεται η συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων και παρουσιάζονται οι ιδιότητες της.

Διανυσματική συνάρτηση (1)

Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$. Μία διανυσματική συνάρτηση f επί του A είναι μια συνάρτηση

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k.$$

Παραδείγματος χάριν η

$$f(x, y, z) = (x + z, \sigma\upsilon\nu xyz),$$

είναι μια συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^2$ με **συνιστώσες συναρτήσεις** τις πραγματικές συναρτήσεις

Διανυσματική συνάρτηση (2)

$$f_1(x,y,z) = x + z$$

και

$$f_2(x,y,z) = \sigma\upsilon\nu xyz$$

Γενικά μια διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k,$$

αντιστοιχεί το σημείο $x \in A$ στο σημείο

$$f(x) = y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$$

και η αντιστοιχία

Διανυσματική συνάρτηση (3)

$$x \xrightarrow{f_j} y_j$$

Ορίζει την j-οστή συνιστώσα f_j της f.

Οι συνιστώσες της f είναι πλέον πραγματικές συναρτήσεις επί του A.

Έτσι, το να μας δοθεί μια διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k,$$

είναι ισοδύναμο με το να μας δοθούν οι

Διανυσματική συνάρτηση (4)

συνιστώσες συναρτήσεις

$$f_1, f_2, \dots, f_k \colon A \to \mathbb{R}$$

Γράφουμε

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$$

Πότε άραγε μια διανυσματική συνάρτηση $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$;

Ακολουθώντας τα γνωστά με τα ε και η, και συμβολίζοντας προς το παρόν με $\|x\|_m$ την

Συνεχής Διανυσματική συνάρτηση (1)

νόρμα στον $\mathbb{R}^m$, μπορούμε να πούμε ότι

Ορισμός: Μια διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k,$$

είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\eta(\varepsilon, x_0)$, τ.ω.

αν $\|x - x_0\|_m \leq \eta$ τότε $\|f(x) - f(x_0)\|_k \leq \varepsilon$.

Παράδειγμα 1 (1)

Μια γραμμική συνάρτηση $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathbb{R}^k$, είναι συνεχής.

Λύση: όπως είναι γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα, μία γραμμική συνάρτηση $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathbb{R}^k$ ορίζεται από έναν $n \times k$ πίνακα $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n, \\ 1 \le j \le k}}$.

$$L(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Αν διαλέξουμε ως νόρμα του $\mathbb{R}^k$ την

Παράδειγμα 1 (2)

$$\|x\|_\infty = \max_{i\le k}|x_i|$$

τότε

$$\begin{aligned}\|\mathrm{L(x)} - \mathrm{L(y)}\|_\infty &= \|\mathrm{L(x-y)}\|_\infty \\ &= \max_{j\le k}\left|\sum_{i\le n} a_{ij}(x_j - y_j)\right| \\ &= \max_{j\le k}|a_{ij}|\sum_{i\le n}|x_j - y_j| = \max_{j\le k}|a_{ij}|\|x-y\|_1 \\ &\le \varepsilon\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1 (3)

για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}^k$ που ικανοποιούν

$$\|x - y\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{max|\alpha_{ij}|} = \eta.$$

Παρατηρούμε ότι στον ως άνω ορισμό της συνέχειας, η σχέση

$$\|f(x) - f(x_0)\|_k \leq \varepsilon$$

είναι ισοδύναμη με την

$$\left\|f_j(x) - f_j(x_0)\right\|_k \leq \varepsilon'(\varepsilon), \forall j \leq k,$$

όπου το $\varepsilon'(\varepsilon)$ εξαρτάται από την νόρμα που διαλέξαμε και γίνεται όσο μικρό θέλουμε.

Πρόταση 1

Συμπεραίνουμε λοιπόν την

Πρόταση: Μια διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k,$$

είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$, ανν οι συνιστώσες της

$$f_1, f_2, \dots, f_k : A \to \mathbb{R}$$

είναι συνεχείς στο x_0.

Παράδειγμα 2

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x, y) = \left(xy, e^{-(x+y)}, \eta\mu \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ αφού οι δύο πρώτες συνιστώσες τις είναι συνεχείς σε όλον τον $\mathbb{R}^2$, ενώ η τρίτη είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Ιδιότητες της συνέχειας (1)

Θα δούμε την συμπεριφορά της συνέχειας ως προς τις αλγεβρικές πράξεις.

Πρόταση: Αν οι

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}^k,$$

είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A$, τότε και η

$$\lambda f + \mu g$$

είναι συνεχής στο x_0.

Αν οι

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}^k,$$

Ιδιότητες της συνέχειας (2)

είναι συνεχείς στο σημείο A, τότε και η

$$\lambda f + \mu g$$

είναι συνεχής στο A.

Έτσι το σύνολο των συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων επί του A είναι διανυσματικός χώρος.

Πρόταση 2

Πρόταση: Αν οι

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}^k,$$

είναι συνεχείς στο σημείο A, τότε και το γινόμενό τους

$$fg$$

είναι συνεχής στο Α.
Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και το πηλίκο $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο A.

Πρόταση 3

Πρόταση: Αν οι

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \underbrace{B}_{\subset \mathbb{R}^k} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^l,$$

είναι συνεχείς, τότε και η σύνθεση τους gof είναι συνεχής.

Οι παραπάνω προτάσεις είναι πολύ χρήσιμες στην καθημερινή μας πρακτική.

Μας επιτρέπουν να συμπαιρένουμε σχεδόν αυτόματα την συνέχεια των συναρτήσεων που προέρχονται από συνεχείς μέσω των αλγεβρικών

Παράδειγμα 3

πράξεων που αναφέρονται στις άνω προτάσεις.
Π.χ. η συνάρτηση

$$(x, y, z) \to \left(x^3 e^{y+z}, \frac{\eta\mu(xyz)}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^3$, αφού οι συνιστώσες της είναι συνεχείς ως γινόμενα, πηλίκα και συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων.

Παρατήρηση (1)

Παρατήρηση: τελειώνουμε την παράγραφο αυτή επισημαίνοντας ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και φραγμένη στην περιοχή του σημείου.

Πράγματι από την (2,6) έχουμε ότι

$$f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon), \text{για κάθε } x \in B(x, \eta).$$

Για παράδειγμα, η

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^2}, x \in \mathbb{R}_*^n,$$

Παρατήρηση (2)

δεν μπορεί να επεκταθεί συνεχώς στο 0, αφού

$$\frac{1}{\|x\|^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

και συνεπώς η f δεν είναι φραγμένη σε καμμία μπάλλα $\mathrm{B}(0, \eta)$.

Παράδειγμα 4 (1)

Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y}, & \alpha\nu\ y \neq -x^2, \\ 0, & \alpha\nu\ \acute{o}\chi\iota. \end{cases}$$

Δείξτε ότι δεν είναι συνεχής στο (0,0), δείχνοντας ότι δεν είναι φραγμένη στην περιοχή του (0,0).

Λύση: Ο παρονομαστής μηδενίζεται επί της καμπύλης $y = -x^2$. Κοντά λοιπόν στην καμπύλη αυτή, δηλαδή για $y \neq -x^2 + \varepsilon$ έχουμε:

Παράδειγμα 4 (2)

$$f(x,-x^2+\varepsilon)=\frac{x(-x^2+\varepsilon)}{x^2+(-x^2+\varepsilon)}=-\frac{x^3}{\varepsilon}+x$$

$$x=\varepsilon^{\frac{1}{6}}$$

$$f(x,-x^2+\varepsilon)=-\frac{\varepsilon^{\frac{3}{6}}}{\varepsilon}+\varepsilon^{\frac{1}{6}}==-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}-\infty$$

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων-Ιδιότητες της συνέχειας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης