ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 7: Κλίση και παράγωγος.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ορισμός της παραγώγου.
2. $\mathbf{C}^{\mathbf{1}}$ και διαφορισιμότητα.
3. Παραδείγματα, ασκήσεις.

Σκοποί ενότητας

- Ορισμός της παραγώγου ως διάνυσμα της κλίσης.

Κλίση της f στο x_0 (1)

Αν το A είναι ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και η $f: A \to \mathbb{R}$ έχει μερικές παραγώγους στο σημείο $x_0 \in A$, τότε το διάνυσμα των μερικών παραγώγων

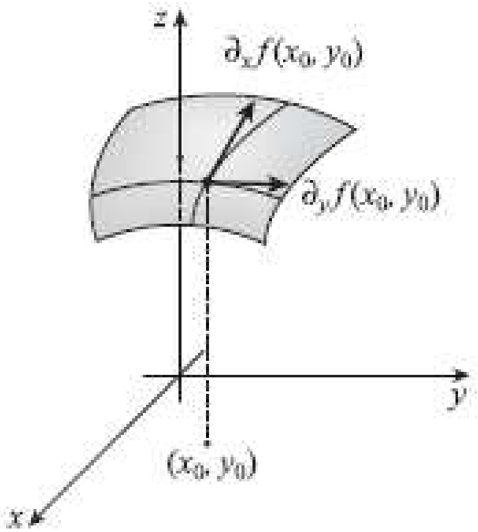
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

λέγεται κλίση της f στο x_0 και συμβολίζεται με το ανάδελτα $\nabla f(x_0)$ ή με $gradf(x_0)$:

$$\nabla f(x_0) = gradf(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Κλίση της f στο x_0 (2)

Η κλίση ορίζει το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f που περνά από το σημείο $(x_0, f(x_0))$,



Διάνυσμα της κλίσης

Συνεπώς, αν θέλουμε να τηρήσουμε τις αναλογίες με την διάσταση 1, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών είναι διαφορίσιμη στο σημείο x_0 αν υπάρχει το διάνυσμα της κλίσης

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Το παράδειγμα του «σταυρού» (1)

Όμως τα πράγματα δεν είναι έτσι. Το παράδειγμα του «σταυρού»

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x = 0\ \eta\ y = 0 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

μας λέει ότι η «διαφορισιμότητα» της f στο σημείο (x_0, y_0) δεν είναι συνέπεια της ύπαρξης και μόνον της κλίσης στο (x_0, y_0).

Πράγματι, όπως εύκολα διαπιστώνουμε οι μερικές παράγωγοι της f στο (0,0) υπάρχουν και είναι ίσες με 0.

Το παράδειγμα του «σταυρού» (2)

Άρα

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Όμως η f δεν είναι συνεχής στο (0,0), άρα δεν μπορεί να είναι και διαφορίσιμη αφού, όπως θα δούμε παρακάτω, η διαφορισιμότητα είναι έννοια πιο ισχυρή από την συνέχεια.

Έτσι αν η f είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι αναγκαστικά και συνεχής.

Το παράδειγμα του «σταυρού» (3)

Το κάτι παραπάνω, που χρειαζόμαστε για να ορίσουμε την σωστή έννοια της διαφορισιμότητας, είναι η **εγγύτητα του γραφήματος της** f και του **επιπέδου που ορίζουν οι μερικοί παράγωγοι της** f σε μια περιοχή του $f(x_0)$:

$$f(x) \sim f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle$$

Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό της διαφορισιμότητας για πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Ορισμός διαφορισιμότητας (1)

Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$.

1. Η f είναι **διαφορίσιμη στο $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{A}$**, αν υπάρχει η κλίση $\nabla f(x_0)$ και αν επιπλέον

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{x \to x_0} 0.$$

Λέμε ότι η (**ολική**) **παράγωγος** της f στο x_0 είναι το διάνυσμα της κλίσης

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Ορισμός διαφορισιμότητας (2)

Πολλές φορές η παράγωγος της f συμβολίζεται και με $Df(x_0)$.

2. Η f είναι **διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbf{A}$** αν είναι διαφορίσιμη σε όλα τα σημεία του A.

Η διαφορισιμότητα είναι λοιπόν μια έννοια τοπική.

Για να ελέγξουμε λοιπόν αν μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο, πρέπει, αφού δείξουμε την ύπαρξη των μερικών παραγώγων, να επαληθεύσουμε επιπλέον την ιδιότητα (3,2)

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \sigma\tau o\ (0,0) \end{cases}$$

Δείξτε ότι είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

Λύση: όπως είδαμε στο παράδειγμα (3,2), οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν στο (0,0) και μάλιστα

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$$

Παράδειγμα 1 (2)

Μένει να δείξουμε αν ισχύει η (3,2). Έχουμε

$$\frac{f(x,y)-f(0{,}0)-\left\langle \nabla f(0{,}0),\left((x,y)-(0{,}0)\right)\right\rangle}{\|(x,y)-(0{,}0)\|}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-\langle(0{,}0),(x,y)\rangle}{\|(x,y)\|}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

Παράδειγμα 1 (3)

$$= r\eta\mu\frac{1}{r} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

Άρα η f είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

Με την πρόταση που ακολουθεί προσδιορίζεται η πιο σημαντική κλάση διαφορίσιμων συναρτήσεων και το τοπίο ξεκαθαρίζει.

Θυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι C^1 στο A αν οι μερικές παράγωγοι της είναι συνεχείς στο A.

Πρόταση 1

Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$.

1. Αν οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς σε μια περιοχή του x_0, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0.
2. Αν f είναι C^1 στο A, τότε είναι διαφορίσιμη στο A.

Η επόμενη πρόταση λέει ότι η διαφορισιμότητα είναι ισχυρότερη της συνέχειας.

Πρόταση 2

Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$.

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Παρακάτω δίνουμε ένα τελευταίο παράδειγμα που συμπληρώνει το τοπίο.

Παράδειγμα 2 (1)

Δείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι της

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \sigma\tau o\ (0,0) \end{cases}$$

δεν είναι συνεχείς στο (0,0) και συνεπώς η f δεν είναι C^1 σε περιοχή του (0,0). Θυμίζουμε ότι δείξαμε ήδη στο Παράδειγμα 3,9 ότι η f είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

Παράδειγμα 2 (2)

Λύση: έχουμε ήδη δεί στο Παράδειγμα 3,2 ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = (0,0)$$

Υπολογίζουμε την

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$$

$$= 2x\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_x\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2x\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{(x^2+y^2)x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

Παράδειγμα 2 (3)

$$= 2x\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Επί της διαγωνίου $x = y$ και για $x > 0$, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x\sqrt{2}} - \frac{x}{x\sqrt{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x\sqrt{2}}$$

$$= 2x\eta\mu\frac{1}{x\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x\sqrt{2}}$$

Συνεπώς, η $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)$ δεν έχει όριο καθώς το $\mathrm{x} \to 0$, αφού $\frac{1}{x\sqrt{2}} \to \infty$ και το $\lim_{x\to\infty} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x\sqrt{2}}$ δεν υπάρχει.

Διαφορισιμότητα και μερικές παράγωγοι

Ο πίνακας που ακολουθεί συνοψίζει όσα είπαμε παραπάνω για την διαφορισιμότητα και τις μερικές παραγώγους.

$f \in C^1 \overset{\text{Προτ. } 3{,}10}{\Rightarrow} f \ \delta\iota\alpha\varphi.\, \sigma\tau o\ x_0 \Rightarrow \exists\ \mu.\pi.\, \sigma\tau o\ x_0$
$f \in C^1 \overset{\text{Παρ. } 3{,}12}{\not\Leftarrow} f \ \delta\iota\alpha\varphi.\, \sigma\tau o\ x_0 \overset{\sigma\tau\alpha\upsilon\rho\acute{o}\varsigma}{\not\Leftarrow} \exists\ \mu.\pi.\, \sigma\tau o\ x_0$

Παρατήρηση (1)

Τελειώνοντας, ας κάνουμε ορισμένα σχόλια στον ορισμό της παραγώγου.

1. Η παράγωγος

$$Df(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

της f στο x_0 είναι πλέον ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και όχι ένας αριθμός όπως ήταν στην διάσταση 1.

2. Το διάνυσμα της παραγώγου στο x_0 ορίζει μία γραμμική συνάρτηση L από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$:

Παρατήρηση (2)

$$L(h) = \nabla f(x_0)h =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j \le n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

Μπορούμε να πούμε ότι για κάθε $x_0 \in A$,

$$\nabla f(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

και κατά συνέπεια,

Παρατήρηση (3)

η παράγωγος της ∇f επί του A, είναι μια απεικόνιση

$$A \xrightarrow{\nabla f} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

από το A στο σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$.

3. Πολλά από τα κλασσικά εγχειρίδια, εισάγουν την παράγωγο $Df(x_0)$ ως γραμμική συνάρτηση και κατόπιν αποδεικνύουν ότι είναι ίση με την κλίση.

Παρατήρηση (4)

Υποθέτουμε, πως η πρόθεσή τους, ήταν να δώσουν ένα ενοποιημένο ορισμό, ανεξάρτητο της βάσης του $\mathbb{R}^n$ (πράγμα χρήσιμο στη Διαφορική Γεωμετρία), που ισχύει ακόμα και σε απειροδιάστατους χώρους.

Φρονούμε, πως μια τέτοια παρουσίαση της παραγώγου σε ένα πρώτο μάθημα Λογισμού, είναι ένας διδακτικός παραλογισμός.

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Κλίση και παράγωγος». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης