ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 8: Ιδιότητες της κλίσης, Κανόνας της αλυσίδας.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Κανόνας της αλυσίδας.
2. Θεώρημα μέσης τιμής.
3. Παραδείγματα.

Σκοποί ενότητας

- Απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας και του θεωρήματος μέσης τιμής.

Ιδιότητες της κλίσης

Ας ξεκινήσουμε με τις χρήσιμες αλγεβρικές ιδιότητες της κλίσης.

Λαμβάνοντας υπόψην ότι

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

και συνδυάζοντας το με τις ιδιότητες της μονοδιάστατης παραγώγου, έχουμε την παρακάτω πρόταση

Πρόταση (γραμμικότητα και παράγωγος γινομένου)

Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f, g: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες. Τότε

1. Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$$
2. Για κάθε $f, g: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες
$$\nabla(fg) = f\nabla f + g\nabla f$$

Πρόταση (Κανόνας της αλυσίδας)

Έστω Α ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και φ: $[a,b] \to A$,

$$\varphi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

μια διαφορίσιμη καμπύλη μέσα στο Α και $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $f o \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη και

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{df}{dt}\big(\varphi(t)\big) = \left\langle \nabla f\big(\varphi(t)\big), \varphi'(t) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\varphi(t)\big)\frac{dx_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(\varphi(t)\big)\frac{dx_2}{dt}(t) + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\varphi(t)\big)\frac{dx_n}{dt}(t) \quad (1)$$

Κανόνας της αλυσίδας

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως **κανόνας της αλυσίδας**.

Προφανώς το όνομα της το χρωστά στην μορφή της αφού στην (1) οι μεταβλητές x_j σχηματίζουν τους κρίκους μιας αλυσίδας.

Πιο συμπυκνωμένα γράφεται ως

$$(f o \varphi)' = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\varphi(t)\big)\frac{\partial x_j}{\partial t}(t)$$
$$= \big\langle \nabla f\big(\varphi(t)\big), \varphi'(t) \big\rangle$$

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$\varphi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (\sigma\upsilon\nu 2\pi t, \eta\mu 2\pi t, t)$$

ο «ατέρμων κοχλίας» και

$$f(x, y, z) = x^2 y + 2z$$

Να υπολογιστεί η $\frac{d(fo\varphi)}{dt}(t)$.

Λύση: Με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d(fo\varphi)}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)\frac{dy}{dt}(t)$$

$$+\frac{\partial f}{\partial z}\big(\varphi(t)\big)\frac{dz}{dt}(t) =$$

Παράδειγμα 1 (2)

$$= 2x(t)y(t)x'(t) + x(t)^2 y'(t) + 2z'(t)$$

$$= 2(\sigma\upsilon\nu 2\pi t)(\eta\mu 2\pi t)(\sigma\upsilon\nu 2\pi t)' + (\sigma\upsilon\nu 2\pi t)^2(\eta\mu 2\pi t)' \\ + 2$$

$$= -4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi t\, \eta\mu^2 2\pi t + 2\pi\sigma\upsilon\nu^3 2\pi t + 2$$

Επαληθεύουμε, υπολογίζοντας πρώτα την σύνθεση και παραγωγίζοντας μετά. Έχουμε

$$(fo\varphi)(t) = x(t)^2 y(t) + 2t = \sigma\upsilon\nu^2 2\pi t\, \eta\mu 2\pi t + 2t$$

Συνεπώς $(fo\varphi)'(t) = (\sigma\upsilon\nu^2 2\pi t\, \eta\mu 2\pi t + 2t)' =$

Παράδειγμα 1 (3)

$$= 4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi t(-\eta\mu 2\pi t)\eta\mu 2\pi t$$
$$+ 2\pi\sigma\upsilon\nu^2 2\pi t\ \sigma\upsilon\nu 2\pi t + 2 =$$
$$= -4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi t\eta\mu^2 2\pi t\eta\mu 2\pi t + 2\pi\sigma\upsilon\nu^3 2\pi t + 2$$

ακριβώς όπως και με την αλυσίδα.

Απόδειξη
(του κανόνα της αλυσίδας, 1)

Έχουμε

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}=\frac{f\big(\varphi(t)\big)-f\big(\varphi(t_0)\big)}{t-t_0},$$

και επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(t_0)$, έπεται ότι

$$f\big(\varphi(t)\big)-f\big(\varphi(t_0)\big)=$$
$$=\big\langle \nabla f\big(\varphi(t_0)\big), \varphi(t) \to \varphi(t_0)\big\rangle$$
$$+\|\varphi(t)-\varphi(t_0)\| g(\varphi(t)-\varphi(t_0))$$

όπου η g ικανοποιεί

Απόδειξη (του κανόνα της αλυσίδας, 2)

$$g(h) \to 0, \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \|h\| \to 0.$$

Διαιρώντας με $t - t_0$ βρίσκουμε ότι

$$h'(t_0) =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \left\langle \nabla f\big(\varphi(t_0)\big), \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right\rangle$$

$$\pm \lim_{t \to t_0} \left\| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right\| g\big(\varphi(t) - \varphi(t_0)\big) =$$

$$= \left\langle \nabla f\big(\varphi(t_0), \varphi'(t_0)\big) \right\rangle \pm \|\varphi'(t_0)\| \times 0$$

αφού $g(h) \to 0$, καθώς το $h \to 0$.

Απόδειξη
(του κανόνα της αλυσίδας, 3)

Έτσι

$$h'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \left\langle \nabla f\big(\varphi(t_0), \varphi'(t_0)\big)\right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\varphi(t_0)\big) \frac{dx_j}{dt}(t_0)$$

Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας για να δείξουμε το θεώρημα μέσης τιμής.

Θεώρημα μέσης τιμής (1)

Έστω Α ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Για κάθε ζεύγος στοιχείων $x, y \in A$, υπάρχει x_* επί του ευθύγραμμου τμήμα που ενώνει το x με το y τ.ω.

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(x_*), x - y \rangle, (2)$$

Απόδειξη: έστω

$$\gamma(t) = (1-t)x + ty, t \in [0,1]$$

το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το x με το y.
Θέτουμε

$$h(t) = f o \gamma(t), t \in [0,1].$$

Θεώρημα μέσης τιμής (2)

Η h είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων και από το θεώρημα μέσης τιμής για συναρτήσεις μίας μεταβλητής έχουμε ότι

$$h(1) - h(0) = h'(t_*)$$

όπου $t_* \in [0,1]$.

Όμως $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ και από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$h'(t_*) = (fo\gamma)'(t_*) = \left\langle \nabla f\big(\gamma(t_*)\big), \gamma'(t_*) \right\rangle =$$

$$= \langle \nabla f(x_*), y - x \rangle,$$

Θεώρημα μέσης τιμής (3)

όπου $x_* = \gamma(t_*)$.

Η

$$h(1) - h(0) = h'(t_*)$$

είναι λοιπόν ισοδύναμη με την

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(x_*), y - x \rangle.$$

Παρατήρηση: Από την (2)

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(x_*), x - y \rangle.$$

είναι φανερό ότι η κλίση είναι ουσιαστικά ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης.

Πόρισμα-Πρόταση

Πόρισμα: Έστω A κυρτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Αν

$$\nabla f(x) = 0, \forall x \in A$$

τότε η f είναι σταθερά.

Πρόταση: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και συνεκτικό κατά τόξα και $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Αν

$$\nabla f(x) = 0, \forall x \in A,$$

τότε η f είναι σταθερά.

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και συνεκτικό κατά τόξα και $u, v\colon A \to \mathbb{R}$, C^1 συναρτήσεις που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v, \\ \partial_y u = -\partial_x v, \end{cases}$$

που είναι γνωστές στην Μιγαδική ανάλυση και ως σχέσεις των Cauchy-Riemann.

Αν επιπλέον

$$u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = c \neq 0, \forall (x,y)$$

δείξτε ότι οι u και v είναι σταθερές.

Παράδειγμα 2 (2)

Λύση: αρκεί να δείξουμε ότι

$$\nabla u(x,y) = 0 = \nabla v(x,y), \forall (x,y) \in A.$$

Παραγωγίζουμε λοιπόν την (3,10) ως προς x και έχουμε

$$\partial_x(u^2 + v^2) = 2u\partial_x u + 2v\partial_v = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη σχέση των 3,9, αντικαθιστούμε την $\partial_x u$ με το ίσον της και έχουμε

$$u\partial_y v + v\partial_x v = 0$$

Παραγωγίζοντας τώρα την 3,10 ως προς y,

Παράδειγμα 2 (3)

και χρησιμοποιώντας την δεύτερη σχέση των 3,9 βρίσκουμε ότι

$$v\partial_y v - u\partial_x v = 0$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{cases} u\partial_y v + v\partial_x v = 0, \\ v\partial_y v - u\partial_x v = 0, \end{cases}$$

Με αγνώστους τις $\partial_y v$ και $\partial_x v$.

Η διακρίνουσα του είναι η

Παράδειγμα 2 (4)

$$\begin{vmatrix} u & v \\ v & -u \end{vmatrix} = -u^2 - v^2 = -c \neq 0,$$

Και συνεπώς το σύστημα έχει μόνο την μηδενική λύση. Έτσι

$$\partial_y v = \partial_x v = 0 \text{ ή } \nabla v = (0,0), \forall (x,y) \in A.$$

Αφού το A είναι ανοικτό και συνεκτικό κατά τόξα, από την Πρόταση 3,26, συμπεραίνουμε ότι η v είναι σταθερά. Από την 3,10 έχουμε ότι και η u είναι σταθερά.

Παράδειγμα 3 (1)

Αν

$$f(x,y,z) = \eta\mu x + xy^2 + z^4$$

δείξτε ότι

$$|f(x,y,z)| \leq 5\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

για κάθε

$$f(x,y,z) \in B(0,1)$$

Λύση: Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|f(x,y,z) - f(0,0,0)| = |\langle \nabla f(x^*,y^*,z^*),(x,y,z)\rangle|$$
$$= |\langle (\sigma\upsilon\nu x^* + y^{*2}, 2x^*y^*, 4z^{*3}),(x,y,z)\rangle|,$$

Παράδειγμα 3 (2)

όπου (x^*, y^*, z^*) βρίσκεται επί του ευθύγραμμου διαστήματος που ενώνει το $(0,0,0)$ και το (x, y, z). Όμως $f(0,0,0) = 0$ και με Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$|f(x,y,z)| \leq \|\nabla f(x^*, y^*, z^*)\| \|(x,y,z)\| =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{(\sigma\upsilon\nu x^* + y^{*2})^2 + 4x^{*2}y^{*2} + 16z^{*6}}$$

$$\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{4 + 4 + 16}$$

$$\leq 5\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονικης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Ιδιότητες της κλίσης, Κανόνας της αλυσίδας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης