ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 9: Ιδιότητες της κλίσης.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μεταβολή της συνάρτησης και κλίση.
2. Κλίση και ισότιμες επιφάνειες.
3. Εφαπτόμενο επίπεδο και κλίση.
4. Παραδείγματα και Ασκ.

Σκοποί ενότητας

- Συνέχεια της μελέτης των ιδιοτήτων της κλίσης.

Κατευθυνόμενη παράγωγος (1)

Η κλίση ∇f ως παράγωγος της f, θα πρέπει να έχει και κάποια σχέση με τον ρυθμό μεταβολής της f, όπως συμβαίνει στην διάσταση 1.

Για τις πολλές μεταβλητές χρειαζόμαστε πρώτα την έννοια της κατευθυνόμενης παραγώγου.

Ορισμός: Έστω U ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: U \to \mathbb{R}$. Αν e είναι μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και $x_0 \in U$, τότε η **κατευθυνόμενη παράγωγος** $\nabla_e f(x_0)$ της f στην κατεύθυνση e και στο σημείο x_0 είναι το όριο

Κατευθυνόμενη παράγωγος (2)

$$\nabla_e f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

Αν το ως άνω όριο υπάρχει, τότε λέμε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 στην κατεύθυνση e.

Βλέπουμε αμέσως ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι το όριο της μεταβολής της f επί της ευθείας $x_0 + te, t \in \mathbb{R}$, δια την ‘μεταβολή της μεταβλητής’ αφού

$$|t| = \|x_0 + te - x_0\| = \|te\| = |t|\|e\|.$$

Κατευθυνόμενη παράγωγος (3)

Προφανώς αν $e = e_j, j = 1, \ldots, n$ τότε οι κατευθυνόμενες παράγωγοι δεν είναι άλλες από τις μερικές παραγώγους της $f(x_0)$:

$$\nabla_{e_j} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Την κατευθυνόμενη παράγωγο $\nabla_e f(x_0)$ την υπολογίζουμε ή χρησιμοποιώντας τον ορισμό ή την πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση

Έστω U ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $x_0 \in U$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ως προς κάθε κατεύθυνση α και

$$\nabla_a f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), a \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Επιπλέον

$$|\nabla_a f(x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right)^2}$$

Παρατήρηση (1)

Σημειώνουμε ότι η ανισότητα 3,11 είναι ισότητα όταν το διάνυσμα α και η κλίση $\nabla f(x_0)$ είναι συγγραμικά. Αν δηλαδή $a \| \nabla f(x_0)$, τότε

$$|\nabla_a f(x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\| \|a\|$$

και συνεπώς

$$\nabla_a f(x_0) = \begin{cases} \|\nabla f(x_0)\| & \alpha\nu\ \alpha\ \kappa\alpha\iota\ \nabla f(x_0)\ o\mu\acute{o}\rho o\pi\alpha \\ -\|\nabla f(x_0)\| & \alpha\nu\ \alpha\ \kappa\alpha\iota\ \nabla f(x_0)\ \alpha\nu\tau\iota\rho o\pi\alpha \end{cases}$$

Παρατήρηση (2)

Άρα η μεταβολή της συνάρτησης στο x_0 γίνεται μέγιστη στην κατεύθυνση της κλίσης ενώ γίνεται ελάχιστη στην αντίθετη κατεύθυνση.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η μεταβολή της συνάρτησης στο x_0 είναι μηδενική στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στην κλίση.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1 (1)

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ένα έντομο κινείται στο επίπεδο όπου η θερμοκρασία δίνεται από την συνάρτηση $T(x, y)$. Αν το έντομο βρίσκεται αρχικά στην θέση (x_0, y_0), υποθέτουμε ότι το μέλημα του είναι να βρεθεί το γρηγορότερο στο πιο ζεστό σημείο.

Να προσδιοριστεί λοιπόν η κατεύθυνση $\vec{e}$ επί της οπίας η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι μέγιστη.

Παράδειγμα 1 (2)

Λύση: Για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση $\vec{e}$ θέτουμε

$$\gamma_e(t) = (x_0, y_0) + t\vec{e},$$

και

$$h_e(t) = T(\gamma_e(t)).$$

Η $h_e(t)$ είναι η θερμοκρασία επί της ευθείας $\gamma_e(t)$ και συνεπώς η μεταβολή της θερμοκρασίας στην θέση (x_0, y_0) και κατά την κατεύθυνση είναι η παράγωγος

Παράδειγμα 1 (3)

$$h_e'(0) = (To\gamma_e)'(0) = \langle \nabla T(\gamma_e(0)), \gamma_e'(0)\rangle$$
$$= \langle \nabla T(x_0, y_0), \vec{e}\rangle,$$

από τον κανόνα της αλυσίδας και τον ορισμό της $\gamma_e(t)$.

Όμως

$$\langle \nabla T(x_0, y_0), \vec{e}\rangle = \|\nabla T(x_0, y_0)\|\|\vec{e}\|\sigma\upsilon\nu\theta$$

όπου θ είναι η γωνία που φτιάχνουν τα διανύσματα $\nabla T(x_0, y_0)$ και $\vec{e}$.

Έχουμε λοιπόν

Παράδειγμα 1 (4)

$$h'(0) = \|\nabla T(x_0, y_0)\| \|\vec{e}\| \sigma\upsilon\nu\theta,$$

το οποίο γίνεται μέγιστο αν $\sigma\upsilon\nu\theta = 1$, αν δηλαδή $\theta = 0$ ή $\vec{e}$ είναι παράλληλη της $\nabla T(x_0, y_0)$.

Συνεπώς, η μεταβολή της θερμοκρασίας γίνεται μέγιστη στην κατεύθυνση της κλίσης.

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω ότι η θερμοκρασία στο επίπεδο δίνεται από την συνάρτηση

$$T(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{2}.$$

Να βρεθεί η καμπύλη $\gamma(t), t \geq 0$, με $\|\gamma'(t)\| = 1, \forall t \geq 0$, και επί της οποίας η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι μέγιστη.

Λύση: Αφού όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, η μεταβολή της θερμοκρασίας γίνεται μέγιστη στην κατεύθυνση της κλίσης, μας ζητείται

Παράδειγμα 2 (2)

να βρούμε μία καμπύλη

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big), t \geq 0,$$

με παράγωγο παράλληλη προς την κλίση, δηλαδή,

$$\gamma'(t) \_\_ \nabla\left(\mathrm{T}\big(\gamma(\mathrm{t})\big)\right)$$

Και τέτοια ώστε $\|\gamma'(t)\| = 1$ για κάθε $t \geq 0$.

Άρα

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = \frac{\nabla\left(\mathrm{T}\big(\gamma(\mathrm{t})\big)\right)}{\left\|\nabla\left(\mathrm{T}\big(\gamma(\mathrm{t})\big)\right)\right\|}, t \geq 0.$$

Παράδειγμα 2 (3)

Όμως

$$\nabla f(x, y) = (-x, y).$$

Άρα

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = \frac{\nabla\left(\mathrm{T}(\gamma(\mathrm{t}))\right)}{\left\|\nabla\left(\mathrm{T}(\gamma(\mathrm{t}))\right)\right\|}$$

$$= \frac{(-x(t), y(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, t \geq 0$$

Παράδειγμα 2 (4)

Άρα

$$x'(t) = \frac{-x(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

και

$$y'(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

Παράδειγμα 2 (5)

Πολλαπλασιάζοντας το $x'(t)$ με το $y(t)$ και το $y'(t)$ με το $x(t)$, διαπιστώνουμε ότι

$$x'(t)y(t) = -\frac{x(t)y(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} = -x(t)y'(t)$$

και συνεπώς

$$\big(x(t)y(t)\big)' = 0$$

Ή

$$x(t)y(t) = c, \forall t \geq 0.$$

Κλίση και ισότιμες επιφάνειες

Θα μελετήσουμε τώρα ορισμένες αναλυτικο-γεωμετρικές ιδιότητες που σχετίζονται με τις ισότιμες επιφάνειες της συνάρτησης.

Ορισμός: Έστω Α ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Αν $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$, μια ισότιμη ή ισοϋψής επιφάνεια της f στο 'ύψος' Κ, είναι το σύνολο

$$S_K(f) = \{x \in A: f(x) = K\}$$

Παράδειγμα 3

Για παράδειγμα, αν

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},$$

τότε

$$S_K(f)=\left\{(x,y)\in A:\sqrt{x^2+y^2}=K\right\}=S(0,K),$$

είναι ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα Κ.

Αν $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, τότε

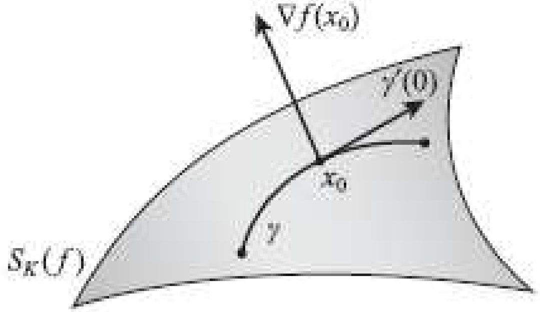
$$S_K(f)=S_2(0,K)$$

είναι η σφαίρα με κέντρο το 0 και ακτίνα Κ.

Πρόταση

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει μια εποπτική εικόνα της κλίσης.

Πρόταση: Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Αν x_0 ανήκει στην ισότιμη επιφάνεια $S_K(f)$, τότε η κλίση $\nabla f(x_0)$ είναι κάθετη στην $S_K(f)$ στο σημείο x_0.



Παράδειγμα 4

Αν $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, τότε

$$S_K(f) = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 = K\}$$
$$= S_2(0, \sqrt{K})$$

είναι η σφαίρα με κέντρο το 0 και ακτίνα $\sqrt{\mathrm{K}}$ και

$$\nabla f(x,y,z) = 2(x,y,z) = 2\vec{r},$$

όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσεως.

Εφαρμογή 1 (1)
(Η κάθετος στο γράφημα συνάρτησης)

Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Τότε το διάνυσμα $(\nabla f(x), -1)$ είναι κάθετο στο γράφημα της f στο σημείο $\big(x, f(x)\big)$.

Απόδειξη: Το γράφημα της f είναι το σύνολο

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R}: f(x) = y\} \subset A \times \mathbb{R}$$

Θέτουμε

$$g(x, y) = f(x) - y, (x, y) \in A \times \mathbb{R},$$

και παρατηρούμε ότι

$$g(x, y) = f(x) - y = 0, \alpha\nu\ (x, y) \in \Gamma(f),$$

Εφαρμογή 1 (2)
(Η κάθετος στο γράφημα συνάρτησης)

δηλαδή το γράφημα $\Gamma(f)$ της f είναι ισότιμη επιφάνεια της g.

Κατά συνέπεια ένα κάθετο διάνυσμα στο σημείο (x, y) του γραφήματος είναι η κλίση της g:

$$\nabla g(x,y) = \left(\partial_{x_1} g(x,y), \dots, \partial_{x_n} g(x,y), \partial_y g(x,y)\right)$$

$$= \left(\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_n} f(x), -\partial_y y\right) =$$

$$= (\nabla f(x), -1)$$

Εφαπτόμενο επίπεδο και κλίση (1)

Όπως είναι γνωστό από την Αναλυτική Γεωμετρία, τα σημεία (x, y, z) ενός επιπέδου E του $\mathbb{R}^3$, που περνά από το σημείο (x_0, y_0, z_0) ικανοποιούν την αφφινική εξίσωση:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή, η κλίση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης

$$\mathbb{R}^2 \supset f\colon A \to \mathbb{R}$$

ορίζει το εφαπτόμενο επίπεδο E στο γράφημα της f

Εφαπτόμενο επίπεδο και κλίση (2)

που περνά από το σημείο $\big((x_0, y_0), f(x_0, y_0)\big)$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3,37 και την σχέση 3,12, εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σημείο (x, y, z) ανήκει στο E αν

$$\begin{aligned} z - f(x_0, y_0) &= \left\langle \nabla\big(f(x_0, y_0)\big), (x - x_0, y - y_0)\right\rangle \\ &= \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Συνήθως, λέμε το E εφαπτόμενο επίπεδο της f στο (x_0, y_0).

Παράδειγμα 4 (1)

Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της

$$f(x,y) = x^2y + xy^3,$$

στο σημείο $(-1,1)$.

Λύση: Έχουμε $f(-1,1) = 0$, και

$$\partial_x f(x,y) = 2xy + y^3, \partial_y f(x,y) = x^2 + 3xy^2.$$

Άρα τα σημεία (x,y,z) που ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο ικανοποιούν την εξίσωση

$$\begin{aligned} z &= 0 + (-1)(x+1) + (-2)(y-1) \\ &= -x - 2y + 1. \end{aligned}$$

Αφφινική

Προφανώς, το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f μπορούμε να το ορίσουμε και στην περίπτωση περισσοτέρων των δύο μεταβλητών, δηλαδή για συναρτήσεις

$$\mathbb{R}^n \supset f: A \to \mathbb{R}.$$

Ο ορισμός είναι ακριβώς ο ίδιος: το εφαπτόμενο επίπεδο E στο γράφημα της f που περνά από το σημείο $(x_0, f(x_0))$ ορίζεται από την αφφινική:

$$z - f(x_0) = \left\langle \nabla\big(f(x_0)\big), (x - x_0) \right\rangle.$$

Παράδειγμα 5 (1)

Έστω f

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{R^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)},$$

όπου $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B(0, R)$. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο σημείο $(0, \dots, 0, \frac{\mathrm{R}}{2})$.

Λύση: Έχουμε

$$\partial_{x_j} f = \frac{1}{2} \frac{-2x_j}{\sqrt{R^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)}}$$

Παράδειγμα 5 (2)

Επομένως

$$\partial_{x_j} f\left(0, \dots, 0, \frac{\mathrm{R}}{2}\right) = 0, \alpha\nu\ j \leq n-1,$$

και

$$\partial_{x_n} f\left(0, \dots, 0, \frac{\mathrm{R}}{2}\right) = \frac{-\frac{R}{2}}{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha\nu\ j = n.$$

Συνεπώς $(x, z) \in E$ αν ικανοποιεί

$$z = f\left(0, \dots, 0, \frac{R}{2}\right) + \partial_{x_n} f\left(0, \dots, 0, \frac{R}{2}\right)\left(x_n - \frac{R}{2}\right)$$

$$= R\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x_n - \frac{R}{2})$$

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Ιδιότητες της κλίσης». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης