ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 10: Παραγώγιση Διανυσματικών Συναρτήσεων.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ορισμός παραγώγου διανυσματικών συναρτήσεων.
2. Ιδιότητες.
3. Παραδείγματα: οι κλασικοί μετασχηματισμοί.

Σκοποί ενότητας

- Ορισμός της παραγώγου διανυσματικών συναρτήσεων.

Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης (1)

Στην περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

είδαμε πως η παράγωγος της διαφορίσιμης f είναι το διάνυσμα των μερικών παραγώγων

$$\nabla f(x) = Df(x) = \left(\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_n} f(x)\right).$$

Στην περίπτωση μιας διανυσματικής συνάρτησης

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

με συνιστώσες τις $f_1, f_2, \dots, f_m$,

Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης (2)

η παράγωγος της f δίνεται πάλι από το σύνολο των μερικών παραγώγων των συνιστωσών της.

Ας ξεκινήσουμε όμως με το πιο εύκολο παράδειγμα.

Την καμπύλη στο επίπεδο, δηλαδή μια διανυσματική συνάρτηση

$$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^2,$$

με συνιστώσες τις $x(t)$ και $y(t)$. Γράφουμε

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης (3)

Για την παράγωγό της, παρατηρούμε ότι

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{h\to 0} \dfrac{x(t+h)-x(t)}{h} \\ \lim_{h\to 0} \dfrac{y(t+h)-y(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

αφού το όριο ενός διανύσματος είναι το όριο των συνιστωσών του.

Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης (4)

Συνεπώς η παράγωγος της καμπύλης $\varphi(t)$ δίδεται από το διάνυσμα στήλη των παραγώγων των συνιστωσών της.

Έτσι, αν π.χ.

$$x(t) = 2t \; και \; y(t) = ημt,$$

τότε

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ συνt \end{pmatrix}$$

Κατ' αναλογίαν, για την διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m,$$

Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης (5)

με συνιστώσες τις $f_1, f_2, \dots, f_m$, θα πρέπει να ισχύει το ίδιο, δηλαδή η παράγωγος της f είναι ίση με το ‘διάνυσμα στήλη’ των παραγώγων των συνιστωσών της.

Έτσι, αν $Df(x)$ είναι η παράγωγος της f στο x, τότε πρέπει να έχουμε

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \dots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (1)

αφού οι παράγωγοι των συνιστωσών $f_1, f_2, \dots, f_m$ είναι οι $\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_m$.

Παραδείγματος χάριν, αν η $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y) = (x + y, \eta\mu xy) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, η παράγωγος είναι ο $2x2$ πίνακας

Παράδειγμα 1 (2)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y) \\ \nabla f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y\sigma\upsilon\nu xy & x\sigma\upsilon\nu xy \end{pmatrix}$$

Έχοντας μαντέψει την παράγωγο μιας διανυσματικής συνάρτησης, μπορούμε πλέον να δώσουμε τον ορισμό της διαφορισιμότητας διανυσματικών συναρτήσεων στην πλήρη γενικότητα του.

Ορισμός διαφορισιμότητας διανυσματικών συναρτήσεων (1)

Έστω $\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ και

$$\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, \dots, f_m),$$

μία διανυσματική συνάρτηση.

1. Η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$, αν υπάρχει ο πίνακας των μερικών παραγώγων

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

Ορισμός διαφορισιμότητας διανυσματικών συναρτήσεων (2)

και επιπλέον, αν το $h \in \mathbb{R}^n$ είναι αρκούντως μικρό ώστε $x_0 + h \in A$, τότε

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Ο πίνακας $Df(x_0)$ των μερικών παραγώγων λέγεται παράγωγος της f στο x_0.

2. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σ' όλο το A αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A.

Πρόταση
(γραμμικότητα της παραγώγου)

Έστω $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό και $f, g \colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}^m$, διαφορίσιμες.

Τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$D(\lambda f + \mu g) = \lambda D f + \mu D g.$$

Η Πρόταση που ακολουθεί προσδιορίζει μια μεγάλη κλάση διαφορίσιμων διανυσματικών συναρτήσεων.

Πρόταση

Έστω A $ανοικτό$ $του$ $\mathbb{R}^n$ και $\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, μία διανυσματική συνάρτηση με συνιστώσες τις $f_1, \dots, f_m$.

1. Αν οι $f_1, \dots, f_m$ είναι C^1 σε μια περιοχή του x_0, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0.
2. Αν η f είναι C^1 στο A, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο A.

Παράδειγμα 2 (1)

Αν $f(x,y,z)=(xe^z, y\eta\mu x)$, να υπολογιστεί η παράγωγος της f για κάθε (x,y,z).

Λύση: Οι συνιστώσες

$f_1(x,y,z)=xe^z$ και $f_2(x,y,z)=y\eta\mu x$

είναι προφανώς C^1και συνεπώς η f είναι διαφορίσιμη σ’όλο τον $\mathbb{R}^3$.

Η παράγωγος της είναι ο πίνακας των μερικών παραγώγων

Παράδειγμα 2 (2)

$$Df(x,y,z) =$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_x(xe^z) & \partial_y(xe^z) & \partial_z(xe^z) \\ \partial_x(y\eta\mu x) & \partial_y(y\eta\mu x) & \partial_z(y\eta\mu x) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^z & 0 & xe^z \\ y\sigma\upsilon\nu x & \eta\mu x & 0 \end{pmatrix}$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν υπολογίζουμε την παράγωγο των κλασικών καμπυλόγραμμων συντεταγμένων του $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 3 (1) (πολικές συντεταγμένες)

Να υπολογιστεί η παράγωγος του μετασχηματισμού των πολικών συντεταγμένων

$$f(r,\theta) = \big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big) = (r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta),$$

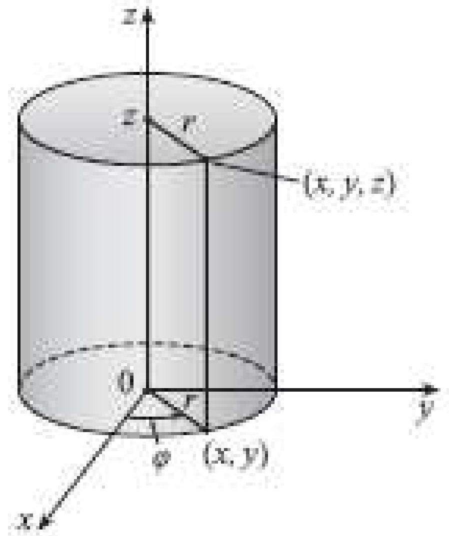
$r \in [0, +\infty), \theta \in [0,2\pi)$.

Λύση: Οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι προφανώς C^1 και

$$Df(r,\theta) = \begin{pmatrix} \partial_r(r\sigma\upsilon\nu\theta) & \partial_\theta(r\sigma\upsilon\nu\theta) \\ \partial_r(r\eta\mu\theta) & \partial_\theta(r\eta\mu\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -r\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & r\sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3 (2)
(πολικές συντεταγμένες)



Σχήμα 1 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Παράδειγμα 3 (3)
(πολικές συντεταγμένες)

Συνεπώς, η παράγωγος ενός **μετασχηματισμού**

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n,$$

που είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$, λέγεται και **Ιακωβιανός πίνακας** του μετασχηματισμού ή απλά **Ιακωβιανή**.

Στις τρεις διαστάσεις, πλην των καρτεσιανών συντεταγμένων, συντεταγμένες ευρείας χρήσεως είναι επίσης οι **κυλινδρικές** και οι **σφαιρικές**.

Παράδειγμα 4 (1) (Κυλινδρικές συντεταγμένες)

Για να βρούμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, θεωρούμε ότι βρίσκεται επί του κυλίνδρου με άξονα τον άξονα των z και ακτίνα $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (δες Σχήμα 4,1).

Στο σχήμα αυτό, οι κυλινδρικές οφείλουν προφανώς το όνομα τους.

Έχουμε

$$x = r\sigma\upsilon\nu\theta, \qquad y = r\eta\mu\theta, \qquad z = z$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού T των

Παράδειγμα 4 (2) (Κυλινδρικές συντεταγμένες)

κυλινδρικών συντεταγμένων είναι

$$(r,\theta,z)\xrightarrow{\mathrm{T}}(x=r\sigma\upsilon\nu\theta, y=r\eta\mu\theta, z)$$

είναι η

$$DT=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta & 0\\ -r\eta\mu\theta & r\sigma\upsilon\nu\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

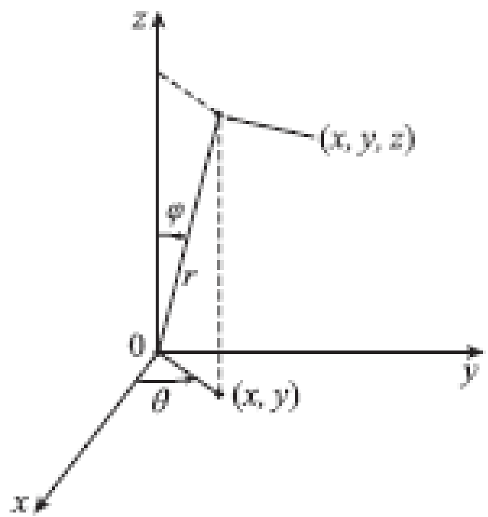
Παράδειγμα 5 (1) (σφαιρικές συντεταγμένες)

Ας περάσουμε στις σφαιρικές συντεταγμένες του $\mathbb{R}^3$.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες ενός σημείου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, υπολογίζονται θεωρώντας ότι το σημείο βρίσκεται επί της σφαίρας με κέντρο το 0 και ακτίνα $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Όπως και στην περίπτωση των κυλινδρικών, ακριβώς το Σχήμα 2 αυτό οφείλουν οι σφαιρικές το ονομά τους.

Σχήμα 2



Παράδειγμα 5 (2) (σφαιρικές συντεταγμένες)

Έχουμε, λοιπόν

$$r > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

και

$$x = r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta, y = r\eta\mu\varphi\eta\mu\theta, z = r\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού των σφαιρικών συντεταγμένων

$$(r, \theta, \varphi) \to (x = r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta, y = r\eta\mu\varphi\eta\mu\theta, z = r\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

δίνεται από τον πίνακα

Παράδειγμα 5 (3) (σφαιρικές συντεταγμένες)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\varphi\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\varphi \\ -r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta & r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta & 0 \\ r\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta & r\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta & -r\eta\mu\varphi \end{pmatrix}$$

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Παραγώγιση Διανυσματικών Συναρτήσεων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης