ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 12: Οι κλασικοί μετασχηματισμοί και ο κανόνας της αλυσίδας.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Η Λαπλασιανή στις πολικές και σφαιρικές συντεταγμένες.
2. Αρμονικές συναρτήσεις.
3. Παραδείγματα, Ασκήσεις.

Σκοποί ενότητας

- Εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας στους κλασικούς μετασχηματισμούς.

Πολικές συντεταγμένες (1)

Ξεκινάμε με τις πολικές συντεταγμένες

$$[0,+\infty) \times [0,2\pi) \overset{\mathrm{T}}{\to} \qquad \mathbb{R}^2$$

$$(r,\theta) \qquad \rightsquigarrow (x,y) = (r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)$$

Μία συνάρτηση $f(x,y)$ των μεταβλητών x και y στις Καρτεσιανές συντεταγμένες, έχει και μια ισοδύναμη έκφραση στις πολικές συντεταγμένες ως συνάρτηση των μεταβλητών r και θ:

$$f(x,y) = f(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta).$$

Όπως είπαμε και παραπάνω, συνήθως γράφουμε

Πολικές συντεταγμένες (2)

$f(r,\theta)$ αντί του σωστότερου $f(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)$.

Η εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας στην περίπτωση πολικών δίνει:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta$$

Και

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\eta\mu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}r\sigma\upsilon\nu\theta.$$

Πολικές συντεταγμένες (3)

Αν παραδείγματος χάριν

$$f(x,y) = 2x + y^2,$$

τότε

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2y\eta\mu\theta = 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2r\eta\mu^2\theta$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -2r\eta\mu\theta + 2yr\sigma\upsilon\nu\theta =$$
$$= -2r\eta\mu\theta + 2r^2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta$$

Πολικές συντεταγμένες (4)

Θυμίζουμε ότι η Λαπλασιανή Δf μιας συνάρτησης $f(x,y)$ ορίζεται ως το άθροισμα

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)\ (1)$$

και παίζει κεντρικό ρόλο στην Μαθηματική Ανάλυση (και όχι μόνο). Π.χ. η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(t,x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(t,x,y), t > 0$$

Πολικές συντεταγμένες (5)

μας δίδει την διάχυση της θερμότητας στο επίπεδο.

Αρκετές φορές για να λύσουμε την (1), είμαστε αναγκασμένοι να περάσουμε στις πολικές συντεταγμένες και έτσι η έκφραση της Δf στις πολικές συντεταγμένες είναι απαραίτητη.

Παράδειγμα 1 (1)
(Η Λαπλασιανή στις πολικές)

Δείξτε ότι η Λαπλασιανή στις πολικές συντεταγμένες γράφεται ως εξής

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}, (2)$$

Λύση: Όπως ήδη είδαμε, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta.$$

Μία δεύτερη εφαρμογή του κανόνα δίνει

Παράδειγμα 1 (2)
(Η Λαπλασιανή στις πολικές)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \eta\mu\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$+ \eta\mu\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ έχουμε

Παράδειγμα 1 (3)
(Η Λαπλασιανή στις πολικές)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \sigma\upsilon\nu\theta \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\eta\mu\theta\right\}$$
$$+ \eta\mu\theta \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta\mu\theta\right\} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma\upsilon\nu^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta\mu^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \eta\mu^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta -$$

Παράδειγμα 1 (4)
(Η Λαπλασιανή στις πολικές)

$$-2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} r^2 \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta - r\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta\right\}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ με $\frac{1}{r^2}$ και αθροίζοντας με την $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ καταλήγουμε στην

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta\right\} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

Παράδειγμα 1 (5)
(Η Λαπλασιανή στις πολικές)

αφού

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta.$$

Συνεπώς

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Και η Λαπλασιανή στις πολικές γράφεται ως

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Παράδειγμα 2 (1)

Η (2) είναι χρήσιμη στις περιπτώσεις που η $f(x,y)$ έχει απλή έκφραση στις πολικές συντεταγμένες, π.χ. αν η $f(x,y)$ είναι ανεξάρτητη του r ή του θ.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η

$$f(x,y) = log\sqrt{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$$

είναι αρμονική, δηλαδή $\Delta f(x,y) = 0$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

Λύση: Παίρνουμε τις πολικές συντεταγμένες και έχουμε

Παράδειγμα 2 (2)

$$f(x, y) = logr, r > 0.$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) logr$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} logr + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} logr = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η

$$P(r,\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\sigma\upsilon\nu\theta + r^2}, r \geq 0, \theta \in [0,2\pi),$$

είναι αρμονική, δηλαδή $\Delta P(r,\theta) = 0$ για κάθε $r \geq 0$ και $\theta \in [0,2\pi)$.

Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του τύπου της Λαπλασιανής στις πολικές συντεταγμένες και συστήνουμε στον αναγνώστη να την κάνει μόνος του.

Παρατήρηση

Οι αρμονικές συναρτήσεις

$$f(x,y) = logr, r > 0$$

και

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\sigma\upsilon\nu\theta + r^2}, r \geq 0, \theta \in [0,2\pi),$$

είναι διάσημες και πολύ σημαντικές στα Μαθηματικά αλλά και στην Φυσική αφού περιγράφουν πολλά φυσικά φαινόμενα. Η $f(x,y) = logr$ λέγεται συνάρτηση Green και θα δούμε αργότερα ότι μας δίνει την λύση της διαφορικής εξίσωσης $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \varphi$, γνωστή και ως μη ομογενής εξίσωση του Laplace.

Παράδειγμα 4 (1)
(Η Λαπλασιανή στις σφαιρικές)

Θυμίζουμε ότι οι σφαιρικές συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις

$$x = r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta, y = r\eta\mu\varphi\eta\mu\theta, z = r\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\varphi\eta\mu\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\sigma\upsilon\nu\varphi.\end{aligned}$$

Ομοίως

Παράδειγμα 4 (2)
(Η Λαπλασιανή στις σφαιρικές)

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} r\eta\mu\varphi(-\eta\mu\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\theta + 0,$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} r\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{\partial f}{\partial z}\eta\mu\varphi.$$

Παράδειγμα 4 (3)
(Η Λαπλασιανή στις σφαιρικές)

Δουλεύοντας όπως στις πολικές, βρίσκουμε ότι η έκφραση της Λαπλασιανής στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι η ακόλουθη:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \eta\mu^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$
$$+ \frac{1}{r^2}\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Από την παραπάνω διαπιστώνουμε αμέσως ότι η συνάρτηση

Παράδειγμα 4 (4)
(Η Λαπλασιανή στις σφαιρικές)

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\|x\|} = \frac{1}{r}, r > 0,$$

είναι αρμονική. Η $G(x, y, z)$ είναι η συνάρτηση Green του $\mathbb{R}^3$ και θα δούμε αργότερα ότι μας δίνει την λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\Delta g = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \varphi.$$

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Οι κλασικοί μετασχηματισμοί και ο κανόνας της αλυσίδας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης