ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 13: Τύπος του Taylor.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Τύπος του Taylor.

Σκοποί ενότητας

- Απόδειξη του τύπου του Taylor 2ης τάξης.

Ο τύπος του Taylor στη διάσταση 1

Ας ξεκινήσουμε από την διάσταση 1. Έστω

$$f:(a,b)\to\mathbb{R},$$

μία συνάρτηση $n+1$ φορές διαφορίσιμη και x_0 ένα σημείο του (a,b). Ο τύπος του Taylor μας επιτρέπει να αναπτύξουμε την f σε πολυώνυμο. Για κάθε $x\in(a,b)$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)$$

Τύπος Taylor στη διάσταση 1 (1)

όπου το θ είναι ανάμεσα στο x και στο x_0 και εξαρτάται από το εκάστοτε x. Ο τελευταίος όρος λέγεται **υπόλοιπο** και συμβολίζεται με

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

Το πολυώνυμο

$$T_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

λέγεται **πολυώνυμο Taylor τάξης** n της f.

Τύπος Taylor στη διάσταση 1 (2)

Ο τύπος του Taylor μας δίνει λοιπόν μια σαφή εικόνα της συνάρτησης συναρτήσει των παραγώγων της. Μάλιστα, αν πάρουμε το x πολύ κοντά στο x_0, τότε το υπόλοιπο $R_n(x, x_0)$ είναι πολύ πιο μικρό από τους υπόλοιπους όρους του αναπτύγματος αφού

$$\frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n (n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)$$

$$= \frac{(x - x_0)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Τύπος Taylor στη διάσταση 1 (3)

Έτσι μπορούμε να το θεωρήσουμε το $R_n(x, x_0)$ αμελητέο και κατά συνέπεια έχουμε μια πολύ καλή προσέγγιση της f από το πολυώνυμο Taylor:

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Με τον τύπο του Taylor, μπορούμε να δούμε π.χ. ότι για x κοντά στο 0, το $\eta\mu x$ προσεγγίζεται από το πολυώνυμο

Τύπος Taylor στη διάσταση 1 (4)

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},$$

ενώ το θεώρημα μέσης τιμής δίνει μόνο

$$\eta\mu x \cong x.$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι ο τύπος του Taylor δίνει προσεγγίσεις ανώτερης τάξης και σαφώς καλύτερες από κάθε άλλη μέθοδο. Έτσι καθίσταται ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο της Μαθηματικής ανάλυσης.

Τοπικά ακρότατα και Taylor

Μία άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Taylor είναι στην μελέτη των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης. Στην διάσταση 1 και πάλι, αν το x_0 είναι τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0) = 0$ και το πολυώνυμο Taylor δίνει ότι

$$f(x) - f(x_0) \cong \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0).$$

Συνεπώς, το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο, δηλαδή $f(x) > f(x_0)$ αν το x είναι κοντά στο x_0, όταν $f''(x) > 0$. Ανάλογα, το x_0 είναι τοπικό μέγιστο όταν $f''(x) < 0$.

Ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης

Θεώρημα: Έστω $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ τάξης C^3, τότε για $x \in U$ και $h \in \mathbb{R}^n$ αρκούντως μικρό ώστε $x + h \in U$, ισχύει:

$$f(x+h) =$$
$$= f(x) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$
$$+ R_2(x,h),$$

όπου το υπόλοιπο $R_2(x,h)$ ικανοποιεί

$$\frac{R_2(x,h)}{\|h\|^2} \to 0, \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ h \to 0.$$

Παράδειγμα 1 (1)

Αν π.χ.

$$f(x,y) = e^y \sigma\upsilon\nu x,$$

τότε για να βρούμε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το (0,0) παρατηρούμε ότι

$$f(0,0) = 1, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1,$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Παράδειγμα 1 (2)

Άρα

$$f(h_1, h_2) = 1 + h_2 - \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} + R(0, h).$$

Για h πολύ μικρό

$$f(h_1, h_2) \sim 1 + h_2 - \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2}.$$

Παράδειγμα 2 (1)

Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα Taylor της

$$f(x,y) = \eta\mu(2x+y)$$

στο (0,0).

Λύση: γράφουμε το ανάπτυγμα Taylor στις δύο διαστάσεις

$$\begin{aligned} f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) \\ &= \langle \nabla f(x), (h_1,h_2) \rangle + \frac{1}{2}\left\langle Hf(x,y)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ R_2\big((x,y),(h_1,h_2)\big) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 (2)

Αναπτύσσοντας τα εσωτερικά γινόμενα βρίσκουμε

$$f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)h_2^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)h_1h_2 + R_2\big((x,y),(h_1,h_2)\big)$$

Για την περίπτωση της $f(x,y)=\eta\mu(2x+y)$ έχουμε

Παράδειγμα 2 (3)

- $f(0,0) = 0,$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2\sigma\upsilon\nu(2.0 + 0) = 2,$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \sigma\upsilon\nu(2.0 + 0) = 1,$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0,$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$

Παράδειγμα 2 (4)

Άρα

$$f(h_1, h_2) = 2h_1 + h_2 + R_2(h_1, h_2),$$

όπου

$$\frac{R_2(h_1, h_2)}{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to 0]{} 0.$$

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Τύπος του Taylor». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης