ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 14: Τοπικά ακρότατα.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Κρίσιμα σημεία.
2. Τοπικά ακρότατα, κριτήριο της Εσσιανής.
3. Παραδείγματα.

Σκοποί ενότητας

- Μελέτη των τοπικών ακροτάτων συναρτήσεων.

Τοπικά ακρότατα

Στην παράγραφο αυτή, θα δώσουμε την μέθοδο εντοπισμού και χαρακτηρισμού των τοπικών ακροτάτων μιας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Η μέθοδος στηρίζεται στο ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης που εξηγήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ας ξεκινήσουμε θυμίζοντας τον ορισμό των τοπικών ακροτάτων.

Ορισμός τοπικών ακροτάτων

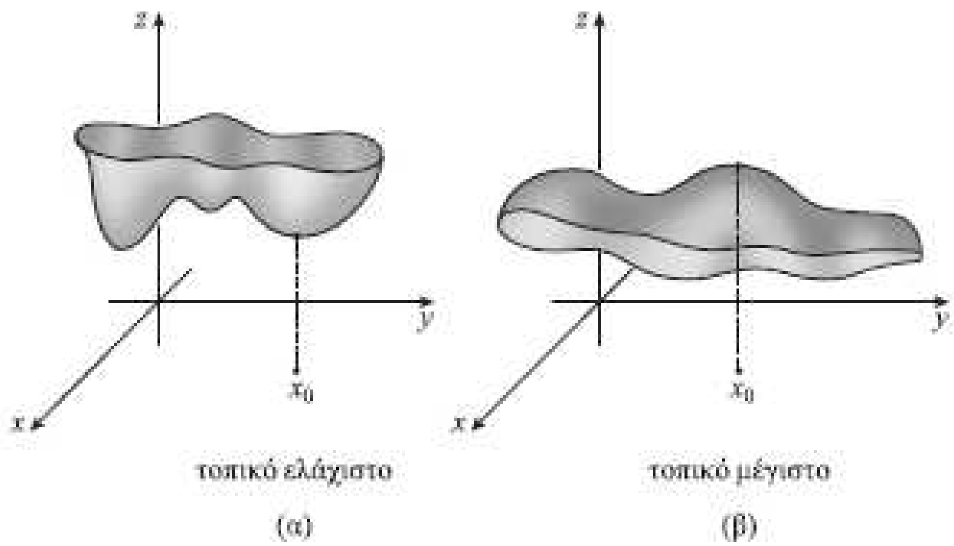
Έστω $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Το σημείο $x_0 \in U$ λέγεται

1. **Τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, r_0) \subset U$ και $f(x_0) > f(y)$ για κάθε $\mathrm{y} \in B(x_0, r_0)$.
2. **Τοπικό ελάχιστο** αν υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < f(y)$ για κάθε $\mathrm{y} \in B(x_0, r_0)$.

Τοπικά ακρότατα είναι τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

Το παρακάτω σχήμα 1 μας δείχνει πως είναι τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Σχήμα 1



Πρόταση

Η πρόταση που ακολουθεί είναι ουσιαστική για τον εντοπισμό των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης.

Πρόταση: Έστω $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, C^1και x_0 τοπικό ακρότατο της f. Τότε

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος ∇f λέγονται **κρίσιμα σημεία** ή **κριτικά σημεία** της f.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Λύση: Σύμφωνα με την πρόταση, τα κρίσιμα σημεία μηδενίζουν την κλίση

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)\right) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$(2x_0, 2y_0) = (0,0).$$

Άρα το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το (0,0). Από το γράφημα της f διαπιστώνουμε ότι το (0,0) είναι τοπικό ελάχιστο.

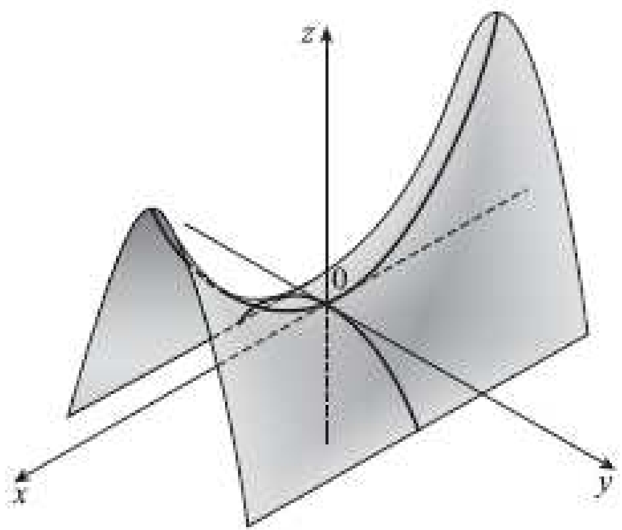
Παρατήρησεις (1)

1. Επισημαίνουμε ότι το αντίστροφο της Πρότασης δεν ισχύει, δηλαδή κάθε κρίσιμο σημείο δεν είναι και τοπικό ακρότατο. Το κλασσικό παράδειγμα είναι η
$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Έχουμε $\nabla f(x,y) = (2x,-2y)$.

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το (0,0) που όμως δεν είναι τοπικό ακρότατο. Πράγματι, $f(0,0) = 0$ ενώ για $\varepsilon > 0$ και μικρό,
$$f(\varepsilon,0) = \varepsilon^2 > 0 \; και \; f(0,\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$$

Παρατηρήσεις (2)



Σχήμα 2

Παρατήρησεις (3)

Άρα γύρω από το κρίσιμο σημείο (0,0) αλλά και όσο κοντά θέλουμε, η f παίρνει τιμές μεγαλύτερες και μικρότερες του $0 = f(0,0)$.

2. Τα κρίσιμα σημεία που δεν είναι τοπικά ακρότατα και παρουσιάζουν την συμπεριφορά που μόλις περιγράψαμε λέγονται σαγματικά ή αυχενικά. Το γράφημα της είναι υπεύθυνο για τον όρο αυτό αφού μοιάζει με αυχένα ή σέλλα. Σάγμα, λέγεται η σέλλα στα αρχαία Ελληνικά και σαμάρι στα νεώτερα.

Το κριτήριο της Εσσιανής (1)

Στην διάσταση 1, για να δούμε πότε ένα κρίσιμο σημείο είναι τοπικό ακρότατο, χρειαζόμαστε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου. Το κριτήριο αυτό, που είναι γνωστό και σαν κριτήριο της δεύτερης παραγώγου, είναι συνέπεια του τύπου του Taylor. Πράγματι, αν η

$$f:(a,b)\to\mathbb{R},$$

είναι C^3 και το x_0 είναι κρίσιμο, τότε

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+R_2(x_0,h)$$

Το κριτήριο της Εσσιανής (2)

$$= \frac{h^2}{2} f''(x_0) + R_2(x_0, h)$$

$$\sim \frac{h^2}{2} f''(x_0),$$

αφού $f'(x_0) = 0$ και το υπόλοιπο $R_2(x_0, h)$, που ικανοποιεί

$$\frac{R_2(x_0, h)}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

είναι αμελητέο σε σχέση με τον όρο $h^2 f''(x_0)$.
Συνεπώς, το x_0είναι τοπικό ελάχιστο αν $f''(x_0) > 0$ και τοπικό μέγιστο αν $f''(x_0) < 0$.

Το κριτήριο της Εσσιανής (3)

Αν $f''(x_0) = 0$, τότε ως γνωστόν το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου δεν δίνει αποφατική απάντηση.

Αν τώρα

$$\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

είναι C^3και το x_0 είναι κρίσιμο δηλαδή $\nabla f(x_0) = 0$, τότε από τον τύπο του Taylor έχουμε

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)h, h\rangle + R_2(x_0, h).$$

Και σε αυτή την περίπτωση, το υπόλοιπο $R_2(x_0, h)$

Το κριτήριο της Εσσιανής (4)

ικανοποιεί

$$\frac{R_2(x_0, h)}{\|h\|^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

και συνεπώς είναι αμελητέο σε σχέση με τον όρο $\langle Hf(x_0)h, h\rangle$ που ικανοποιεί

$$K_1\|h\|^2 \le |\langle Hf(x_0)h, h\rangle| \le K_2\|h\|^2.$$

Έτσι, η διαφορά

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

έχει το ίδιο πρόσημο με τον όρο $\langle Hf(x_0)h, h\rangle$.

Το κριτήριο της Εσσιανής (5)

Το x_0 είναι λοιπόν τοπικό ελάχιστο αν

$$\langle Hf(x_0)h, h\rangle > 0 \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\alpha\theta\varepsilon \; h \in \mathbb{R}^n,$$

και τοπικό μέγιστο αν

$$\langle Hf(x_0)h, h\rangle < 0 \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\alpha\theta\varepsilon \; h \in \mathbb{R}^n.$$

Το πρώτο λοιπόν που πρέπει να διευκρινιστεί είναι πότε η τετραγωνική μορφή

$$h \to \langle Hf(x_0)h, h\rangle$$

που αντιστοιχεί σε ένα συμμετρικό πίνακα, όπως η Εσσιανή $Hf(x_0)$, είναι θετική ή αρνητική.

Τεραγωνικές μορφές

Ορισμός: Έστω $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $n \times n$ και

$$Q_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(h) = \langle Ah, h \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} h_i h_j \,,$$

που αντιστοιχεί στον A.

Θετικά και αρνητικά ορισμένος πίνακας

Ο πίνακας Α λέγεται **θετικά ορισμένος** αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ τέτοιο ώστε

$$Q_A(h) \geq \mathrm{M}\|h\|^2$$

για κάθε $h \in \mathbb{R}^n_*$.

Ο πίνακας Α λέγεται **αρνητικά ορισμένος** αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ τέτοιο ώστε

$$Q_A(h) \leq -\mathrm{M}\|h\|^2$$

για κάθε $h \in \mathbb{R}^n_*$.

Κριτήριο του Sylvester (1)

Λήμμα: Έστω $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $n \times n$.

1. Ο Α είναι θετικά ορισμένος αν και μόνον εάν
$$\Delta_k := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$
για κάθε $k = 1,2, \ldots, n$.
2. Ο Α είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνον εάν
$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$$

Κριτήριο του Sylvester (2)

Θυμίζουμε ότι οι ορίζουσες Δ_k λέγονται κύριες ελάσσονες ορίζουσες του Α. Προφανώς $\Delta_1 = a_{11}$ και $\Delta_n = detA$.

Στην ειδική περίπτωση των συμμετρικών 2×2 πινάκων

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

έχουμε τον Α θετικά ορισμένο αν και μόνο εάν

$$\alpha > 0 \; \kappa\alpha\iota \; detA = ac - b^2 > 0.$$

Αρνητικά ορισμένος αν και μόνο εάν

$$\alpha < 0 \; \kappa\alpha\iota \; detA = ac - b^2 > 0.$$

Θεώρημα των τοπικών ακροτάτων

Δίνουμε το κριτήριο της Εσσιανής για τον εντοπισμό των τοπικών ακτοτάτων.

Θεώρημα: Αν η $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ είναι C^3 και το x_0 είναι κρίσιμο σημείο, τότε

1. Αν η Εσσιανή $Hf(x_0)$ είναι θετικά ορισμένη, τότε το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο της f.
2. Αν η Εσσιανή $Hf(x_0)$ είναι αρνητικά ορισμένη, τότε το x_0 είναι τοπικό μέγιστο της f.

Παράδειγμα 2

Εντοπίστε τα τοπικά ακρότατα της

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Λύση: Τα κρίσιμα σημεία της f ικανοποιούν

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0).$$

Άρα το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το (0,0).

Η Εσσιανή είναι ίση με

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

και είναι θετικά ορισμένη αφού $\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0$ και $\Delta_2 = detHf(0,0) = 4 > 0$. Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα το κρίσιμο σημείο (0,0) είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 3 (1)

Εντοπίστε τα τοπικά ακρότατα της

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Λύση: Τα κρίσιμα σημεία της f ικανοποιούν

$$\nabla f(x,y) = (2x,-2y) = (0,0).$$

Άρα το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το (0,0).

Η Εσσιανή είναι ίση με

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Έχουμε

$$\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0$$

και $\Delta_2 = detHf(0,0) = -4 < 0.$

Παράδειγμα 3 (2)

Άρα δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη. Όπως όμως ήδη είδαμε το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο για την f, δεν είναι δηλαδή ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Το παραπάνω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό και μας δίνει την ευκαιρία να εξηγήσουμε μια κατάσταση γενικότερου ενδιαφέροντος.

Παρατήρηση 1

1. Αν η Εσσιανή $Hf(x_0)$μιας συνάρτησης

$$\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη στο κρίσιμο σημείο x_0, αλλά όλες οι κύριες ελάσσονες Δ_k είναι διάφορες του μηδενός, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι το x_0 είναι σαγματικό σημείο.

Παρατήρηση 2

1. Αν μία ή περισσότερες από τις κύριες ελάσσονες Δ_k μηδενίζονται, τότε λέμε πως έχουμε να κάνουμε με ένα εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο και η μέθοδος της Εσσιανής αποτυγχάνει και δεν δίνει αποτελέσματα για την φύση του κρίσιμου σημείου. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάζεται ειδική και κατά περίπτωση μελέτη.

Παράδειγμα 4 (1)

Να μελετηθεί η φύση των κρίσιμων σημείων της

$$f(x,y) = x^3(y^3+1).$$

Λύση: Έχουμε

$$\nabla f(x,y) = (3x^2(y^3+1), 3x^3y^2) = (0,0)$$

και συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία $(0,y), y \in \mathbb{R}$. Η Εσσιανή ορίζουσα είναι η

$$\begin{vmatrix} 6x(y^3+1) & 9x^2y^2 \\ 9x^2y^2 & 6x^3y \end{vmatrix} =$$

$$= 36x^4y(y^3+1) - 81x^4y^4$$

Παράδειγμα 4 (2)

η οποία μηδενίζεται για τα κρίσιμα $(0, y), y \in \mathbb{R}$. Επομένως τα κρίσιμα σημεία είναι εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία.

Παρατηρούμε τώρα ότι στα σημεία

$$(\delta, y), y \neq 1, \delta > 0 \text{ και } (\delta, y), y \neq 1, \delta < 0$$

η $f(x, y)$ έχει αντίθετα πρόσημα. Άρα κάθε κρίσιμο σημείο $(0, y)$ είναι αυξενικό σημείο.

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. T. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Τοπικά ακρότατα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης