ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 17: Απόδειξη Θεωρήματος Αντιστροφής.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Απόδειξη του Θεωρήματος Αντιστροφής.

Σκοποί ενότητας

- Απόδειξη του Θεωρήματος Αντιστροφής.

Βήμα 1 (1)

Η απόδειξη θα δοθεί σε βήματα.

Βήμα 1. Εντοπισμός μιας περιοχής V του a όπου η F είναι 1-1 και όπου $J_F(x) \neq 0$ για κάθε $x \in V$.

Από τον τύπο του Taylor έχουμε ότι, για ε’>0 αρκούντως μικρό ισχύει ότι

$$F(x) - F(a) \sim DF(a)(x-a), \forall x \in B(a, \varepsilon').$$

Όμως, $J_F(a) \neq 0$ και συνεπώς ο πίνακας $DF(a)$ είναι αντιστρέψιμος, άρα και 1-1.

Συνεπώς, για $x \neq a$,

Βήμα 1 (2)

$$DF(a)(x-a) \neq 0,$$

η οποία συνδυαζόμενη με την 6,2 δίνει ότι

$$F(x) - F(a) \neq 0, \forall x \in B(a, \varepsilon'),$$

δηλαδή η F είναι 1-1 στην περιοχή $B(a, \varepsilon')$.
Τώρα, η F είναι C^1, άρα η $x \rightsquigarrow J_F(x)$ είναι συνεχής, και επειδή

$$J_F(a) \neq 0,$$

υπάρχει $\varepsilon'' > 0$ τέτοιο ώστε

$$J_F(x) \neq 0, \forall x \in B(a, \varepsilon'').$$

Βήμα 1 (3)

Αν θέσουμε

$$\varepsilon = \frac{min(\varepsilon', \varepsilon'')}{2},$$

τότε για κάθε x μέσα στην κλειστή μπάλλα $B(a, \varepsilon)$ έχουμε αυτά που ζητάμε, δηλαδή την F να είναι 1-1 και $detDF(x) \neq 0$.

Έχουμε λοιπόν την

$$F: B(a, \varepsilon) \to F\big(B(a, \varepsilon)\big)$$

να είναι 1-1 και επί, άρα είναι αντιστρέψιμη.

Βήμα 2 (1)

Βήμα 2: Η F^{-1} είναι συνεχής επί του $F\big(B(a,\varepsilon)\big)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η

$$F: B(a,\varepsilon) \to F\big(B(a,\varepsilon)\big)$$

είναι ανοικτή συνάρτηση. Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση λέγεται ανοικτή αν η εικόνα κάθε ανοικτού είναι ανοικτό σύνολο.

Αν λοιπόν το $A \subset B(a,\varepsilon)$ είναι ανοικτό, τότε, επειδή από το πρώτο βήμα η F είναι 1-1, έχουμε ότι

$$(F^{-1})^{-1}(A) = F(A).$$

Βήμα 2 (2)

Άρα αν υποθέσουμε ότι η F είναι ανοικτή συνάρτηση, τότε από την 6,3 συμπεραίνουμε ότι και το $(F^{-1})^{-1}(A)$ είναι ανοικτό αν το A είναι ανοικτό. Συνεπώς η F^{-1} είναι συνεχής αν η F είναι ανοικτή.

Βήμα 2α: Η F είναι ανοικτή.

Ας είναι $A \subset B(a, \varepsilon)$ ανοικτό. Έχουμε να δείξουμε ότι και το $F(A)$ είναι ανοικτό. Για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $b \in A$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $B(F(b), \delta) \subset F(A)$.

Βήμα 2 (3)

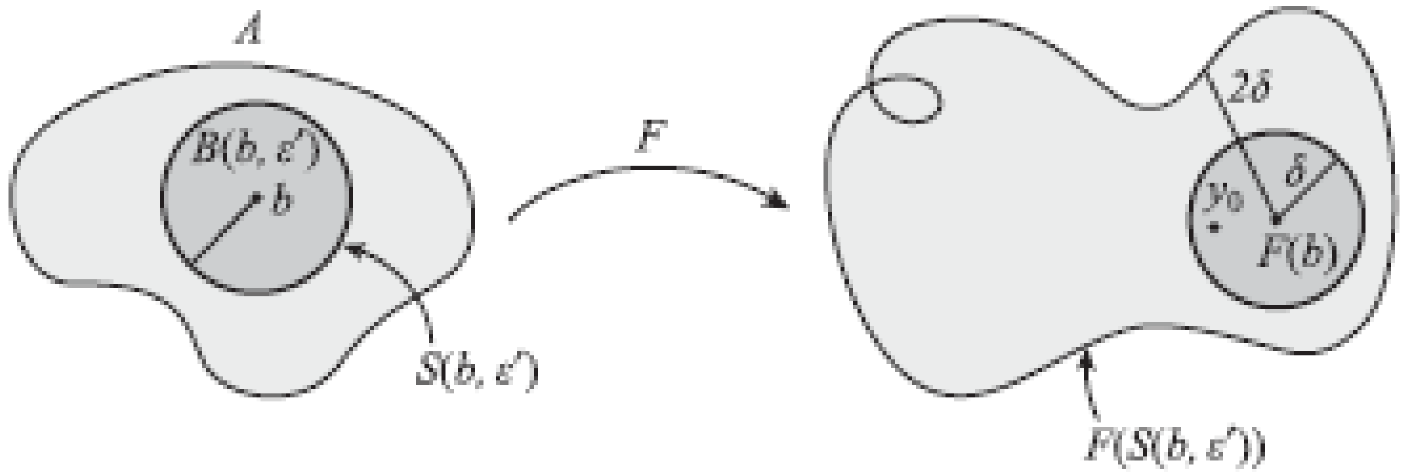
Έστω λοιπόν $b \in A$ τυχαίο. Αφού το Α είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon' > 0$ τέτοιο ώστε $B(b, \varepsilon') \subset \mathrm{A}$. Ας είναι $S(b, \varepsilon')$ η σφαίρα με κέντρο το b και ακτίνα ε' και ας είναι 2δ η απόσταση του $F(b)$ από το $\mathrm{F}\big(S(b, \varepsilon')\big)$.

$$2\delta = \inf_{x \in S(b, \varepsilon')} \|F(b) - F(x)\|$$

(δες σχήμα 1)

Επειδή το σύνολο $\mathrm{F}\big(S(b, \varepsilon')\big)$ είναι συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς, το δ είναι αυστηρά θετικό.

Σχήμα 1



Βήμα 2 (4)

Αν δείξουμε λοιπόν ότι

$$B(F(b),\delta) \subset F\big(B(b,\varepsilon')\big) \subset F(A)$$

Τότε θα έχουμε ότι το $F(A)$ είναι ανοικτό και η απόδειξη του Βήματος 2α είναι πλήρης.

Για να δείξουμε ότι

$$B(F(b),\delta) \subset F\big(B(\alpha,\varepsilon')\big),$$

παίρνουμε ένα $y^0 \in B(F(b),\delta)$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in B(a,\varepsilon')$ τέτοιο ώστε $y_0 = F(x_0)$. Για αυτό θεωρούμε την συνάρτηση

Βήμα 2 (5)

$$g(x) = \|F(x) - y^0\|, x \in \overline{B(a, \varepsilon')}.$$

Επειδή η g είναι συνεχής επί του συμπαγούς $\overline{B(a, \varepsilon')}$, υπάρχει $x_0 \in \overline{B(a, \varepsilon')}$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = \inf_{\overline{B(a,\varepsilon')}} g(x)\,.$$

Ισχυριζόμαστε τα ακόλουθα:

a. $g(x_0) < \delta$.

Πράγματι, $y^0 \in B(F(b), \delta)$, άρα $\|F(x) - y^0\| < \delta$, δηλαδή $g(b) < \delta$ και συνεπώς

$$g(x_0) = \inf_{\overline{B(a,\varepsilon')}} g(x) < \delta$$

Βήμα 2 (6)

$b.$ $x_0 \notin S(b,\varepsilon')$, αλλά $x_0 \in B(b,\varepsilon')$.

Πράγματι, αν $x \in S(b,\varepsilon')$, τότε

$$\|F(x) - F(b)\| \geq 2\delta$$

αφού ορίσαμε το 2δ ως την απόσταση του $F(b)$ από την $F(S(b,\varepsilon'))$.

Άρα, για κάθε $x \in S(b,\varepsilon')$)

$$\begin{aligned} g(x) &= \|F(x) - y^0\| \\ &= \|F(x) - F(b) + F(b) - y^0\| \\ &\geq \|F(x) - F(b)\| - \|F(b) - y^0\| \geq 2\delta - \delta \\ &= \delta \end{aligned}$$

Βήμα 2 (7)

Άρα, $x_0 \notin S(b, \varepsilon')$ και συνεπώς $x_0 \in B(b, \varepsilon')$.
Τώρα, το x_0, ως ελάχιστο της θετικής g, είναι ελάχιστο και για την

$$g^2(x) = \|F(x) - y^0\|^2.$$

Επειδή το x_0 είναι ελάχιστο για την g^2 και εσωτερικό σημείο της μπάλλας $B(a, \varepsilon')$, ισχύει ότι

$$Dg^2(x_0) = 0.$$

Επομένως για κάθε $j = 1, \dots, n$

$$\partial_{x_j} g^2(x_0) = \partial_{x_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(x_0) - y_i^0\right)^2 \right\} = 0$$

Βήμα 2 (8)

ή

$$2\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_j} F_i(x_0)\left(F_i(x_0) - y_i^0\right) = 0, j = 1, \dots, n.$$

Όμως

$$det\left(\partial_{x_j} F_i(x_0)\right)_{i,j} \neq 0$$

και συνεπώς

$$F_i(x_0) - y_i^0 = 0 \; για \; καθε \; i = 1, \dots, n,$$

δηλαδή

$$y^0 = F(x_0).$$

Βήμα 3 (1)

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $y^0 \in B(F(b), \delta)$, υπάρχει $x_0 \in B(a, \varepsilon')$ τέτοιο ώστε $y^0 = F(x_0)$ και συνεπώς $B(F(b), \delta) \subset F(B(a, \varepsilon'))$. Άρα η F είναι ανοικτή.

Βήμα 3: Η F^{-1} είναι C^1.

Θα δώσουμε την απόδειξη για $n = 2$. Η γενική περίπτωση είναι η ίδια, μόνο που οι λογαριασμοί είναι ιδιαίτερα κοπιώδεις. Γράφουμε

$$F^{-1}(y_1, y_2) = H(y_1, y_2) = (H_1(y_1, y_2), H_2(y_1, y_2))$$

Βήμα 3 (2)

Βήμα 3: Η F^{-1} είναι C^1.

Θα δώσουμε την απόδειξη για $n = 2$. Η γενική περίπτωση είναι η ίδια, μόνο που οι λογαριασμοί είναι ιδιαίτερα κοπιώδεις. Γράφουμε

$$F^{-1}(y_1, y_2) = H(y_1, y_2) = (H_1(y_1, y_2), H_2(y_1, y_2))$$

Και έχουμε να δείξουμε ότι οι συνιστώσες H_1 και H_2 έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους.

Από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι

Βήμα 3 (3)

$$F_i\big(H(y_1+s,y_2)\big)-F_i\big(H(y_1,y_2)\big)=$$

$$=\langle \nabla F_i(\xi_1), H(y_1+s,y_2)-H(y_1,y_2)\rangle =$$

$$=\sum_{j=1,2}\partial_{x_j}F_i(\xi_1)\big\{H_j(y_1+s,y_2)-H_j(y_1,y_2)\big\},$$

για κάποιο ξ_1 το οποίο ανήκει στην ευθεία που ενώνει το $H(y_1+s,y_2)$ με το $H(y_1,y_2)$.

Βήμα 3 (4)

Άρα

$$\frac{\mathrm{F}_i\big(H(y_1+s,y_2)\big)-F_i\big(H(y_1,y_2)\big)}{s}$$

$$=\sum_{j=1,2}\partial_{x_j}F_i(\xi_1)\left\{\frac{H_j(y_1+s,y_2)-H_j(y_1,y_2)}{s}\right\}.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους λόγους

$$X_i=\frac{H_j(y_1+s,y_2)-H_j(y_1,y_2)}{s},i=1,2$$

Βήμα 3 (5)

πίνακα συντελεστών των

$$\left(\partial_{x_j} F_i(\xi_1)\right)_{i,j} = DF(\xi_1),$$

ο οποίος εξ υποθέσεως έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός και δεύτερο μέλος τα

$$a_i = \frac{F_i\big(H(y_1+s, y_2)\big) - F_i\big(H(y_1, y_2)\big)}{s}.$$

Όμως $FoH = I$, άρα $F_i oH(y) = y_i$ και συνεπώς

$$a_1 = \frac{y_1 + s - y_1}{s} = 1, a_2 = \frac{y_2 - y_2}{s} = 0.$$

Βήμα 3 (6)

Λύνοντας το σύστημα έχουμε π.χ. ότι

$$X_1 = \frac{H_1(y_1 + s, y_2) - H_j(y_1, y_2)}{s} =$$

$$= \frac{a_1 \partial_{x_2} F_2(\xi_1) - a_2 \partial_{x_2} F_1(\xi_1)}{detDF(\xi_1)} =$$

$$= \frac{\partial_{x_2} F_1(\xi_1)}{detDF(\xi_1)} \xrightarrow[s \to 0]{} \frac{\partial_{x_2} F_2(H(y_1, y_2))}{detDF\big(H(y_1, y_2)\big)}.$$

Άρα

$$\partial_{y_1} h_1(y_1, y_2) = \frac{\partial_{x_2} F_2(H(y_1, y_2))}{detDF\big(H(y_1, y_2)\big)},$$

Βήμα 3 (7)

η οποία είναι και συνεχής αφού στο δεύτερο μέλος έχουμε συνεχείς συναρτήσεις.

Το ίδιο ισχύει και για τις άλλες παραγώγους.

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

«Λογισμός 3. Απόδειξη Θεωρήματος Αντιστροφής». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης