ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 18: Θεώρημα Πεπλεγμένων (Ειδική περίπτωση)

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Θεώρημα πεπλεγμένων για εξισώσεις.
2. Παραδείγματα.

Σκοποί ενότητας

- Θεώρημα πεπλεγμένων για εξισώσεις.

Διαπίστωση (1)

Ας ξεκινήσουμε με μια διαπίστωση. Οι εξισώσεις που ξέρουμε να λύνουμε επακριβώς είναι πολύ λίγες!

Πράγματι, ξέρουμε να λύνουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού

$$ax + by + c = 0$$

δευτέρου βαθμού, π.χ. την εξίσωση του κύκλου

$$x^2 + y^2 = 1. (1)$$

Αν αρχίσουμε να ανεβάζουμε τον βαθμό, τότε τα πράγματα γίνονται όλο και πιο δύσκολα.

Διαπίστωση (2)

Βέβαια είναι περιττό να συζητάμε για μή γραμμικές εξισώσεις του τύπου

$$F(x, y) \coloneqq \sigma\upsilon\nu(xy) - e^{x+y} = 0. (2)$$

Είναι αδύνατον να υπολογίσουμε επακριβώς την λύση $\mathrm{y} = f(x)$ μιας εξίσωσης σαν την (2). Μπορούμε όμως να διαπιστώσουμε αν υπάρχει πράγματι μια τέτοια λύση; Δηλαδή, να μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\mathrm{y} = f(x)$ τέτοια ώστε

$$F\big(x, f(x)\big) = \sigma\upsilon\nu(x, f(x)) - e^{x+f(x)} = 0$$

για κάθε x;

Πεπλεγμένη συνάρτηση (1)

Αν υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση $f(x)$, λέμε πως ορίζεται **υπό πεπλεγμένη μορφή** και η λύση $f(x)$ λέγεται **πεπλεγμένη συνάρτηση** (Πεπλεγμένη, αφού γενικά δεν μπορούμε να την εκφράσουμε με μια απλή εξίσωση $f(x) = \cdots$.)

Για να μπορέσουμε να δούμε αν εξισώσεις σαν τις (1) και (2) έχουν λύσεις και μάλιστα μοναδικές, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της Αντιστροφής.

Ας είναι λοιπόν το D ανοικτό του $\mathbb{R}^2$ και η C^1 συνάρτηση

Πεπλεγμένη συνάρτηση (2)

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε καταρχήν ότι υπάρχει $(x_0, y_0) \in D$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

Για να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x, y) = 0$$

γύρω από την ήδη γνωστή λύση (x_0, y_0), θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$F : D \to \mathbb{R}^2$$

Πεπλεγμένη συνάρτηση (3)

που ορίζεται από τον τύπο

$$F(x,y) = (x, f(x,y)) = (u,v).$$

Η Ιακωβιανή του ορίζουσα είναι η

$$J_F(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial_x f & \partial_y f \end{vmatrix} = \partial_y f(x,y).$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0,$$

τότε ο F είναι αντιστρέψιμος γύρω από το (x_0, y_0).

Ας πούμε G τον τοπικό αυτόν αντίστροφο του F.

Πεπλεγμένη συνάρτηση (4)

Ο G ορίζεται γύρω από το σημείο

$$F(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, 0)$$

αφού υποθέσαμε ότι

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

Θέτουμε

$$G(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}(u, v) = (FoG)(u, v) &= F(g_1(u, v), g_2(u, v)) \\ &= (g_1(u, v), f(g_1(u, v), g_2(u, v))).\end{aligned}$$

Πεπλεγμένη συνάρτηση (5)

Άρα
$$g_1(u,v) = u$$
και
$$f(g_1(u,v), g_2(u,v)) = v.$$
Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις συνάγουμε ότι
$$f\big(u, g_2(u,v)\big) = v. \, (3)$$
Τώρα, ο G ορίζεται γύρω από τα σημεία $(u, 0)$, άρα μπορούμε να θέσουμε $v = 0$ στην (3) η οποία δίνει ότι
$$f\big(u, g_2(u,0)\big) = 0. \, (4)$$

Πεπλεγμένη συνάρτηση (6)

Θέτοντας

$$g_2(u,0) = g(u)$$

και ονομάζοντας x, y τις μεταβλητές u, v, η (4) γίνεται

$$f\big(x, g(x)\big) = 0.$$

Συνεπώς η

$$y = g(x)$$

είναι η πεπλεγμένη συνάρτηση που λύνει την εξίσωση

$$f(x,y) = 0,$$

αλλά μόνο γύρω από το σημείο x_0.

Πεπλεγμένη συνάρτηση (7)

Επιπλέον το $y = g(x)$ είναι το μοναδικό σημείο που λύνει την εξίσωση. Πράγματι, αν και το y' ικανοποιεί την

$$f(x, y') = 0,$$

τότε από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει οτι $0 = f(x, g(x)) - f(x, y') = (g(x) - y')\partial_y f(x, \xi)$ και $\partial_y f(x, \xi) \neq 0$ αφού $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ και η f είναι C^1. Άρα $y' = g(x)$.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν βέβαια κάτω από τις ακόλουθες προυποθέσεις:

$$f(x_0, y_0) = 0 \text{ και } \partial_y f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης (1)

Ας προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε τις παραγώγους πεπλεγμένης συνάρτησης $g(x)$. Η $g(x)$ προέρχεται από την αντιστροφή του C^1 μετασχηματισμού F, και συνεπώς από το θεώρημα της Αντιστροφής είναι και αυτή C^1.
Επιπλέον η εξίσωση

$$f(x, g(x)) = 0$$

ισχύει για κάθε περιοχή του x. Άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big) = 0,$$

για κάθε x *κοντά στο* x_0.

Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης (2)

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Στην περίπτωση μας τον εφαρμόζουμε για $u = x$ και $v = g(x)$. Άρα

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} f\big(x, g(x)\big) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big)\frac{\partial g}{\partial x}(x),$$

ή

Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης (3)

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\frac{\partial_x f\big(x, g(x)\big)}{\partial_y f\big(x, g(x)\big)},$$

αφού, λόγω της συνέχειας της $\partial_y f$,

$$\partial_y f\big(x, g(x)\big) \neq 0$$

για x κοντά στο x_0.

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων στην ειδική περίπτωση μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών.

Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων (1)

Έστω D ανοικτό του $\mathbb{R}^2$ και μια C^1 συνάρτηση

$$f: D \to \mathbb{R}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $(x_0, y_0) \in D$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0, y_0) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Τότε υπάρχει μια περιοχή U του x_0 και μια περιοχή V του $f(x_0, y_0)$ έτσι ώστε να υπάρχει μοναδική C^1 συνάρτηση

$$g: U \to V$$

η οποία να ικανοποιεί

Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων (2)

$$f(x, g(x)) = 0$$

για κάθε $x \in U$. Επιπλέον αν $x \in U$ και $y \in V$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(x, y) = 0$$

τότε $y = g(x)$. Τέλος η $g(x)$ είναι C^1 και

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\frac{\partial_x f\left(x, g(x)\right)}{\partial_y f\left(x, g(x)\right)},$$

για κάθε $x \in U$.

Αναφέρουμε ότι τα ίδια ισχύουν για τις εξισώσεις τριών ή και περισσότερων μεταβλητών.

Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων (3)

Παραδείγματος χάριν αν η $f(x,y,z)$ είναι C^1 συνάρτηση και ικανοποιεί

$$f(x_0,y_0,z_0)=0 \text{ και } \partial_z f(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς z σε μια περιοχή του (x_0,y_0,z_0), δηλαδή να βρούμε μια μοναδική πεπλεγμένη συνάρτηση

$$z=g(x,y)$$

τέτοια ώστε

$$f\big(x,y,g(x,y)\big)=0$$

για κάθε (x,y,z) που ανήκει σε μια περιοχή του (x_0,y_0,z_0).

Παράδειγμα 1 (1)

Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

μπορεί να λυθεί κατά τρόπο μοναδικό στην περιοχή του σημείου (1,1,1) και υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της πεπλεγμένης συνάρτησης που δίνει την λύση.

Λύση: Αν

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz,$$

τότε

$$f(1,1,1) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \partial_z f(1,1,1) = -1 \neq 0.$$

Παράδειγμα 1 (2)

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα των πεπλεγμένων, υπάρχει μοναδική

$$g: B\big((1,1),\varepsilon\big) \to B(1,\eta)$$

τέτοια ώστε

$$f\big(x,y,g(x,y)\big) = 0$$

για κάθε $(x,y) \in B\big((1,1),\varepsilon\big)$. Επιπλέον

$$\partial_x g(x,y) = -\frac{\partial_x f\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial_z f\big(x,y,g(x,y)\big)}$$

$$= -\frac{2x - 3yg(x,y)}{2z - 3xy}.$$

Παράδειγμα 1 (3)

Άρα

$$\partial_x g(1,1) = -\frac{2-3g(1,1)}{2-3} = -1$$

αφού $g(1,1) = 1$. Ομοίως

$$\partial_y g(x,y) = -\frac{\partial_y f\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial_z f\big(x,y,g(x,y)\big)} = \cdots = -1.$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων στις επιφάνειες.

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση και έστω S μια ισότιμη επιφάνεια της f:

$$S = \{(x, y, z): f(x, y, z) = K\}.$$

Έστω ότι

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

Δείξτε ότι στην περιοχή του (x_0, y_0, z_0), η S είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $g(x, y)$ και εν συνεχεία υπολογίστε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της στο (x_0, y_0, z_0).

Παράδειγμα 2 (2)

Λύση: Αφού $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, τότε τουλάχιστον μία από τις μερικές παραγώγους της f στο (x_0, y_0, z_0) είναι διάφορη του μηδενός. Ας πούμε ότι $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Έτσι για την συνάρτηση

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - K$$

έχουμε

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \partial_z F(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα των πεπλεγμένων, υπάρχει μοναδική

$$g: B\big((x_0, y_0), \varepsilon\big) \to B(z_0, \eta)$$

Παράδειγμα 2 (3)

τέτοια ώστε

$$F\big(x, y, g(x, y)\big) = 0 \Leftrightarrow f\big(x, y, g(x, y)\big) = K$$

για κάθε $(x, y) \in B\big((x_0, y_0), \varepsilon\big)$. Δηλαδή, για κάθε $(x, y, z) \in S$, στην γειτονιά του (x_0, y_0, z_0), έχουμε ότι

$$z = g(x, y).$$

Συνεπώς, στην περιοχή του σημείου (x_0, y_0, z_0), η επιφάνεια S είναι το γράφημα της g.

Τώρα, το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της g

Παράδειγμα 2 (4)

στο (x_0, y_0, z_0), αποτελείται ως γνωστόν, από τα σημεία (x, y, z) που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$z - z_0 = \partial_x g(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y g(x_0, y_0)(y - y_0), \text{ (5)}$$

Όμως, η g είναι πεπλεγμένη συνάρτηση της $F(x, y, z) = f(x, y, z) - K$ και συνεπώς:

$$\partial_x g(x, y) = -\frac{\partial_x F\big(x, y, g(x, y)\big)}{\partial_z F\big(x, y, g(x, y)\big)} = -\frac{\partial_x f\big(x, y, g(x, y)\big)}{\partial_z f\big(x, y, g(x, y)\big)}$$

Παράδειγμα 2 (5)

και

$$\partial_y g(x,y) = -\frac{\partial_y F\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial_z F\big(x,y,g(x,y)\big)} =$$

$$= -\frac{\partial_y f\big(x,y,g(x,y)\big)}{\partial_z f\big(x,y,g(x,y)\big)}$$

Αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε ότι

$$\partial_z f(x_0,y_0,g(x_0,y_0))(z-z_0) =$$
$$= -\partial_x f(x_0,y_0,g(x_0,y_0))(x-x_0)$$
$$- \partial_y f(x_0,y_0,g(x_0,y_0))(y-y_0)$$

Παράδειγμα 2 (6)

Όμως $g(x_0, y_0) = z_0$ και συνεπώς η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο (x_0, y_0, z_0) είναι η

$$\partial_z f(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \partial_x f(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \\ + \partial_y f(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) = 0. (6)$$

Από την (6) συμπεραίνουμε ότι η κλίση $\nabla f\big((x_0, y_0, z_0)\big)$ είναι κάθετη στην επιφάνεια

$$S = \{(x, y, z): f(x, y, z) = K\}$$

στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

Παράδειγμα 3 (1)

Αν $a, b\ και\ c$ είναι πραγματικοί, πότε η εξίσωση

$$F(x, y, z, u) = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 = 0,$$

ορίζει την u ως συνεχώς διαφορίσιμη πεπλεγμένη συνάρτηση των x, y και z; Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 2\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Λύση: Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η F είναι

Παράδειγμα 3 (2)

η

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,u) \neq 0$$

ή

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}(x,y,z,u) = -\left(\frac{x^2}{a^2+u}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{b^2+u}\right)^2 - \left(\frac{z^2}{c^2+u}\right)^2 \neq 0$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial_x F}{\partial_u F} = -\frac{2x}{a^2+u}\frac{1}{\partial_u F},$$

και συμμετρικά για τις άλλες παραγώγους.

Παράδειγμα 3 (3)

Έτσι

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{(\partial_u F)^2}\left\{\left(\frac{x^2}{a^2+u}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{b^2+u}\right)^2 + \left(\frac{z^2}{c^2+u}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{4}{(\partial_u F)^2}\{-\partial_u F\} = -\frac{4}{(\partial_u F)}.$$

Επίσης

Παράδειγμα 3 (4)

$$2\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=$$

$$=2x\left(-\frac{2x}{a^2+u}\frac{1}{\partial_u F}\right)+2y\left(-\frac{2y}{b^2+u}\frac{1}{\partial_u F}\right)$$

$$+2z\left(-\frac{2z}{c^2+u}\frac{1}{\partial_u F}\right)$$

$$=-\frac{4}{\partial_u F}\left\{\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}\right\}=\frac{4}{\partial_u F},$$

αφού η έκφραση στο άγκυστρο της τρίτης γραμμής είναι ίση με 1.

Σημείωμα Αναφοράς

«Λογισμός 3. Θεώρημα Πεπλεγμένων (Ειδική περίπτωση)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015