ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 19: Θεώρημα Πεπλεγμένων (γενική μορφή)

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Θεώρημα πεπλεγμένων για συστήματα.
2. Παραδείγματα.

Σκοποί ενότητας

- Θεώρημα πεπλεγμένων για συστήματα.

Γενική μορφή θεωρήματος Πεπλεγμένων συναρτήσεων (1)

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την γενική μορφή του θεωρήματος των Πεπλεγμένων συναρτήσεων.

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) & = & 0 \end{cases} \quad (1)$$

με αγνώστους τα $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Θέλουμε να λύσουμε το ως άνω σύστημα, που έχει

Γενική μορφή θεωρήματος Πεπλεγμένων συναρτήσεων (2)

m εξισώσεις, δηλαδή να βρούμε m συναρτήσεις

$$G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, G_m(x_1, \dots, x_n)$$

οι οποίες ικανοποιούν

$$\begin{cases} F_1(x_1, .., x_n, G_1(x_1, \dots, x_n)) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_m(x_1, .., x_n, G_m(x_1, \dots, x_n)) & = & 0 \end{cases}$$

Η λύση του ανωτέρου συστήματος δίνεται με την βοήθεια του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων στην γενική του μορφή του οποίου η εκφώνηση ακολουθεί.

Θεώρημα (Γενική μορφή των πεπλεγμένων) (1)

Έστω U ανοικτό του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ και

$$F: U \to \mathbb{R}^m$$

μια C^1 συνάρτηση με συνιστώσες $F_1, \dots, F_m$. Αν στο σημείο (x_0, y_0) η F ικανοποιεί

$$F(x_0, y_0) = 0$$

και

$$\Delta(x_0, y_0) \coloneqq \begin{vmatrix} \partial_{y_1} F_1(x_0, y_0) & \dots & \partial_{y_m} F_1(x_0, y_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{y_1} F_m(x_0, y_0) & \dots & \partial_{y_m} F_m(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

Θεώρημα (Γενική μορφή των πεπλεγμένων) (2)

τότε υπάρχει περιοχή V του x_0, περιοχή W του y_0 και μετασχηματισμός

$$G: V \rightarrow W$$

που ικανοποιεί

$$F\big(x, G(x)\big) = 0$$

για κάθε $x \in V$.

Επιπλέον, η $G(x)$ είναι μοναδική λύση, δηλαδή αν υπάρχει $y \in W$ τέτοιο ώστε

$$F(x, y) = 0,$$

τότε $y = G(x)$.

Έστω $G_1, G_2, \dots, G_m$ οι συνιστώσες της πελεγμένης συνάρτησης G. Το θεώρημα των Πεπλεγμένων συναρτήσεων μας λέει ότι οι συναρτήσεις $G_1, \dots, G_m$ δίνουν την μοναδική λύση του συστήματος (1) και ότι το σύστημα (1) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} \mathrm{G}_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ \mathrm{G}_m(x_1, \dots, x_n) = y_m \end{cases}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν της ειδικής περίπτωσης, και αφήνεται στον

Παράδειγμα 1 (1)

ως άσκηση για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη. Επισημαίνουμε μόνον ότι οι μερικές παράγωγοι των πεπλεγμένων συναρτήσεων είναι δυνατόν να υπολογιστούν, αλλά θα το δούμε στην πράξη στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1: Δίδεται το σύστημα

$$\begin{cases} 2xu + yv^2 = 1 \\ xv^3 + 3y^2u^6 = 1 \end{cases}$$

Δείξτε ότι μπορούμε να λύσουμε το σύστημα ως

Παράδειγμα 1 (2)

προς u και v γύρω από τα σημεία $x = 1, y = -1$, $u = 1$ και $v = -1$. Επιπλέον, υπολογίστε την $\partial_x u(x, y)$.

Λύση: Θέτουμε

$$F_1(x, y, u, v) = 2xu + yv^2 - 1$$

και

$$F_2(x, y, u, v) = xv^3 + 3y^2u^6 - 2$$

και θεωρούμε την συνάρτηση

$$F = (F_1, F_2) \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Παράδειγμα 1 (3)

Η F είναι προφανώς C^1και ικανοποιεί

$$F(1,-1,1,-1)=0.$$

Επιπλέον

$$\Delta=\begin{vmatrix}\partial_u F_1 & \partial_v F_1\\ \partial_u F_2 & \partial_v F_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2yu\\ 18y^2u^5 & 3xv^2\end{vmatrix}.$$

Στο σημείο $(1,-1,1,-1)$, έχουμε

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 18 & 3\end{vmatrix}=-30\neq 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα των πεπλεγμένων, μπορούμε να βρούμε μοναδικές C^1 συναρτήσεις

Παράδειγμα 1 (4)

$u(x,y)$ και $v(x,y)$ στην γειτονιά του σημείου $(x_0,y_0)=(1,-1)$ οι οποίες ικανοποιούν το σύστημα μας.

Για να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους των πεπλεγμένων συναρτήσεων $u(x,y)$ και $v(x,y)$ ως προς x, παραγωγίζουμε τις εξισώσεις του συστήματος ως προς x.

Έχουμε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος

$$2xu(x,y)+yv^2(x,y)-1=0$$

για κάθε (x,y,u,v) στην περιοχή του $(1,-1,1,-1)$.

Παράδειγμα 1 (5)

Παραγωγίζοντας την εξίσωση ως προς x έχουμε

$$\partial_x\{2xu(x,y) + yv^2(x,y) - 1\} = 0$$

ή

$$2u(x,y) + 2x\partial_x u(x,y) + 2yv(x,y)\partial_x v(x,y) = 0.$$

Ομοίως, από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$\partial_x\{xv^3(x,y) + 3y^2u^6(x,y) - 2\} = 0$$

ή

$$v^3(x,y) + 3xv^2(x,y)\partial_x v(x,y) + 18y^2u^5(x,y)\partial_x u(x,y) = 0.$$

Παράδειγμα 1 (6)

Έχουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{cases} 2x\partial_x u + 2yv\partial_x v = -2u \\ 3xv^2\partial_x v + 18y^2u^5\partial_x u = -v^3 \end{cases} \quad (2)$$

με αγνώστους τις μερικές παραγώγους $\partial_x u$ και $\partial_x v$.

Η διακρίνουσα του συστήματος είναι ίση με

$$\begin{vmatrix} 2x & 2yv \\ 3xv^2 & 18y^2u^5 \end{vmatrix},$$

η οποία στο σημείο $(1,-1,1,-1)$ είναι ίση με την διακρίνουσα

Παράδειγμα 1 (7)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial_u F_1 & \partial_v F_1 \\ \partial_u F_2 & \partial_v F_2 \end{vmatrix} (1,-1,1,-1) = -30.$$

Άρα το σύστημα (2) έχει μοναδική λύση. Λύνοντας το βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους $\partial_x u$ και $\partial_x v$ στο σημείο $(1,-1)$.

Προφανώς για να υπολογίσουμε τις $\partial_y u$ και $\partial_y v$, παραγωγίζουμε τις εξισώσεις του αρχικού μας συστήματος ως προς y και λύνουμε όπως ακριβώς και στην περίπτωση των $\partial_x u$ και $\partial_x v$.

Σημείωμα Αναφοράς

«Λογισμός 3. Θεώρημα Πεπλεγμένων (γενική μορφή)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015