Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Λογισμός 3
Ασκήσεις

Μιχάλης Μαριάς
Τμήμα Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2015

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα

Ενότητα 1η: Και Ενότητα 2η, Ενότητα 3η

- Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(x^2+y^2)^2}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \alpha\nu\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο (0,0).

- Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\eta\mu(x^2y^2)}{x^2+y^2}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \alpha\nu\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο (0,0).

- Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \alpha\nu\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  Είναι η f συνεχής στο (0,0);

- Έστω

$$f(x,y) = \frac{x^4-2y^4}{(x^2+y^2)^2}\ \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0)$$

  Δείξτε ότι

  - Η f δεν είναι συνεχής στο (0,0).
  - Αν

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_*:\ |y| < x^2\},$$

    τότε

$$\lim_{B \ni (x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 1.$$

- Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x\eta\mu y}{x^2+y^2}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \alpha\nu\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  Είναι η f συνεχής στο (0,0);

- Μπορεί η

$$f(x,y) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\sqrt{|xy|}}{\sqrt{|y|}}, y \neq 0,$$

να οριστεί επί του άξονα των x έτσι ώστε να είναι συνεχής σε όλο τον $\mathbb{R}^2$;

Ενότητα 2η: 4η 5η

- Έστω C συμπαγές του $\mathbb{R}^n$ και x_0 σημείο εκτός του C. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $x_1 \in C$ τέτοιο ώστε
$$d(x_0, x_1) = \inf\{d(x_0, x) : x \in C\}.$$
- Έστω S_1 και S_2 δύο κύκλοι του $\mathbb{R}^2$ που δεν τέμνονται. Δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $x_1 \in S_1$ και $x_2 \in S_2$ τέτοια ώστε
$$d(x_1, x_2) = \inf\{d(x, y) : x \in S_1, y \in S_2\}.$$
- Δείξτε ότι η συνάρτηση
$$f(x, y) = x^2 - 6xy + 10y^2,$$
έχει θετική ελάχιστη τιμή επί της περιφέρειας του μοναδιαίου δίσκου.
- Αν η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής και επιπλέον ικανοποιεί
$$f(\lambda x) = \lambda x, \textit{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ και} x \in \mathbb{R}^2,$$
δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τ.ω.
$$\|f(x)\| \leq M\|x\|, \textit{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^2.$$
Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι ο περιορισμός της f πάνω στον κύκλο $S(0,1)$ είναι συνεχής συνάρτηση και εφαρμόστε το θεώρημα των άκρων τιμών σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε $y \in S(0,1)$ γράφεται ως $y = \frac{x}{\|x\|}$.
- Δίδεται η συνάρτηση
$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Αν $a_0 \in (0,1)$, υπάρχει πάντα (x_0, y_0) τέτοιο ώστε $f(x_0, y_0) = a_0$;
- Να δειχθεί ότι η συνάρτηση
$$f(x, y) = \frac{1}{x+y},$$
είναι συνεχής επί του $A = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- Να δειχθεί ότι η συνάρτηση
$$f(x, y) = \frac{1}{x+y},$$
είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του $B = \{(x, y) : x > 1, y > 1\}$.

Ενότητα 3η: 6η7η

- Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

  1. Αν η f είναι συνεχής στο , είναι επίσης διαφορίσιμη στο ;

  2. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0, y_0 , είναι επίσης συνεχής στο x_0, y_0 ;

  3. Αν η f έχει μερικές παραγώγους στο x_0, y_0 , είναι επίσης διαφορίσιμη στο x_0, y_0 ;

  4. Αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο x_0, y_0 , είναι επίσης διαφορίσιμη στο x_0, y_0 ;

  Δώστε αντιπαραδείγματα όπου χρειάζεται.

- Για τις συναρτήσεις που ακολουθούν, να μελετηθεί η συνέχεια καθώς και η ύπαρξη και συνέχεια των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης.

  1. $$f\ x,y\ = \begin{array}{ll} \frac{\eta\mu x^3-\eta\mu y^3}{x^2+y^2}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \sigma\tau o\ (0,0) \end{array}$$

  2. $$f\ x,y\ = \begin{array}{ll} \frac{\sigma\upsilon\nu x^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 y}, & \alpha\nu\ y \neq 0\ \kappa\alpha\iota\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ 0, & \alpha\nu\ \acute{o}\chi\iota \end{array}$$

- Έστω $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, C^2$ τέτοια ώστε $\varphi\ 0\ = 0$ και $\varphi''(0) \neq 0$. Αν

  $$f\ x,y\ = \begin{array}{ll} \dfrac{x\varphi(y)-y\varphi(x)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x,y\ = (0,0) \end{array}$$

  δείξτε ότι η f είναι συνεχής αλλά όχι C^1.

- Έστω

  $$f\colon\ a,b\ \to \mathbb{R}$$

  συνεχής. Για $x_0 \in\ a,b$, θέτουμε

  $$F\ x,y\ = \ _{x_0}^{x}\ _{x_0}^{y} f(u,v)dv\ \ du.$$

  Δείξτε ότι η F είναι C^1 $\sigma\tau o$ $a,b\ ^2$ και υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της F.

- Έστω

  $$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  συνεχής και διαφορίσιμη στο 0. Αν

  $$F\ x,y\ = \frac{1}{x}\ _{x}^{xy} f\ t\ dt,$$

  για $x \neq 0$ και

$$F\ \ 0,y\ \ =\ \ y-1\ \ f\ \ 0\ \ ,$$

δείξτε ότι

1. Η F είναι C^1, και

2. Προσδιορίστε για ποιες f, η $F(x,y)$ είναι ανεξάρτητη του x.

- Έστω

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

παραγωγίσιμη. Αν

$$F\ \ x,y\ \ = \begin{array}{ll} \dfrac{f\ \ x\ \ -f(y)}{x-y}, & \alpha\nu\ x \neq y \\ f'\ \ x\ \ , & \alpha\nu\ x = y \end{array}$$

δείξτε ότι η F είναι συνεχής επί του $\mathbb{R}^2$ αν και μόνο εάν η f είναι C^1 επί του $\mathbb{R}$.

Ενότητα 4η: 10,11,12

- Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f\ \ x,y\ \ =\ \ \sigma\upsilon\nu y + x^2, e^{x+y}$$

και

$$g\ \ u,v\ \ =\ \ e^{u^2}, u - \eta\mu v$$

Γράψτε τον τύπο της fog και εν συνεχεία υπολογίστε την παράγωγο της στο $(0,0)$.

- Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 \\ t & \rightsquigarrow & x\ \ t\ \ , y\ \ t\ \ , z(t) \end{array}$$

διαφορίσιμες με $f\ \ 0\ \ = 0$ και $g\ \ 0\ \ = 0$. Αν

$$\nabla f\ \ 0\ \ =\ \ 2,-1,1\ \ \text{και}\ g'\ \ 0\ \ =\ \ 0,1,-2$$

να υπολογιστούν οι $\ \ fog\ \ '\ \ 0\ \ $ και $\ \ gof\ \ '\ \ 0\ \ $.

- Η άσκηση είναι ένα παράδειγμα που δείχνει ότι ο κανόνας της αλυσίδας δεν ισχύει αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f\ \ x,y\ \ = \begin{array}{ll} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \alpha\nu\ \ x,y\ \ \neq\ \ 0,0 \\ 0, & \sigma\tau o\ (0,0) \end{array}$$

Δείξτε ότι

1. Οι μερικές παράγωγοι $\partial_x f\ \ 0,0\ \ $ και $\partial_y f\ \ 0,0\ \ $ υπάρχουν.

2. Αν $a, b \in \mathbb{R}_*$ και

$$g(t) = (at, bt),$$

τότε η fog είναι παραγωγίσιμη και

$$(fog)'(0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

αλλά

$$\langle \nabla f(0,0), g'(0) \rangle = 0 \neq \frac{ab^2}{a^2+b^2}.$$

- Αν $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ και

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (a,b)\},$$

 δείξτε ότι η

$$f(x,y) = log\left((x-a)^2 + (x-b)^2\right)$$

 είναι αρμονική στο G.

- Δείξτε ότι η

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

 είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^2_*$.

- Να υπολογιστεί η Λαπλασιανή στις κυλινδρικές συντεταγμένες.
- Θεωρούμε τις πραγματικές C^2 συναρτήσεις $\varphi(t)$ και $\omega(t)$, $t \in \mathbb{R}$, και την συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f(x,y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

 Δείξτε ότι

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

 για όλα τα $x \in \mathbb{R}_*$ και $y \in \mathbb{R}$.

- Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας για να δείξετε ότι

$$\partial_x \int_0^x f(x,y)\,dy = f(x,x) + \int_0^x \partial_x f(x,y)\,dy$$

Ενότητα 5η: 13,14,15

- Στα ερωτήματα από 1 μέχρι και 4, βρείτε τα κρίσιμα σημεία και προσδιορίστε την φύση τους.
 1. $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$,
 2. $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$,

3. $f(x,y) = y + x\eta\mu y$,

4. $f(x,y) = \log(2 + \eta\mu xy)$

- Βρείτε το σημείο του επιπέδου

$$x - \frac{y}{2} + z = 10,$$

που είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

- Δείξτε ότι

1. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με όγκο 1, έχει ελάχιστη επιφάνεια όταν είναι κύβος.

2. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με επιφάνεια 1, έχει μέγιστο όγκο αν είναι κύβος.

- Έστω

$$f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2).$$

Δείξτε ότι

1. Το (0,0) είναι κρίσιμο σημείο της f.

2. Η f έχει τοπικό ελάχιστο πάνω σε κάθε ευθεία που περνά από το (0,0), δηλαδή αν

$$g(t) = (at, bt),$$

τότε η fog έχει ελάχιστο στο 0 για κάθε επιλογή των a, b.

3. Το (0,0) δεν είναι τοπικό ελάχιστο για την f.

- Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ ικανοποιεί

$$3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 1 = 0,$$

να αποδειχθεί ότι η f δεν μπορεί να έχει τοπικό ελάχιστο.

- Να προσδιοριστούν οι παράμετροι α, β ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 (x^2 - \alpha x - \beta)\, dx$$

να έχει ελάχιστη τιμή.

- Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης

$$f(x,y) = \eta\mu x + \eta\mu y + \sigma\upsilon\nu(x + y)$$

όταν $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- (Ανισότητα Holder) Έστω $p, q \in (1, +\infty)$ συζυγείς, δηλαδή

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

και x, y θετικοί. Δείξτε την ανισότητα Holder:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}.$$

- Να βρεθεί η μικρότερη απόσταση μεταξύ της ευθείας $x + y = 4$ και της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
- Αν οι θετικοί αριθμοί x, y, z και α,β,γ ικανοποιούν

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1,$$

  να αποδειχθεί ότι

  1. $27xyz \leq \alpha\beta\gamma$,

  2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\alpha + \beta + \gamma}$.

- Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\eta\mu\frac{x}{2}\eta\mu\frac{y}{2}\eta\mu\frac{z}{2},$$

  αν τα x, y και $z \geq 0$ ικανοποιούν

$$x + y + z = \pi.$$

- Αν x, y και $z \geq 0$, να δειχθεί ότι

$$3(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq x + y + z.$$

- Αν $x, y, z > 0$, δείξτε ότι

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3.$$

- Μελετήστε τα ακρότατα της

$$f(x, y, z) = xyz$$

  επί της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- Μελετήστε τα ακρότατα της

$$f(x, y, z) = z - x - y$$

  επί της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- Αν $a, b, c > 0$, ποια είναι η μέγιστη τιμή της

$$f(x, y, z) = ax + by + cz$$

  επί της κλειστής μπάλλας

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\};$$

  Υπόδειξη: Μελετήστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

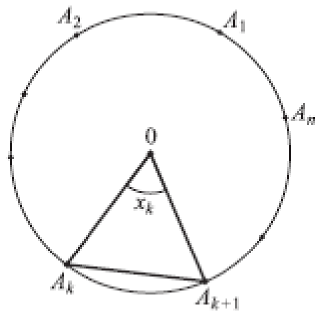
- Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x_1, \dots, x_n) = \eta\mu x_1 + \dots + \eta\mu x_n,$$

υπό την συνθήκη $x_j \in [0,\pi]$ και

$$x_1 + \cdots + x_n = 2\pi.$$

Γεωμετρική σημασία: Θεωρούμε στον κύκλο κέντρου μηδέν και ακτίνας 1 ένα εγγεγραμμένο n-άγωνο $A_1, \dots, A_n$. (Βλέπε σχήμα 1).



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου $A_k 0 A_{k+1}$ είναι ίσο με

$$\frac{1}{2}\eta\mu x_k,$$

όπου x_k είναι η γωνία του σχήματος. Επομένως η

$$f(x_1, \dots, x_n) = \eta\mu x_1 + \cdots + \eta\mu x_n,$$

ισούται με το διπλάσιο της επιφάνειας του εγγεγραμμένου n-αγώνου. Άρα η άσκηση μας ζητάει να βρούμε το εγγεγραμμένο n-άγωνο με την μέγιστη επιφάνεια.

- Έστω A ένας συμμετρικός πίνακας 3×3. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\left\langle A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\rangle$$

1. Ποια είναι η κλίση ∇f;

2. Αν επί της μοναδιαίας σφαίρας S η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δείξτε ότι υπάρχουν $x \in S$ και $\lambda \neq 0$ τέτοια ώστε

$$Ax = \lambda x.$$

Ενότητα 6η: 16,17

- Έστω $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τον τύπο

$$F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2).$$

Δείξτε ότι στην περιοχή του $(1,1,1)$, η F είναι αντιστρέψιμη και ύστερα υπολογίστε την Ιακωβιανή της F^{-1}.

- Έστω $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον τύπο

$$F(x,y) = (e^x - e^y, x + y).$$

Δείξτε ότι η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη γύρω από κάθε (x_0, y_0).

- Για $a, b \in \mathbb{R}$, ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F_{a,b}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & (x + a\eta\mu y, y + b\eta\mu x) \end{array}$$

1. Δείξτε ότι για κάθε a, b, η $F_{a,b}$ είναι επί.

2. Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $F_{a,b}$ να είναι 1-1.

3. Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $F_{a,b}$ να είναι διφφεομορφισμός του $\mathbb{R}^2$.

- Έστω η εξίσωση τρίτου βαθμού

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

όπου οι συντελεστές a, b και c είναι πραγματικοί. Αν ρ_1, ρ_2 και ρ_3 είναι οι ρίζες τις εξίσωσης, τότε

$$a = -(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3), b = \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1$$

και

$$c = -\rho_1\rho_2\rho_3.$$

Υποθέτουμε ότι στο σημείο (a_0, b_0, c_0) οι αντίστοιχες ρίζες ρ_1^0, ρ_2^0 και ρ_3^0 είναι πραγματικές. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(a, b, c) \in B((a_0, b_0, c_0), \varepsilon)$, οι αντίστοιχες ρίζες ρ_1, ρ_2 και ρ_3 είναι πραγματικές.

Ενότητα 7η: 18,19

- Δίδεται η σχέση

$$x = ay + by^2 + cy^3,$$

με $a \neq 0$. Να δειχθεί ότι η σχέση αυτή μπορεί να λυθεί ως προς y συναρτήσει του x σε μια περιοχή του $(0,0)$. Στην συνέχεια να υπολογιστεί η παράγωγος $\partial_x y(0)$.

- Έστω η εξίσωση

$$x^m + y^n = 1,$$

όπου m και n ακέραιοι >1. Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή δέχεται διαφορίσιμη λύση ως προς y συναρτήσει του x, εκτός αν $x = \pm 1$ και m άρτιος και αν $x = 1$ και m περιττός.

- Βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες το σύστημα

$$xu + \lambda y u^2 v = 1 + \lambda$$
$$xu^2 + yv^3 = 2$$

έχει λύση ως προς u, v (σαν συναρτήσεις των x, y) σε περιοχή του σημείου $(1,1,1,1)$. Στην συνέχεια, υπολογίστε τις παραγώγους των u και v ως προς x και y στο σημείο $(1,1)$.

- Δείξτε ότι στην περιοχή του σημείου $(1,1,1,1)$ μπορούμε να λύσουμε μονοσήμαντα το σύστημα

$$2xu + yu^2 v = 3$$
$$xu^3 + 3y^2 v^4 = 4$$

ως προς u, v (σαν συναρτήσεις των x, y) και στην συνέχεια, υπολογίστε τις παραγώγους των u και v ως προς x και y στο σημείο $(1,1)$.

- Δείξτε ότι μπορούμε να λύσουμε μονοσήμαντα το σύστημα

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u$$
$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y = v$$

ως προς u, v (σαν συναρτήσεις των x, y) σε περιοχή του σημείου $x, y = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.